格子填不填？

台北市立建國高級中學 鄭澈
指導老師：李宗憙

Abstract

I found an interesting problem from EGMO 2016, and tried to extend it into different conditions. In this piece of research, I extend it to three forms rectangular, triangular and cubic form. In the rectangular form, I used the same method as the one used in the official solution to the original problem.

In the triangular and cubic ones, I got the upper and lower bounds of the solution through calculation and the finding of some trivial solutions. In the triangular case, I also got a construction with the help of programming.

中文摘要

我在一道歐洲女子奧林匹亞的組合問題中，發現一些值得推廣的地方。原題是建立在特定邊長的正方形上，而解答給出了對任意整數邊長的正方形之證明。在本篇研究報告中，我嘗試把這個問題拓展到三個方向——長方形、三角形和立方體。

在長方形的情形中，我使用與官方解法相似的討論方式，成功獲得了最小值。而在三角形和立方體的情形中，我都先經由計數得出上下界，接著透過程式的輔助，觀察每邊個數較小的情形，並進一步在三角形的情形中獲得了不錯的構造。

1 簡介

1.1 研究動機與目的

我在 2016 年 EGMO 的題目中，發現了一道有趣的組合問題，因而產生將其推廣至不同圖形的想法。

1.2 主要結果

我主要的研究結果在長方形及三角形兩個部分。原題解提供的的 nn 方格推廣可利用二部圖確定其解，而我成功利用相似的手法完成了長方形的討論。在考慮三角形時，我未能得到確定的解，但提出了一個不錯的構造。最後雖然也進一步嘗試立體，只是未有較出色的結果。

2 名詞、代號定義

1. 塗色單元：塗色點、塗色方格等的總稱
2. n：每邊的單元數
3. x：使用的塗色單元數
4. 合格：當一種塗法使所有單元都與足夠多的塗色單元相關時，稱該塗法爲合格的塗法。
5. 高斯符號：本篇研究中，使用中括號 [] 代表對一數字取下高斯，即以 $[n]$ 表示不大於 n 的最大整數。

3 正方形的討論

3.1 原題

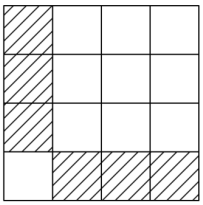
題目如下：

> m 是一個正整數。在一個 $4m \times 4m$ 的正方形方陣中，若兩個方格位於同一行或同一列，則稱它們是相關的。每個方格與自身均不相關。現將其中一些方格塗成藍色，使得每一方格至少與兩個以上的藍色方格相關。試問最少須將多少方格塗成藍色？

定理 1. 所求之最小值不超過 $6m$。

證明.

如圖，將方格表劃分成 m^2 個 4×4 的方格，並將沿主對角線的 m 個 4×4 方格均按圖中所示的方式塗色。此時每個單位方格均與至少 2 塗色方格相關，故得證。



□

定義 1. 考慮一個二部圖 $R+C$，其中 R、C 中各有 $4m$ 個點，分別代表方格表的 $4m$ 行、$4m$ 列。若 r 和 c 之間有邊連接，則令 $\varepsilon(r,c)=2$，否則 $\varepsilon(r,c)$ 等於 0。

定理 2. ”原問題”等價於對於所有 $r \in \mathbb{R},\ c \in C$，皆有 $\deg r + \deg c - \varepsilon(r,c) \geq 2$。

定義 2. 在二部圖中，若一個點與其他點皆無邊相連，則稱此點<u>孤立</u>。

定理 3. 此二部圖中每個連通分支的邊數皆不小於一。

證明.

假設方格表中存在一行完全沒有藍色方格，則每列皆必須至少有 2 個藍色方格才能使該行中的各方格滿足條件，此時將使用 $8m$ 個藍色方格，與定理一矛盾。故知方格表中每行或每列均有藍色方格，即在二部圖中沒有孤立的點，從而得知每個連通分支的邊數不小於一。 □

定理 4. 二部圖中不存在三角形。

證明.

行與行、列與列皆不可能相交，故可得 **定理** 4。 □

定理 5. 每個連通分支至少有三條邊、四個點。

證明.

由原題目條件可知，每個藍色方格皆至少與其他 2 藍色方格相關，故每個連通分支至少有三條邊。又由 **定理** 4。，三條邊至少須由四個點所形成。 □

定理 6. 所需的最小值即爲 $6m$。

證明.

由 **定理** 4，每個連通分支至少有四個點，故圖中至多有 $\dfrac{2 \times 4m}{4} = 2m$ 個連通分支。由 **定理** 4 可知，在每個連通分支中，邊數至少爲點數減一，故圖中至少有 $2m \times (4-1) = 6m$ 條邊，得證。 □

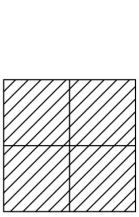
4 $n \times n$ 方格

- 討論
  - 當 n 爲奇數（$n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^+$）時，圖中至多有 k 個連通分支，故至少有 $k(4-1)+2 = 3k+2 = \dfrac{3n+1}{2}$ 個點。
  - 當 $n = 4k+2, k \in \mathbb{Z}^+$ 時，圖中至多有 $2k$ 個連通分支，故至少有 $2k(4-1)+4 = 6k+4 = \dfrac{3n}{2}+1$ 個點。

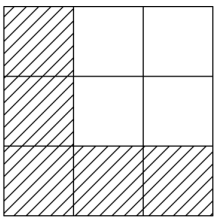
藍色單元格之個數不少於：$\begin{cases} \dfrac{3n}{2}, & 4 \mid n; \\ \dfrac{3n+1}{2}, & n \text{ 爲奇數}; \\ \dfrac{3n}{2}+1, & 4 \mid n-2。 \end{cases}$

- 構造相應塗法：

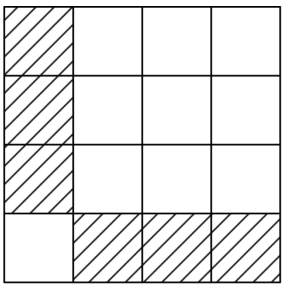
爲了構造相對應滿足要求的塗色方式 C_n，先構造出 C_2、C_3、C_4、C_5，如下圖。



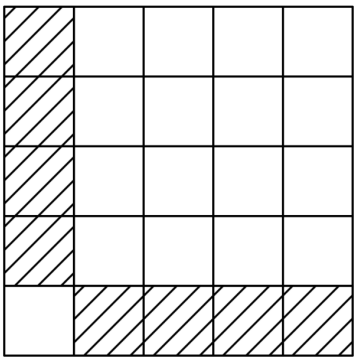
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

- 塗色方法：
  - $n = 4k$：
    沿 C_n 之主對角線連續放置 k 個 C_4即可。
  - $n = 4k+1$：
    沿 C_n 之主對角線連續放置 $k-1$ 個 C_4 再加上一塊 C_5 即可。
  - $n = 4k+2$：
    沿 C_n 之主對角線連續放置 k 個 C_4 再加上一塊 C_2 即可。
  - $n = 4k+3$：
    沿 C_n 之主對角線連續放置 k 個 C_4 再加上一塊 C_3 即可。

5 長方形的討論

5.1 基本定義

在一個 $m \times n$ 的長方形中，我沿用原題的條件，令每一方格至少與兩個以上的藍色方格相關爲合格。

5.2 解法與證明

- 定義與假設

  在 $m \times n$ 的長方形中，將行、列分別對應到二部圖 $R+C$ 中 R 的 m 個點與 C 的 n 個點，並假設 $m > n$。

- 討論

  當 $n = 1$ 時，只要任意塗滿三個點即可。

  當 $n \geq 2$ 時，則可依二部圖中孤立點的有無分別討論。

  1. 二部圖中有孤立點：

     若二部圖中有孤立點，則如同原題所討論，必須將其中兩行或兩列塡滿。當 $n \geq 2$ 時，將兩短邊塡滿即可符合要求，共使用 $2n$ 個塗色方格。

  2. 二部圖中無孤立點：

     若二部圖中無孤立點，則可使用原題之證明之定理（**定理** 3、4、5）：

     定理 3：此二部圖中每個連通分支的邊數皆不小於一。

     定理 4：二部圖中每個連通分支的邊數皆不小於一。

     定理 5：每個連通分支至少有三條邊、四個點。

定理 7. 將二部圖分爲 k 個連通分支時，使用的邊數至少爲 $m+n-k$ 條邊。

證明.

由 **定理** 4 可知，在每個連通分支中，邊數至少爲點數減 1，故使用的邊數至少爲總共的點數減去連通分支數，故得證。 □

- 討論：

  由 **定理** 5 ，因爲每個連通分支至少有四個點，故最多可分爲 $\left[\dfrac{m+n}{4}\right]$ 個連通分支，共使用 $m+n-\left[\dfrac{m+n}{4}\right]$ 個塗色方格。

- 構造塗法：

  比較兩種情形中的使用塗色方格數：若 $m+n-\left[\dfrac{m+n}{4}\right] \geq 2n \Leftrightarrow m-n \geq \left[\dfrac{m+n}{4}\right]$，應使用塗滿兩短邊的塗法。

  接著，我要討論無孤立點的塗法是否必定可行。

  1. 較短邊格數 $n < 4$

     當 $n = 2$ 或 3 時，都應採用塗滿兩短邊的塗法，故不需於此討論。

  2. 較短邊格數 $n \geq 4$

     先將 R 中的第 1 個點連到 C 中的第 1 到 3 個點，並將 C 中的第 4 個點連到 R 中的第 2 到 4 個點。接著，以相似的方式連接其餘各點，使每 4 個點形成一個連通分支。由於採用此塗法時，m 與 n 的比值不可能超過 3，不會發生 R 中剩餘 4 個點以上的情況，故 R、C 中剩餘的點數必爲 $0 \sim 3$ 個。

(a) 若剩餘總點數爲 0 ~ 3 個，只要將剩餘點分別連至一個 ”連接超過兩個點” 的點，即完成塗色。

(b) 當 m、n 之間的個數滿足

$$\begin{cases} m-n\equiv 2 \pmod 4 \\ m+n\equiv 0 \pmod 8 \end{cases} \text{或} \begin{cases} m-n\equiv 0 \pmod 4 \\ m+n\equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$$

時，會發生分完後 R、C 各剩下 2 個的情況，此時這 4 點無法以 3 條邊形成符合條件的連通分支，會使所需的塗色方格數加 1。

6 合格的塗色單元數的統一

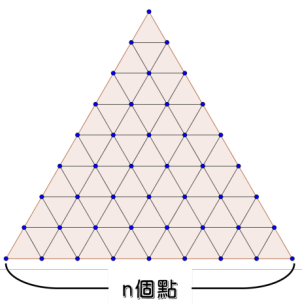
開始推廣至其他圖形前，我先對「合格的相關塗色單元數」進行了統一的定義。在觀察原題條件後，我發現將 2×2 的正方形塡滿時，全部方格都恰好符合條件，因此我將合格的對應塗色單元數定爲：

“將每邊兩個單元的圖形全部塗色時，每單元格所對應到的塗色單元數。 ”

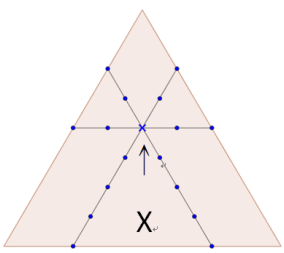
7 三角形的討論

7.1 基本定義

在每邊包含 n 個點的正三角形中（下圖），與三邊平行的方向上之各點彼此相關。



例如下圖中，x 點與周圍 16 點相關。所求的目標即爲使所有點均與至少兩塗色點相關的最小塗色點數。



由於將每邊 2 點的三角形全部塗色時，每個點均與 2 點相關，因此將三角形的目標定爲找出使每個點對應到至少 2 塗色點所需的最小塗色點數。

7.2 初步獲得上下界

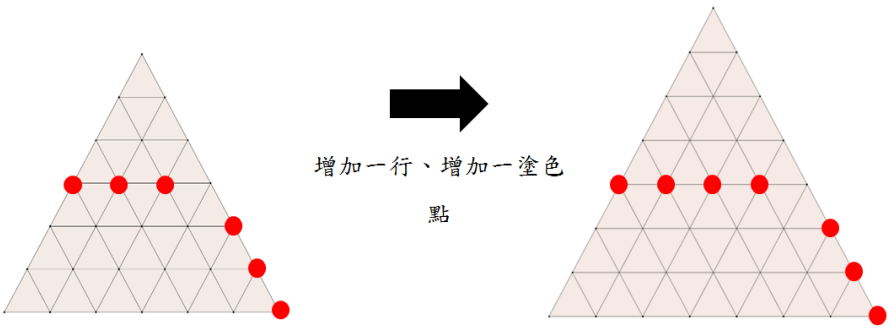
- 下界：

  在一個每邊 n 個點的三角形中共有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個點，又每一塗色點能使 $(2n-2)$ 個點的相關塗色點數加一。假設共需 x 個塗色點，則可得：

$$
\begin{aligned}
&(2n-2)x \geq \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 \\
&\Rightarrow x \geq \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{n-1} \\
&\Rightarrow x \geq \left[\frac{n}{2} \right] + 2
\end{aligned}
$$

- 上界：

  顯然地，將三角形之其中一邊全部填滿爲一組解，故可知 x。又當 $n \geq 7$ 時，可如下構造，將上界壓至 $n-1$。



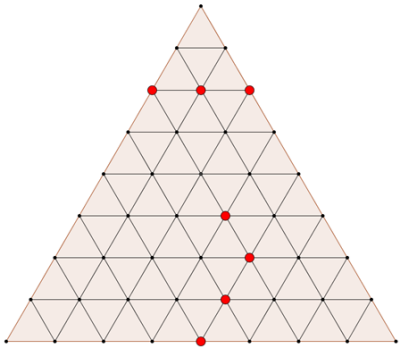
n=7, x=6　　n=8, x=7

7.3 程式輔助

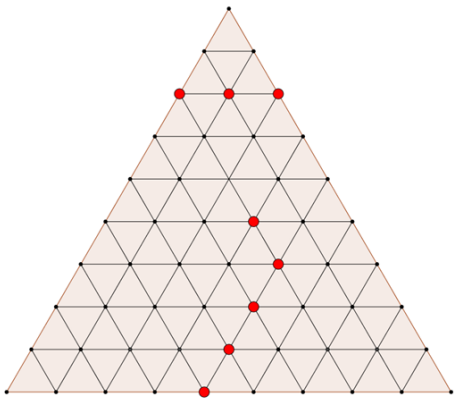
由於一時沒有什麼想法，我嘗試先以程式窮舉，找出在數字較小時的最小塗色點數。結果如下表：

每邊點數 n	塗色點數 x
7	6
8	7
9	7
10	8
11	8
12	≥ 9（等於 8 時無解）

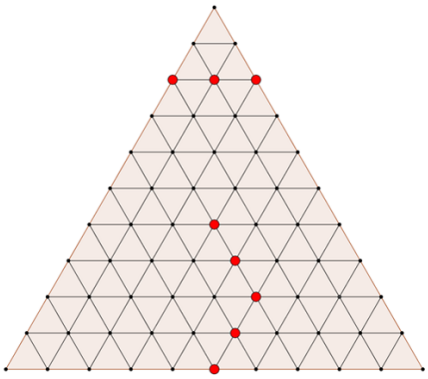
可以發現當 $n > 9$ 時，所得之塗色點數較原先得出之上界 $n-1$ 小。 其中，$n = 9$、10、11 的圖分別如下（垂直、水平、右上－左下爲相關）：



n=9



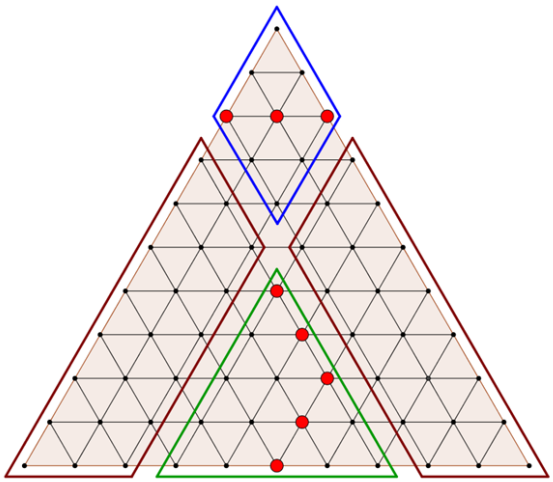
n=10



n=11

7.4 構造

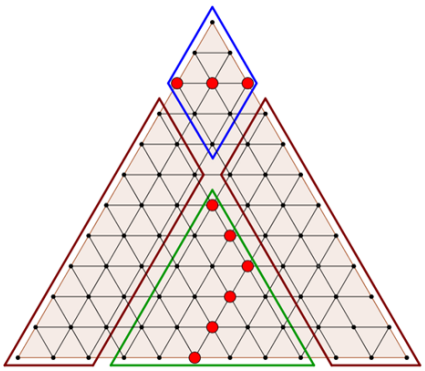
研究下圖（$n = 11$）可發現，藍色框中各點可視爲由兩個 “一邊塡滿” 的三角形所組成，而綠色框中之三角形亦爲一滿足條件之三角形，而棕色框中各點，則分別與藍框及綠框中的一點相關。



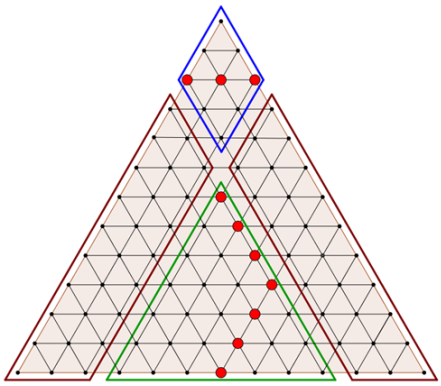
經過以上觀察和一些嘗試，我得出了一種構造方式：
首先將三角形依邊長模四之餘數分類。

- $n = 4k - 1\,(k \in \mathbb{Z}, k \geq 3)$ 的三角形可沿中線放入兩個如藍色框中邊長爲 k 的菱形，在其中分別如上頁之藍、綠框內之塗法塗色即可符合條件。需要的塗色方格數爲 $3k - 1$，即 $\dfrac{3n-1}{4}$。
- $n = 4k\,(k \in \mathbb{Z}, k \geq 3)$ 的三角形即爲將 $(4k-1)$ 型之下方加入一列，並將由右下角數起第 $2k+1$ 個點塗色，需 $3k$ 個點，即 $\dfrac{3n}{4}$。
- $n = 4k + 1\,(k \in \mathbb{Z}, k \geq 3)$ 的三角形可沿中線分別放入邊長爲 k、$k+1$ 的菱形，塡法與 $4k-1$ 相同。共需 $3k+1$ 個塗色點，即 $\dfrac{3n+1}{4}$。
- $n = 4k + 2\,(k \in \mathbb{Z}, k \geq 3)$ 的三角形即爲將 $(4k+1)$ 型之下方加入一列，並將由右下角數起第 $2k+2$ 個點塗色，需 $3k+2$ 個點，即 $\dfrac{3n+2}{4}$。

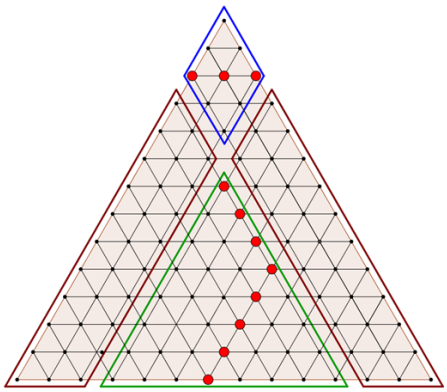
以下以 $n = 12$、13、14 分別演示被 4 整除、模 4 餘 1 和餘 2 的塗法。



n=12



n=13



n=14

8 立方體的討論

8.1 基本定義

在每邊包含 n 個方塊的立方體中，定義每個方塊與同行、同列與同鉛直線上之各方塊相關。

因爲將 $2 \times 2 \times 2$ 的立方體塡滿後，所有方塊皆與 3 塗色方塊相關，故每個方塊必須與至少 3 塗色方塊相關。

8.2 上下界的獲得

- 下界：

  一個每邊 n 個點的立方體中共有 n^3 個方塊，又每一塗色點能使 $(3n-3)$ 個點的相關塗色點數加一。假設共需 x 個塗色點，則可得：

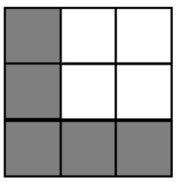
$$
\begin{aligned}
&3n - 3x \geq n^3 \times 3 \\
&\Rightarrow x \geq n^2 + n + 1 + \frac{1}{n-1} \\
&\Rightarrow x \geq n^2 + n + 2
\end{aligned}
$$

- 上界：

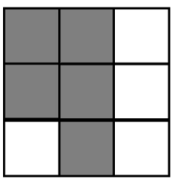
  當 $n \geq 4$ 時，將其中三個相互垂直的平面全部塡滿必定符合要求，故知塗色方格數的上界應爲 $3n^2 - 3n + 1$。

8.3 程式輔助

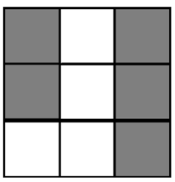
接著，我一樣嘗試利用程式輔助，但由於時間複雜度過高，僅得出 $n = 3$ 之情形，至少需要 15 個方塊，其中一種塡法如下所示：



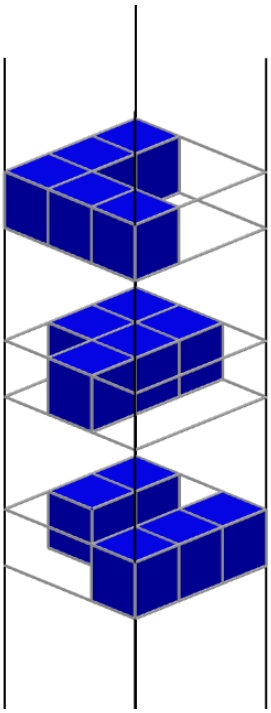
第一層



第二層



第三層



參考文獻

[1] EGMO. (2016, April 16). Retrieved from EGMO: (EGMO 2016 in Romania, 2016): https://www.egmo.org/egmos/egmo5/solutions.pdf

[2] Nivasch, G., & Lev, E. (2005). Non-attacking queens on a triangle. Mathematics Magazine, 78(5), 399-403.

[3] 李威締；王執雋；賴亮宇， (104)， 斜向座標上皇后之研究， 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會

作品評語

陳榮凱教授
國立臺灣大學數學系

從原本的競賽組合問題出發，討論在正方形中用最少方格來控制整個正方形的問題，巧妙地轉換後問題可以轉換成二部圖 (bipartite graph) 的問題，進而可得到原題完整簡潔的答案。

鄭同學將以上的想法繼續拓展至三角型，長方形以及立方體的討論。透過程式的輔助，觀察每邊個數較小的情形，並進一步在三角形的情形中獲得了不錯的構造。

整篇作品條理清晰，從實驗、觀察、推論、證明等部分都有清楚完整的脈絡呈現。雖然可能是囿於問題本身的複雜本質，在其所推廣的情形無法如正方形有簡潔的答案，但是整體而言仍是令人可喜且可讀性極佳的一篇佳作。