從任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共切圓錐曲線定理與孟氏共圓錐曲線定理到 N頂點多面體的西瓦共切球面定理

國立鹿港高級中學 許峻豪
指導老師：鄭仕豐

Abstract

The main purpose of the article is to construct a geometrically invariant property between Ceva's theorem, Menelaus' theorem and conic sections. First, for Ceva's theorem, we replace its original assumption — " three concurrent lines " by " six tangent lines, each two passing through one of the vertices of the triangle and co-tangent to a given conic section ". We want to know whether the product which is composed of six ratios of line segments generated by the vertices of the triangle and the six intersections obtained by the six given tangent lines and the three lines, each containing one of the edges of the triangle, is fixed or not. After pay some efforts, in a triangle, we have successfully proved that the product which consists of six ratios of line segments is fixed and equal to 1. Also, it is fortunate that we can generalize the result to arbitrary convex, concave or cross $n(n \geq 3)$ polygons. That is, for a given convex, concave or cross $n(n \geq 3)$ polygon, we have found that the product which is composed of $2n(n-2)$ ratios of line segments generated by the vertices of the n polygon and the $2n(n-2)$ intersections obtained by the $2n$ given tangent lines, each two passing through one of the vertices of the n polygon and co-tangent to a given conic section, and the n lines, each containing one of the edges of the n polygon, is fixed and equal to 1. We call the result to be "**Ceva's co-tangent-conic-sections theorem for arbitrary convex, concave or cross polygons**".

Then, for Menelaus' theorem, we replace its original assumption — " n collinear points " by "$2n$ points lying on a given conic section with each two lying on the same line containing one of the edges of the n polygon". Here, we also observe the similar result and call the result to be "**Menelaus' co-conic-sections theorem for arbitrary convex, concave or cross polygons**".

After finishing the planar cases, we extend the original result to three dimensional space. For a given tetrahedron and a sphere, we have found the coresponding result and call the result to be "**Ceva's co-tangent-sphere theorem for arbitrary tetrahedrons**". Moreover, we also extend the original result to the Square based pyramid and the polyhedron with n vertices. And we have found the general form of "**Ceva's co-tangent-sphere theorm for arbitrary Square based pyramids and polyhedrons with n vertices**". Also, we have obtained the general form of "Ceva's co-tangent- conical-surface theorm for arbitrary polyhedrons with n vertices". On the other hand, we have found the general form of "**Menelaus' co-conical-surface theorem for arbitrary polyhedrons with n vertices** ".

Keywords: Ceva's theorem, Menelaus' theorem, Brianchon's theorem, Pascal's theorem

中文摘要

本文主要建構『西瓦定理』、『孟氏定理』與圓錐曲線、圓錐曲面的幾何不變性性質。首先，我們將『西瓦定理』之前提—『三線共點』換成『過三頂點的六條切線共切一個給定的圓錐曲線』後，想知道此六條切線與三角形三邊所在直線之交點是否依舊會有數個線段比值乘積為定值，經過努力後，我們成功地證明出在三角形中所產生的六個線段比值乘積為定值1，並且很幸運地驗證得到過凸(或凹、或交叉)$n(n \geq 3)$ 邊形之n個頂點且共切一個給定之圓錐曲線的$2n$條切線與該凸(或凹、或交叉)n邊形之個n邊所在直線的$2n(n-2)$個交點所生成的$2n(n-2)$個線段比值之乘積為定值1，我們將之稱為『任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共切圓錐曲線定理』。接著，針對『孟氏定理』，將『點共線』換成『個點共一個給定的圓錐曲線』後，也發現類似的結果，並將之稱為『任意凸、凹或交叉多邊形的孟氏共圓錐曲線定理』。考慮完平面的情形後，我們試著將之推廣到三度空間中，首先，針對任意四面體，與一個給定的球面，我們得到一個相對

應結的果，並將之稱為『任意四面體的西瓦共切球面定理』，此外，我們也將原問題的結果推廣到四角錐與N頂點多面體中，並且成功地驗證了『任意四角錐的西瓦共切球面定理』與『N頂點多面體的西瓦共切球面定理』，從而推證得『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』；另一方面，我們也已經找到『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』的一般化形式並驗證之。

關 鍵 詞： 西瓦定理、孟氏定理、布里昂雄定理、帕斯卡定理

1 研究簡介

1.1 研究動機

在課堂上學會了用Geogebra繪製一些幾何圖形之後，我們也試著繪製一些過去曾經學過的幾何圖形，重新驗證一些幾何性質，在驗證『西瓦定理』時，老師給了我們一些建議，並告知我們其實它可以推廣到任意凸(或凹、或交叉)多邊形中，如參考資料[1]。

我們對參考資料[1]中的『定理四』特別感興趣，如下『問題A』所述:

問題A：

給定一三角形$\triangle ABC$，且一圓位於$\triangle ABC$內部，過A點作圓的兩$\overline{AT_1}$,$\overline{AT_2}$切線分別交$\overline{BC}$於D_1,D_2，過B點作圓的兩切線$\overline{BU_1}$, $\overline{BU_2}$分別交$\overline{CA}$於E_1,E_2，過C點作圓的兩切線$\overline{CV_1}$, $\overline{CV_2}$分別交$\overline{AB}$於F_1,F_2，如圖A-1所示，則$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$

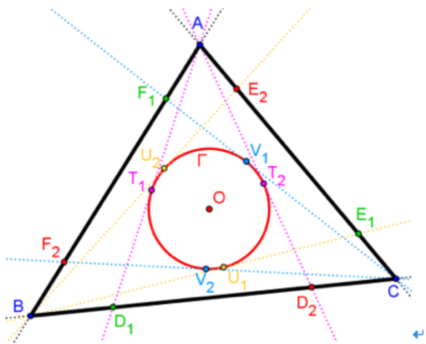

圖 A−1

因為它嘗試將三角形中的『西瓦定理』之前提—『三線共點』換成『過三頂點的六條切線共切一個給定的圓』，並且發現此六條切線與三角形三邊所在直線之六個交點所生成的六個線段比值乘積為定值1，可是其論證過程採用解析幾何(或說坐標幾何法)的證法，顯得相當複雜冗長而缺乏數學美感，所以我們希望可以找到其純幾何的證法，讓論證過程可以變得簡潔優美些。經過一些努力後，我們找到它的純幾何證法，並且發現圓O不一定要在的內部，只要$\triangle ABC$之三頂點不在圓O內部即會成立，同時我們也可以將『問題A』前提中的圓換成圓錐曲線，結論依然成立。最終我們利用『數學歸納法』證明其在任意凸(或凹、或交叉)n邊形中的推廣結果，並將此結論稱為『任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共切圓錐曲線定理』。

因為『西瓦定理』與『孟氏定理』互為對偶命題，所以我們接著考慮『孟氏定理』是否也有類似的推論，我們將三角形中的『孟氏定理』之前提—『三點共線』換成『六個點共一個給定的圓錐曲線，其中每兩個點落在該三角形某一邊所在的直線上』，會有此想法的原因是因為『孟氏定理』之前提—『三點共線』的『線』可以視為一個無限大圓的圓弧的一部分，又『圓』是『圓錐曲線』中的一種，所以我們做如是的思考，我們發現此六個點與三角形三頂點所生成的六個線段比值乘積為定值1，並且我們可以推廣到任意多邊形，發現任意n邊形中共圓錐曲線的$2n$個點與n邊形之n個頂點所生成的個線段比值乘積為定值1，我們將此結論稱之為『任意凸、凹或交叉多邊形的孟氏共圓錐曲線定理』。

在參考資料[1]中，曾經考慮過『N頂點多面體的西瓦共點定理』與『N頂點多面體的孟氏共面定理』，這讓我們想著是否可以將『點』放大變成一個『球面』或其他『圓

錐曲面』，以及把『面』看成一個無限大的球面的一部分，又『球面』是『圓錐曲面』中的一種，所以完成『問題A』在平面上的推廣之後，我們更進一步去考慮其在三度空間中的相對應結果，很幸運地，我們先後找到了『任意四面體的西瓦共切球面定理』、『任意四角錐的西瓦共切球面定理』、『N頂點多面體的西瓦共切球面定理』、『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』與『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』的一般化形式。

1.2 研究目的

1.2.1 尋找『問題A』的純幾何證法，並將其前提中的『過三頂點的六條切線共切一個給定的圓』換成『過三頂點的六條切線共切一個給定的圓錐曲線』，驗證結論依然成立。

1.2.2 『問題A』在任意凸(或凹、或交叉)$n(n \geq n)$邊形上的推論。

1.2.3 將三角形中的『孟氏定理』之前提—『三點共線』換成『六個點共一個給定的圓錐曲線，其中每兩個點落在該三角形某一邊所在的直線上』，則我們可驗證得此六個點與三角形三頂點所生成的六個線段比值乘積為定值1。

1.2.4 將上述第3項研究目的推廣到任意凸(或凹、或交叉)$nn \geq 4$邊形上。

1.2.5 將『問題A』推廣到三度空間中，驗證了『任意四面體的西瓦共切球面定理』、『任意四角錐的西瓦共切球面定理』與、『N頂點多面體的西瓦共切球面定理』與『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』。

1.2.6 將上述第3項與第4項研究目的推廣到三度空間中，尋找『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』之完整形式並驗證之。

1.3 研究設備及器材

頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（Microsoft Word, Geogebra5.0, Maple 13）

2 研究過程、方法與主要結果

(一)、任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共切圓錐曲線定理

引理 1. 西瓦定理(*Ceva's Theorem*)

已知平面上有一三角形$\triangle ABC$，且D、E與F分別為$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、與$\overline{AB}$上異於三角形$\triangle ABC$三頂點之三點，滿足$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、與$\overline{CF}$三直線共交點P或，$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$，則$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$；反之亦成立。

證明. 詳見參考資料[1]中之『引理二』與『引理五』的證明。 □

引理 2. 布里昂雄定理(*Brianchon's Theorem*)

已知$ABCDEF$為一圓錐曲線Γ之外切六邊形，連接其相對頂點的三條對角線AD、BE與CF，則此三條對角線AD、BE與CF共交點。

證明. 詳見參考資料[2]第231頁與第233頁中之證明。 □

引理 3. 布里昂雄定理(*Brianchon's Theorem*)之延伸結論

已知$ABCDEF$為平面上之一凸(或凹、或交叉)六邊形,直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$、$\overleftrightarrow{EF}$與$\overleftrightarrow{FA}$與圓錐曲線Γ相切,連接其相對頂點的三條對角線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$與$\overleftrightarrow{CF}$,則此三條對角線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$與$\overleftrightarrow{CF}$共交點或兩兩平行。

證明. 仿『引理二』之證明方法或參考資料[11]中第 221 頁至第 222 頁之『定理 23』的證法,可證得原命題成立。 □

接下來利用**布里昂雄定理**，使用純幾何證法與射影幾何證法來證明參考資料[1]中曾提及過的『問題 A』，並推廣到圓錐曲線之情形,證明變得相對簡潔且典雅，如下『定理一』所示。

定理 1. 平面上的『三角形的西瓦共切圓錐曲線定理』

在平面上,給定一三角形$\triangle ABC$與一圓錐曲線Γ，且過A點作Γ的兩切線$\overleftrightarrow{AT_1}$、$\overleftrightarrow{AT_2}$，分別交$\overleftrightarrow{BC}$於異於$\overline{BC}$兩端點之$D_1$、$D_2$兩點,過$B$點作$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{BU_1}$、$\overleftrightarrow{BU_2}$分別交$\overleftrightarrow{CA}$於異於$\overline{CA}$兩端點之$E_1$、$E_2$兩點,過$C$點作$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{CV_1}$、$\overleftrightarrow{CV_2}$分別交$\overleftrightarrow{AB}$於異於$\overline{AB}$兩端點之$F_1$、$F_2$兩點,如圖*T1-1*、圖*T1-2*所示，則$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

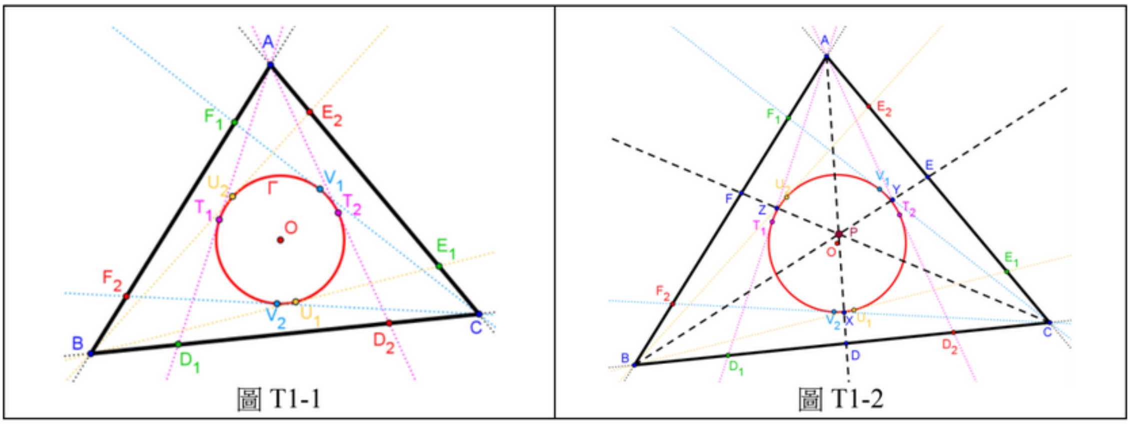

圖 T1-1　　圖 T1-2

證明. 我們只證明Γ是圓的情形,Γ是其他圓錐曲線的證明方法類似。

法(一):純幾何法

在不失一般性之下,我們令『過A點對圓Γ所作之右邊與左邊的兩條切線分別為$\overleftrightarrow{AT_1}$與$\overleftrightarrow{AT_2}$』、『過$B$點對圓$\Gamma$所作之右邊與左邊的兩條切線別為$\overleftrightarrow{BU_1}$與$\overleftrightarrow{BU_2}$』與『過$C$點對圓$\Gamma$所作之右邊與左邊的兩條切線分別為$\overleftrightarrow{CV_1}$與$\overleftrightarrow{CV_2}$』,則

1. 假設直線$\overleftrightarrow{BU_1}$與直線$\overleftrightarrow{CV_2}$相交於點$X$,直線$\overleftrightarrow{CV_1}$與直線$\overleftrightarrow{AT_2}$相交於點$Y$,直線$\overleftrightarrow{AT_1}$與直線$\overleftrightarrow{BU_2}$相交於點$Z$,考慮六邊形$AZBXCY$,因為線段$\overline{AZ}$ 、$\overline{ZB}$ 、$\overline{BX}$ 、$\overline{XC}$ 、$\overline{CY}$與$\overline{YA}$的延長線與圓Γ相切於點T_1、U_2、U_1、V_2、V_1與T_2,故由『引理二』與『引理三』知直線$\overleftrightarrow{AX}$、$\overleftrightarrow{BY}$與$\overleftrightarrow{CZ}$三線共交點或兩兩平行。

2. 我們將證明直線$\overleftrightarrow{AX}$與直線$\overleftrightarrow{BC}$不可能相交於$\overline{BC}$之兩端點。
   驗證：假設直線$\overleftrightarrow{AX}$與直線$\overleftrightarrow{BC}$相交於B點,則表示點X落在直線$\overleftrightarrow{AB}$上,所以切線$\overleftrightarrow{BX}$與直線 $\overleftrightarrow{BA}$重合,亦即直線$\overleftrightarrow{BA}$是圓Γ的切線,並且切線$\overleftrightarrow{BA}$與直線$\overleftrightarrow{CA}$相交於A點,此與『過B點作圓Γ的兩切線$\overleftrightarrow{BU_1}$、$\overleftrightarrow{BU_2}$ 分別交$\overleftrightarrow{CA}$於異於$\overline{CA}$兩端點之E_1、E_2兩點』之前提矛盾,故直線$\overleftrightarrow{AX}$與直線$\overleftrightarrow{BC}$不可能相交於B點。同理可得直線$\overleftrightarrow{AX}$與直線$\overleftrightarrow{BC}$不可能相交於C點。

3. 同步驟2之理可得,
   直線$\overleftrightarrow{BY}$與直線$\overleftrightarrow{CA}$不可能相交於$\overline{CA}$之兩端點。
   直線$\overleftrightarrow{CZ}$與直線$\overleftrightarrow{AB}$不可能相交於$\overline{AB}$之兩端點。

4. 承步驟1之結果,接下來我們分兩種情形討論之:

(a) 當直線$\overleftrightarrow{AX}$、$\overleftrightarrow{BY}$與$\overleftrightarrow{CZ}$三線共交點時,則
假設直線$\overleftrightarrow{AX}$、$\overleftrightarrow{BY}$與$\overleftrightarrow{CZ}$三線共交點P,接下來,我們分成幾類情形討論之:

i. 當直線$\overleftrightarrow{AX}$、$\overleftrightarrow{BY}$與$\overleftrightarrow{CZ}$分別交直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$於異於$\triangle ABC$三頂點之D、E與F三點時,

A. 如圖T1-2所示，由引理 1知$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$。

B. 由三角形面積公式知，$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} = \dfrac{\triangle CAY}{\triangle BCY}$；$\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} = \dfrac{\triangle CAX}{\triangle BCX}$；
$\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} = \dfrac{\triangle ABZ}{\triangle CAZ}$；$\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} = \dfrac{\triangle ABY}{\triangle CAY}$；$\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} = \dfrac{\triangle BCX}{\triangle ABX}$；$\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}} = \dfrac{\triangle BCZ}{\triangle ABZ}$。

C. 承上述步驟B得

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} \times \frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} \times \frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \times \frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \times \frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \times \frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}} \\
&= \frac{\triangle CAY}{\triangle BCY} \times \frac{\triangle ABZ}{\triangle CAZ} \times \frac{\triangle BCX}{\triangle ABX} \times \frac{\triangle CAX}{\triangle BCX} \times \frac{\triangle ABY}{\triangle CAY} \times \frac{\triangle BCZ}{\triangle ABZ} \\
&= \frac{\triangle BCZ}{\triangle CAZ} \times \frac{\triangle CAX}{\triangle ABX} \times \frac{\triangle ABY}{\triangle BCY} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AF}} \times \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{EA}}{\overline{CE}} = 1
\end{aligned}$$

,故此時得證原命題成立。

ii. 當直線$\overleftrightarrow{AX} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$或$\overleftrightarrow{BY} /\!/ \overleftrightarrow{CA}$或$\overleftrightarrow{CZ} /\!/ \overleftrightarrow{AB}$時,證明方法類似於上述步驟 i。

(b) 當直線$\overleftrightarrow{AX}$、$\overleftrightarrow{BY}$與$\overleftrightarrow{CZ}$三線兩兩平行時，證明方法類似於上述步驟(a)。

5. 綜合上述步驟 1、2、3 與 4 得證原命題成立。

法(二):射影幾何法

1. 如圖T1-1與圖T1-2,承法(一)的步驟 1 與步驟 i ,並由引理 2與引理 3(即布里昂雄定理)知$\overleftrightarrow{AX}$、$\overleftrightarrow{BY}$與$\overleftrightarrow{CZ}$三線共交點P或兩兩平行,亦即$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$與$\overleftrightarrow{CF}$三線共交點P或兩兩平行,引理 1可知

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \times \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \times \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1 \tag{1}$$

2. 因為$\overleftrightarrow{AD_1}$、$\overleftrightarrow{BE_2}$與$\overleftrightarrow{CF}$三線共交點$Z$,則由引理 1可知

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \times \frac{\overrightarrow{BD_1}}{\overrightarrow{D_1C}} \times \frac{\overrightarrow{CE_2}}{\overrightarrow{E_2A}} = 1 \tag{2}$$

3. 因為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE_1}$與$\overleftrightarrow{CF_2}$三線共交點$Y$,則由引理 1可知

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \times \frac{\overrightarrow{CE_1}}{\overrightarrow{E_1A}} \times \frac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2B}} = 1 \tag{3}$$

4. 因為$\overleftrightarrow{AD_2}$、$\overleftrightarrow{BE}$與$\overleftrightarrow{CF_1}$三線共交點$Y$,則由引理 1可知

$$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \times \frac{\overrightarrow{AF_1}}{\overrightarrow{F_1B}} \times \frac{\overrightarrow{BD_2}}{\overrightarrow{D_2C}} = 1 \tag{4}$$

5. 由$\dfrac{(2)\times(3)\times(4)}{(1)}$得$\dfrac{\frac{\overrightarrow{AF_1}}{\overrightarrow{F_1B}}\times\frac{\overrightarrow{BD_1}}{\overrightarrow{D_1C}}\times\frac{\overrightarrow{CE_1}}{\overrightarrow{E_1A}}\times\frac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2B}}\times\frac{\overrightarrow{BD_2}}{\overrightarrow{D_2C}}\times\frac{\overrightarrow{CE_2}}{\overrightarrow{E_2A}}\times\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}\times\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\times\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}}{\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}\times\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\times\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{AF_1}}{\overrightarrow{F_1B}}\times\dfrac{\overrightarrow{BD_1}}{\overrightarrow{D_1C}}\times\dfrac{\overrightarrow{CE_1}}{\overrightarrow{E_1A}}\times\dfrac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2B}}\times\dfrac{\overrightarrow{BD_2}}{\overrightarrow{D_2C}}\times\dfrac{\overrightarrow{CE_2}}{\overrightarrow{E_2A}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$，故得證原命題成立。

□

引理 4. 平面上的『任意凸、凹或交叉四邊形共切定圓錐曲線之相鄰切線交點與頂點連構三角形乘積定理』

給定平面上一個四邊形$A_1A_2A_3A_4$，及一圓錐曲線Γ，自A_1點作Γ的兩切線$\overleftrightarrow{A_1T_1}$,$\overleftrightarrow{A_1T_2}$，分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_7$,$P_8$，且分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_9$,$P_{10}$，自$A_2$點作$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{A_2U_1}$,$\overleftrightarrow{A_2U_2}$，分別交$\overleftrightarrow{A_3A_4}$於$P_{11}$,$P_{12}$，且分別交$\overleftrightarrow{A_4A_1}$於$P_{13}$,$P_{14}$，自$A_3$點作$\Gamma$的兩切線$A_3V_1$,$A_3V_2$分別交$A_4$,$A_1$於$P_{15}$,$P_{16}$，且分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_1$,$P_2$，自$A_4$點作$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{A_4W_1}$,$\overleftrightarrow{A_4W_2}$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$於$P_3$,$P_4$，且分別交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於$P_5$,$P_6$，$\forall i\in\{1,2,3,\ldots,15,16\}$，$P_i$均存在，且$P_i$均不與$A_1$,$A_2$,$A_3$,$A_4$重疊，又$\overleftrightarrow{A_1T_1}$與$\overleftrightarrow{A_2U_2}$相交於$X_1$點，$\overleftrightarrow{A_2U_1}$與$\overleftrightarrow{A_3V_2}$相交於$X_2$點，$\overleftrightarrow{A_3V_1}$與$\overleftrightarrow{A_4W_2}$相交於$X_3$點且$\overleftrightarrow{A_4W_1}$與$\overleftrightarrow{A_1T_2}$相交於$X_4$點，如下圖 *L4-1* 與圖 *L4-2* 所示,則

$$\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}=1$$

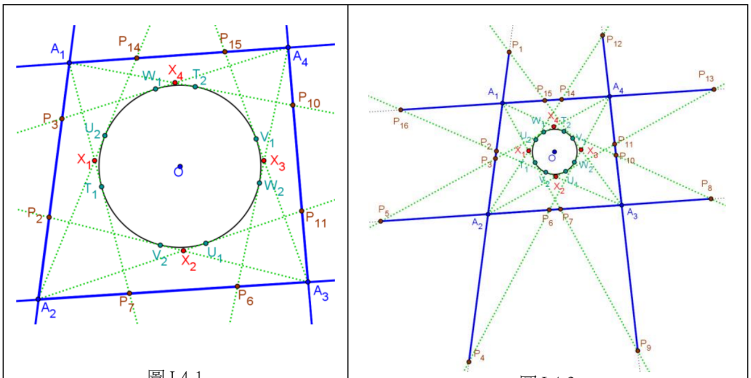

圖 L4-1　圖 L4-2

證明. 我們只證明Γ是圓的情形,Γ是其他圓錐曲線的證明方法類似。我們將用兩種方法來證明,詳述如下。

方法一:解析幾何法(或說坐標幾何法)

論證過程中大抵是求切線方程式、求兩直線交點、求兩定點所決定的向量與利用二階行列式求三角形面積等,可是論證過程的式子整理到最後變得有點複雜,最後我們只好利用 Maple 13 協助等式的展開,並證明**引理** 4中的四個比值的乘積為 1。

方法二:純幾何法

1.

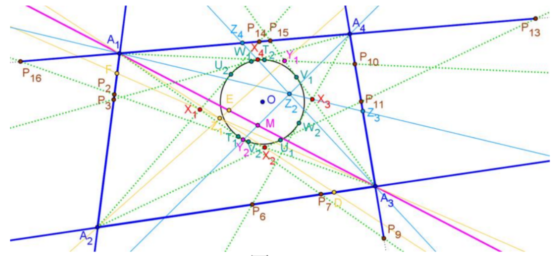

圖 L4-3

如圖 L4-3 ,設$\overleftrightarrow{A_1T_2}$與$\overleftrightarrow{A_3V_1}$相交於點$Y_1$,則在$\triangle A_1A_2A_3$中,因為六邊形$A_1X_1A_2X_2A_3Y_1$之六邊所在直線$\overleftrightarrow{A_1X_1}$、$\overleftrightarrow{X_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2X_2}$、$\overleftrightarrow{X_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3Y_1}$與$\overleftrightarrow{Y_1A_1}$均與圓$\Gamma$相切,所以由**引理** 2與**引理** 3知$\overleftrightarrow{A_1X_2}$、$\overleftrightarrow{A_2Y_1}$與$\overleftrightarrow{A_3X_1}$三直線會共交點或兩兩平行,則仿照**定理** 1之步驟 4 的證法可得

$$\frac{\triangle A_3A_1X_1}{\triangle A_2A_3X_1}\times\frac{\triangle A_1A_2X_2}{\triangle A_3A_1X_2}\times\frac{\triangle A_2A_3Y_1}{\triangle A_1A_2Y_1}=1 \tag{5}$$

2. 我們想要證明

$$\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}=1 \tag{6}$$

上述等式 (5) 與 (6) 相乘即得

$$\frac{\triangle A_3A_1X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_3A_1X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}\times\frac{\triangle A_2A_3Y_1}{\triangle A_1A_2Y_1}=1 \tag{7}$$

所以如果我們可以證明等式 (7) 成立,則可推知等式 (6) 成立。

3. 將等式 (7) 的分子與分母稍微調整做適當分組得

$$\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_1A_2Y_1}\times\frac{\triangle A_2A_3Y_1}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_3A_4X_4}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_1X_1}{\triangle A_3A_1X_2}=1 \tag{8}$$

4. 接下來,將證明等式 (8) 成立。我們先合併等式 (8) 左式的第一個與第二個比值,由三角形面積公式知
$\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_1A_2Y_1}\times\frac{\triangle A_2A_3Y_1}{\triangle A_2A_3X_3}=\frac{\overline{A_1X_4}}{\overline{A_1Y_1}}\times\frac{\overline{A_3Y_1}}{\overline{A_3X_3}}=\frac{\triangle A_1A_3X_4}{\triangle A_1A_3Y_1}\times\frac{\triangle A_3A_1Y_1}{\triangle A_3A_1X_3}=\frac{\triangle A_1A_3X_4}{\triangle A_3A_1X_3}$,
所以 (8) 的左式 $=\frac{\triangle A_1A_3X_4}{\triangle A_3A_1X_3}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_3A_4X_4}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_1X_1}{\triangle A_3A_1X_2}$
$=\left(\frac{\triangle A_1A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_3X_2}\right)\times\left(\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_1A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_3X_4}{\triangle A_3A_4X_4}\right)$

5. 如圖 L4-3,假設$\overleftrightarrow{A_1T_1}$與$\overleftrightarrow{A_3V_2}$相交於點$Y_2$,因為六邊形$A_3X_3A_4X_4A_1Y_2$之六邊所在直線$\overleftrightarrow{A_3X_3}$、$\overleftrightarrow{X_3A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4X_4}$、$\overleftrightarrow{X_4A_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_1Y_2}$與$\overleftrightarrow{Y_2A_3}$均與圓$\Gamma$相切,所以由**引理** 2與**引理** 3知$\overleftrightarrow{A_1X_3}$、$\overleftrightarrow{A_4Y_2}$與$\overleftrightarrow{A_3X_4}$三直線會共交點或兩兩平行,則仿照**定理** 1之步驟4的證法可得

$$\frac{\triangle A_3A_4Y_2}{\triangle A_4A_1Y_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_1A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_3X_4}{\triangle A_3A_4X_4}=1 \tag{9}$$

再由上述等式(9)推知$\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_1A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_3X_4}{\triangle A_3A_4X_4}=\frac{\triangle A_4A_1Y_2}{\triangle A_3A_4Y_2}$,代入步驟4中得(8)的左

式$=\left(\frac{\triangle A_1A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_3X_2}\right)\times\left(\frac{\triangle A_4A_1Y_2}{\triangle A_3A_4Y_2}\right)=\frac{\triangle A_4A_1Y_2}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_3A_4Y_2}\times\frac{\triangle A_1A_3X_1}{\triangle A_1A_3X_2}$

$=\frac{\overline{A_1Y_2}}{\overline{A_1X_1}}\times\frac{\overline{A_3X_2}}{\overline{A_3Y_2}}\times\frac{\triangle A_1A_3X_1}{\triangle A_1A_3X_2}=\frac{\overline{A_1Y_2}}{\overline{A_1X_1}}\times\frac{\overline{A_3X_2}}{\overline{A_3Y_2}}\times\frac{\triangle A_1A_3X_1}{\triangle A_1A_3X_2}$

$=\frac{\triangle A_1A_3Y_2}{\triangle A_1A_3X_1}\times\frac{\triangle A_3A_1X_2}{\triangle A_3A_1Y_2}\times\frac{\triangle A_1A_3X_1}{\triangle A_1A_3X_2}=1$

故得證原命題成立。

□

利用**引理** 4之結論,我們可以證明**定理** 1在任意凸(或凹、或交叉)四邊形中的推廣,如下**定理2.**所示。

定理 2. 平面上的『任意凸、凹或交叉四邊形的西瓦共切圓錐曲線定理』

承**引理** 4之前提敘述,則$\prod_{j=1}^{4}\left(\prod_{i=4(j-1)+1}^{4j}\frac{\overline{A_jP_i}}{\overline{P_iA_{j+1}}}\right)=1$(於此,我們視$A_5=A_1$)

證明. 我們只證明Γ是圓的情形,Γ是其他圓錐曲線的證明方法類似。我們將用兩種方法來證明此結果,詳述如下。

方法一:將四邊形$A_1A_2A_3A_4$切割成四個小三角形,利用**定理** 1、再利用三角形面積公式將線段比值轉換成三角形面積比值與**引理** 4之結果。

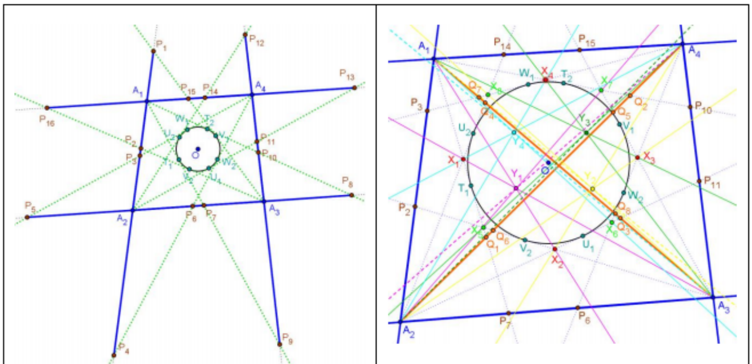

圖 T2-1　圖 T2-2

1. 連接四邊形$A_1A_2A_3A_4$的兩條對角線$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4}$,假設直線$\overleftrightarrow{A_1T_1}$,$\overleftrightarrow{A_1T_2}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_4}$於$Q_1$,$Q_2$,直線$A_2U_1$,$A_2U_2$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$Q_3$,$Q_4$,直線$\overleftrightarrow{A_3V_1}$,$\overleftrightarrow{A_3V_2}$分別交$\overleftrightarrow{A_2A_4}$於$Q_5$,$Q_6$,直線$\overleftrightarrow{A_4W_1}$,$\overleftrightarrow{A_4W_2}$分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$Q_7$,$Q_8$,如圖 T2-2 所示。

2. 在$\triangle A_1A_2A_3$中,考慮六邊形$A_1X_1A_2X_2A_3X_7$,因為線段$\overline{A_1X_1}$、$\overline{X_1A_2}$、$\overline{A_2X_2}$與$\overline{X_2A_3}$的延長線與圓Γ相切於點T_1、U_2、U_1與V_2,直線$\overleftrightarrow{A_3X_7}$與$\overleftrightarrow{X_7A_1}$分別與圓Γ相切於點$V_1$與$T_2$,故由**定理** 1知

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_7}}{\overline{P_7A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_8}}{\overline{P_8A_3}}\times\frac{\overline{A_3Q_3}}{\overline{Q_3A_1}}\times\frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{Q_4A_1}}=1 \tag{10}$$

3. 同2之法,在$\triangle A_2A_3A_4$中,考慮六邊形$A_2X_2A_3X_3A_4X_8$,由**定理** 1知

$$\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{11}}}{\overline{P_{11}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{12}}}{\overline{P_{12}A_4}}\times\frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{Q_5A_2}}\times\frac{\overline{A_4Q_6}}{\overline{Q_6A_2}}=1 \tag{11}$$

4. 同2之法,在$\triangle A_3A_4A_1$中,考慮六邊形$A_3X_3A_4X_4A_1X_5$,由**定理 1**知

$$\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_{16}}}{\overline{P_{16}A_1}}\times\frac{\overline{A_1Q_7}}{\overline{Q_7A_3}}\times\frac{\overline{A_1Q_8}}{\overline{Q_8A_3}}=1 \tag{12}$$

5. 同2之法,在$\triangle A_4A_1A_2$中,考慮六邊形$A_4X_4A_1X_1A_2X_6$,由**定理 1**知

$$\frac{\overline{A_4P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_4}}{\overline{P_4A_2}}\times\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1A_4}}\times\frac{\overline{A_2Q_2}}{\overline{Q_2A_4}}=1 \tag{13}$$

6. 由上述(10)×(11)×(12)×(13)得$\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{\overline{A_1P_i}}{\overline{P_iA_2}}\right)\times\left(\prod_{i=5}^{8}\frac{\overline{A_2P_i}}{\overline{P_iA_3}}\right)\times\left(\prod_{i=9}^{12}\frac{\overline{A_3P_i}}{\overline{P_iA_4}}\right)\times\left(\prod_{i=13}^{16}\frac{\overline{A_4P_i}}{\overline{P_iA_1}}\right)\times$ $\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1A_4}}\times\frac{\overline{A_2Q_2}}{\overline{Q_2A_4}}\times\frac{\overline{A_3Q_3}}{\overline{Q_3A_1}}\times\frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{Q_4A_1}}\times\frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{Q_5A_2}}\times\frac{\overline{A_4Q_6}}{\overline{Q_6A_2}}\times\frac{\overline{A_1Q_7}}{\overline{Q_7A_3}}\times\frac{\overline{A_1Q_8}}{\overline{Q_8A_3}}=1$
   所以如果我們可以證明$\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1A_4}}\times\frac{\overline{A_2Q_2}}{\overline{Q_2A_4}}\times\frac{\overline{A_3Q_3}}{\overline{Q_3A_1}}\times\frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{Q_4A_1}}\times\frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{Q_5A_2}}\times\frac{\overline{A_4Q_6}}{\overline{Q_6A_2}}\times\frac{\overline{A_1Q_7}}{\overline{Q_7A_3}}\times$ $\frac{\overline{A_1Q_8}}{\overline{Q_8A_3}}=1$,則可得證$\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{\overline{A_1P_i}}{\overline{P_iA_2}}\right)\times\left(\prod_{i=5}^{8}\frac{\overline{A_2P_i}}{\overline{P_iA_3}}\right)\times\left(\prod_{i=9}^{12}\frac{\overline{A_3P_i}}{\overline{P_iA_4}}\right)\times\left(\prod_{i=13}^{16}\frac{\overline{A_4P_i}}{\overline{P_iA_1}}\right)=1$。

7. 欲證明$\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1A_4}}\times\frac{\overline{A_2Q_2}}{\overline{Q_2A_4}}\times\frac{\overline{A_3Q_3}}{\overline{Q_3A_1}}\times\frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{Q_4A_1}}\times\frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{Q_5A_2}}\times\frac{\overline{A_4Q_6}}{\overline{Q_6A_2}}\times\frac{\overline{A_1Q_7}}{\overline{Q_7A_3}}\times\frac{\overline{A_1Q_8}}{\overline{Q_8A_3}}=1$,詳述如下:
   由三角形面積公式知,$\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1A_4}}=\frac{\triangle A_1A_2X_1}{\triangle A_4A_1X_1}$;$\frac{\overline{A_2Q_2}}{\overline{Q_2A_4}}=\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_4A_1X_4}$;$\frac{\overline{A_3Q_3}}{\overline{Q_3A_1}}=\frac{\triangle A_2A_3X_2}{\triangle A_1A_2X_2}$
   $\frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{Q_4A_1}}=\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_1A_2X_1}$;$\frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{Q_5A_2}}=\frac{\triangle A_3A_4X_3}{\triangle A_2A_3X_3}$;$\frac{\overline{A_4Q_6}}{\overline{Q_6A_2}}=\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_2A_3X_2}$;$\frac{\overline{A_1Q_7}}{\overline{Q_7A_3}}=\frac{\triangle A_4A_1X_4}{\triangle A_3A_4X_4}$
   $\frac{\overline{A_1Q_8}}{\overline{Q_8A_3}}=\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_3A_4X_3}$,所以
   $\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1A_4}}\times\frac{\overline{A_2Q_2}}{\overline{Q_2A_4}}\times\frac{\overline{A_3Q_3}}{\overline{Q_3A_1}}\times\frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{Q_4A_1}}\times\frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{Q_5A_2}}\times\frac{\overline{A_4Q_6}}{\overline{Q_6A_2}}\times\frac{\overline{A_1Q_7}}{\overline{Q_7A_3}}\times\frac{\overline{A_1Q_8}}{\overline{Q_8A_3}}$
   $=\frac{\triangle A_1A_2X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_4A_1X_4}\times\frac{\triangle A_2A_3X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_1A_2X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_2A_3X_2}\times$ $\frac{\triangle A_4A_1X_4}{\triangle A_3A_4X_4}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_3A_4X_3}$
   $=\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}$

8. 再由**引理 4**得知,$\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}=1$,故得證原命題成立。

方法二:從四邊形$A_1A_2A_3A_4$的四個頂點分別對八條切線$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\overleftrightarrow{A_2U_1}$、$\overleftrightarrow{A_2U_2}$、$\overleftrightarrow{A_3V_1}$、$\overleftrightarrow{A_3V_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_4W_1}$與$\overleftrightarrow{A_4W_2}$作垂直線(作高),再將原題中之線段比值轉換成與所作的高有關的線段比值,消去部分項之後,再將剩下之線段比值適當分組,然後各自轉換成三角形面積比值,再消去部分的項,進而利用**引理 4**之結果得證原命題。

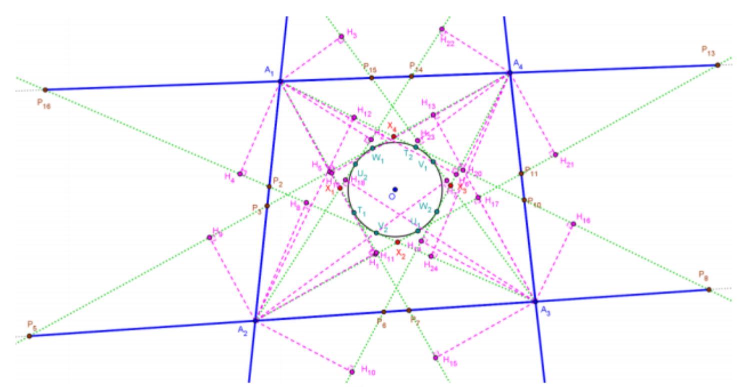

圖 T2-3

如上圖 T2-3 所示,

1. 自點A_1分別對六條切線$\overleftrightarrow{A_2U_1}$、$\overleftrightarrow{A_2U_2}$、$\overleftrightarrow{A_3V_1}$、$\overleftrightarrow{A_3V_2}$、$\overleftrightarrow{A_4W_1}$與$\overleftrightarrow{A_4W_2}$作垂直線(作高)$\overleftrightarrow{A_1H_1}$、$\overleftrightarrow{A_1H_2}$、$\overleftrightarrow{A_1H_3}$、$\overleftrightarrow{A_1H_4}$、$\overleftrightarrow{A_1H_5}$與$\overleftrightarrow{A_1H_6}$,且此六條直線$\overleftrightarrow{A_1H_1}$、$\overleftrightarrow{A_1H_2}$、$\overleftrightarrow{A_1H_3}$、$\overleftrightarrow{A_1H_4}$、$\overleftrightarrow{A_1H_5}$與$\overleftrightarrow{A_1H_6}$分別與六條切線$\overleftrightarrow{A_2U_1}$、$\overleftrightarrow{A_2U_2}$、$\overleftrightarrow{A_3V_1}$、$\overleftrightarrow{A_3V_2}$、$\overleftrightarrow{A_4W_1}$與$\overleftrightarrow{A_4W_2}$相交於$H_1$、$H_2$、$H_3$ 、H_4、H_5與H_6等六個點;
   自點A_2分別對六條切線$\overleftrightarrow{A_3V_1}$、$\overleftrightarrow{A_3V_2}$、$\overleftrightarrow{A_4W_1}$、$\overleftrightarrow{A_4W_2}$、$\overleftrightarrow{A_1T_1}$與$\overleftrightarrow{A_1T_2}$作垂直線(作高)$\overleftrightarrow{A_2H_7}$、$\overleftrightarrow{A_2H_8}$、$\overleftrightarrow{A_2H_9}$、$\overleftrightarrow{A_2H_{10}}$、$\overleftrightarrow{A_2H_{11}}$與$\overleftrightarrow{A_2H_{12}}$,且此六條直線$\overleftrightarrow{A_2H_7}$、$\overleftrightarrow{A_2H_8}$、$\overleftrightarrow{A_2H_9}$、$\overleftrightarrow{A_2H_{10}}$、$\overleftrightarrow{A_2H_{11}}$與$\overleftrightarrow{A_2H_{12}}$分別與六條切線$\overleftrightarrow{A_3V_1}$、$\overleftrightarrow{A_3V_2}$、$\overleftrightarrow{A_4W_1}$、$\overleftrightarrow{A_4W_2}$、$\overleftrightarrow{A_1T_1}$與$\overleftrightarrow{A_1T_2}$相交於$H_7$、$H_8$、$H_9$ 、H_{10}、H_{11}與H_{12}等六個點;
   自點A_3分別對六條切線$\overleftrightarrow{A_4W_1}$、$\overleftrightarrow{A_4W_2}$、$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\overleftrightarrow{A_2U_1}$與$\overleftrightarrow{A_2U_2}$作垂直線(作高)$\overleftrightarrow{A_3H_{13}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{14}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{15}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{16}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{17}}$與$\overleftrightarrow{A_3H_{18}}$,且此六條直線$\overleftrightarrow{A_3H_{13}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{14}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{15}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{16}}$、$\overleftrightarrow{A_3H_{17}}$與$\overleftrightarrow{A_3H_{18}}$分別與六條切線$\overleftrightarrow{A_4W_1}$、$\overleftrightarrow{A_4W_2}$、$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\overleftrightarrow{A_2U_1}$與$\overleftrightarrow{A_2U_2}$相交於$H_{13}$、$H_{14}$、$H_{15}$ 、H_{16}、H_{17}與H_{18}等六個點;
   自點A_4分別對六條切線$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\overleftrightarrow{A_2U_1}$、$\overleftrightarrow{A_2U_2}$、$\overleftrightarrow{A_3V_1}$與$\overleftrightarrow{A_3V_2}$作垂直線(作高)$\overleftrightarrow{A_4H_{19}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{20}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{21}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{22}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{23}}$與$\overleftrightarrow{A_4H_{24}}$,且此六條直線$\overleftrightarrow{A_4H_{19}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{20}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{21}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{22}}$、$\overleftrightarrow{A_4H_{23}}$與$\overleftrightarrow{A_4H_{24}}$分別與六條切線$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\overleftrightarrow{A_2U_1}$、$\overleftrightarrow{A_2U_2}$、$\overleftrightarrow{A_3V_1}$與$\overleftrightarrow{A_3V_2}$相交於$H_{19}$、$H_{20}$、$H_{21}$ 、H_{22}、H_{23}與H_{24}等六個點;

2. 接下來利用三角形相似性質,將原題中各個線段比值轉換成與所作的高有關的線段比值,詳述如下:
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\frac{\overline{A_1H_3}}{\overline{A_2H_7}},\ \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}=\frac{\overline{A_1H_4}}{\overline{A_2H_8}},\ \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}=\frac{\overline{A_1H_5}}{\overline{A_2H_9}},\ \frac{\overline{A_1P_4}}{\overline{P_4A_2}}=\frac{\overline{A_1H_6}}{\overline{A_2H_{10}}};$$
$$\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}=\frac{\overline{A_2H_9}}{\overline{A_3H_{13}}},\ \frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}=\frac{\overline{A_2H_{10}}}{\overline{A_3H_{14}}},\ \frac{\overline{A_2P_7}}{\overline{P_7A_3}}=\frac{\overline{A_2H_{11}}}{\overline{A_3H_{15}}},\ \frac{\overline{A_2P_8}}{\overline{P_8A_3}}=\frac{\overline{A_2H_{12}}}{\overline{A_3H_{16}}};$$
$$\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}=\frac{\overline{A_3H_{15}}}{\overline{A_4H_{19}}},\ \frac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_4}}=\frac{\overline{A_3H_{16}}}{\overline{A_4H_{20}}},\ \frac{\overline{A_3P_{11}}}{\overline{P_{11}A_4}}=\frac{\overline{A_3H_{17}}}{\overline{A_4H_{21}}},\ \frac{\overline{A_3P_{12}}}{\overline{P_{12}A_4}}=\frac{\overline{A_3H_{18}}}{\overline{A_4H_2}};$$
$$\frac{\overline{A_4P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}=\frac{\overline{A_4H_{21}}}{\overline{A_1H_1}},\ \frac{\overline{A_4P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}=\frac{\overline{A_4H_{22}}}{\overline{A_1H_2}},\ \frac{\overline{A_4P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=\frac{\overline{A_4H_{23}}}{\overline{A_1H_3}},\ \frac{\overline{A_4P_{16}}}{\overline{P_{16}A_1}}=\frac{\overline{A_4H_{24}}}{\overline{A_1H_4}};$$

3. 將上述步驟2中的16個等式相乘即得
$$\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{\overline{A_1P_i}}{\overline{P_iA_2}}\right)\times\left(\prod_{i=5}^{8}\frac{\overline{A_2P_i}}{\overline{P_iA_3}}\right)\times\left(\prod_{i=9}^{12}\frac{\overline{A_3P_i}}{\overline{P_iA_4}}\right)\times\left(\prod_{i=13}^{16}\frac{\overline{A_4P_i}}{\overline{P_iA_1}}\right)$$
$$=\left(\frac{\overline{A_1H_3}}{\overline{A_2H_7}}\times\frac{\overline{A_1H_4}}{\overline{A_2H_8}}\times\frac{\overline{A_1H_5}}{\overline{A_2H_9}}\times\frac{\overline{A_1H_6}}{\overline{A_2H_{10}}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2H_9}}{\overline{A_3H_{13}}}\times\frac{\overline{A_2H_{10}}}{\overline{A_3H_{14}}}\times\frac{\overline{A_2H_{11}}}{\overline{A_3H_{15}}}\times\frac{\overline{A_2H_{12}}}{\overline{A_3H_{16}}}\right)\times$$

$$(\frac{\overline{A_3H_{15}}}{\overline{A_4H_{19}}}\times\frac{\overline{A_3H_{16}}}{\overline{A_4H_{20}}}\times\frac{\overline{A_3H_{17}}}{\overline{A_4H_{21}}}\times\frac{\overline{A_3H_{18}}}{\overline{A_4H_{22}}})\times(\frac{\overline{A_4H_{21}}}{\overline{A_1H_1}}\times\frac{\overline{A_4H_{22}}}{\overline{A_1H_2}}\times\frac{\overline{A_4H_{23}}}{\overline{A_1H_3}}\times\frac{\overline{A_4H_{24}}}{\overline{A_1H_4}})$$

$$=(\frac{1}{\overline{A_2H_7}}\times\frac{1}{\overline{A_2H_8}}\times\frac{\overline{A_1H_5}}{1}\times\frac{\overline{A_1H_6}}{1})\times(\frac{1}{\overline{A_3H_{13}}}\times\frac{1}{\overline{A_3H_{14}}}\times\frac{\overline{A_2H_{11}}}{1}\times\frac{\overline{A_2H_{12}}}{1})\times$$
$$(\frac{1}{\overline{A_4H_{19}}}\times\frac{1}{\overline{A_4H_{20}}}\times\frac{\overline{A_3H_{17}}}{1}\times\frac{\overline{A_3H_{18}}}{1})\times(\frac{1}{\overline{A_1H_1}}\times\frac{1}{\overline{A_1H_2}}\times\frac{\overline{A_4H_{23}}}{1}\times\frac{\overline{A_4H_{24}}}{1})$$
$$=(\frac{\overline{A_1H_5}}{\overline{A_3H_{13}}}\times\frac{\overline{A_1H_6}}{\overline{A_3H_{14}}})\times(\frac{\overline{A_2H_{11}}}{\overline{A_4H_{19}}}\times\frac{\overline{A_2H_{12}}}{\overline{A_4H_{20}}})\times(\frac{\overline{A_3H_{17}}}{\overline{A_1H_1}}\times\frac{\overline{A_3H_{18}}}{\overline{A_1H_2}})\times(\frac{\overline{A_4H_{23}}}{\overline{A_2H_7}}\times\frac{\overline{A_4H_{24}}}{\overline{A_2H_8}})$$
$$=(\frac{\triangle A_1A_4X_4}{\triangle A_3A_4X_4}\times\frac{\triangle A_1A_4X_3}{\triangle A_3A_4X_3})\times(\frac{\triangle A_2A_1X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_2A_1X_4}{\triangle A_4A_1X_4})\times$$
$$(\frac{\triangle A_3A_2X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_3A_2X_1}{\triangle A_1A_2X_1})\times(\frac{\triangle A_4A_3X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_4A_3X_2}{\triangle A_2A_3X_2})$$
$$=(\frac{1}{\triangle A_3A_4X_4}\times\frac{\triangle A_1A_4X_3}{1})\times(\frac{1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_2A_1X_4}{1})\times$$
$$(\frac{1}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_3A_2X_1}{1})\times(\frac{1}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_4A_3X_2}{1})$$
$$=\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}$$

再由**引理 4**之結果得知$\frac{\triangle A_2A_3X_1}{\triangle A_4A_1X_1}\times\frac{\triangle A_3A_4X_2}{\triangle A_1A_2X_2}\times\frac{\triangle A_4A_1X_3}{\triangle A_2A_3X_3}\times\frac{\triangle A_1A_2X_4}{\triangle A_3A_4X_4}=1$，所以
$\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{\overline{A_1P_i}}{\overline{P_iA_2}}\right)\times\left(\prod_{i=5}^{8}\frac{\overline{A_2P_i}}{\overline{P_iA_3}}\right)\times\left(\prod_{i=9}^{12}\frac{\overline{A_3P_i}}{\overline{P_iA_4}}\right)\times\left(\prod_{i=13}^{16}\frac{\overline{A_4P_i}}{\overline{P_iA_1}}\right)=1$，故得證原命題成立。

□

為了推廣**定理 2**到任意凸(或凹、或交叉)多邊形中,我們嘗試先將**引理 4**的結果推廣到任意凸(或凹、或交叉)多邊形中,如下**定理3**所示。

定理 3. 平面上的『任意凸、凹或交叉n邊形共切定圓錐曲線之相鄰切線交點與頂點連構三角形乘積定理』 給定平面上一個凸(或凹、或交叉)$n(n\geq 3)$邊形$A_1A_2\cdots A_n$,及一圓錐曲線Γ,滿足下列條件,

1. $\forall i\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$,自$A_i$點作$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{A_iT_{2i-1}},\overleftrightarrow{A_iT_{2i}}$,其中切線$\overleftrightarrow{A_iT_{2i-1}}$以$A_i$點為旋轉中心逆時針旋轉一角度$\theta_i(30^\circ<\theta_i<180^\circ)$可得另一切線$\overleftrightarrow{A_iT_{2i}}$,共對$\Gamma$作$2n$條切線。
2. $\overleftrightarrow{A_3T_5}$、$\overleftrightarrow{A_3T_6}$、$\overleftrightarrow{A_4T_7}$、$\overleftrightarrow{A_4T_8}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n-1}}$、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n}}$分別與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$\cdots$、$P_{2n-5}$、$P_{2n-4}$，切線$\overleftrightarrow{A_4T_7}$、$\overleftrightarrow{A_4T_8}$、$\overleftrightarrow{A_5T_9}$、$\overleftrightarrow{A_5T_{10}}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n-1}}$、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n}}$、$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_2T_2}$分別與$\overleftrightarrow{A_2T_3}$交於$P_{1+(2n-4)}$、$P_{2+(2n-4)}$、$P_{3+(2n-4)}$、$P_{4+(2n-4)}$、$\cdots$、$P_{(2n-5)+(2n-4)}$、$P_{2(2n-4)}$，$\cdots$，切線$\overleftrightarrow{A_{k+2}T_{2(k+2)-1}}$、$\overleftrightarrow{A_{k+2}T_{2(k+2)}}$、$\overleftrightarrow{A_{k+3}T_{2(k+3)-1}}$、$\overleftrightarrow{A_{k+3}T_{2(k+3)}}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n-1}}$、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n}}$、$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_{k-1}T_{2(k-1)-1}}$、$\overleftrightarrow{A_{k-1}T_{2(k-1)}}$分別與$\overleftrightarrow{A_kA_{k+1}}$交於$P_{1+(k-1)(2n-4)}$、$P_{2+(k-1)(2n-4)}$、$P_{3+(k-1)(2n-4)}$、$P_{4+(k-1)(2n-4)}$、$\cdots$、$P_{(2n-5)+(k-1)(2n-4)}$、$P_{k(2n-4)}$，$\cdots$，切線$\overleftrightarrow{A_2T_3}$、$\overleftrightarrow{A_2T_4}$、$\overleftrightarrow{A_3T_5}$、$\overleftrightarrow{A_3T_6}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_{n-1}T_{2n-3}}$、$\overleftrightarrow{A_{n-1}T_{2n-2}}$、分別與$\overleftrightarrow{A_nA_1}$交於$P_{1+(n-1)(2n-4)}$、$P_{2+(n-1)(2n-4)}$、$P_{3+(n-1)(2n-4)}$、$P_{4+(n-1)(2n-4)}$、$\cdots$、$P_{(2n-5)+(n-1)(2n-4)}$、$P_{n(2n-4)}$，共產生$n(2n-4)$個交點。
3. $\forall i\in\{1,2,3,\cdots,n(2n-4)-1,n(2n-4)\}$，$P_i$均存在,且$P_i$均不與頂點$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_{n-1}$及$A_n$重疊。

4. $\forall i \in \{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，$\overleftrightarrow{A_iT_{2i-1}}$與$\overleftrightarrow{A_{i+1}T_{2(i+1)}}$相交於$X_i$點,於此,我們視$A_{n+1}=A_1$且$T_{2n+2}=T_2$。則$\prod_{i=1}^{n}\frac{\triangle A_{i-1}A_iX_i}{\triangle A_{i+1}A_{i+2}X_i}=1$(於此,我們視$A_0=A_n$、$A_{n+1}=A_1$且$A_{n+2}=A_2$)。

證明. 仿**引理** 4之方法二的純幾何證法,並利用數學歸納法可得證原命題成立。 □

針對任意凸(或凹、或交叉)n邊形,我們有如**定理** 3的結果,但是我們心中還是存在了些許的不滿足,因為心想難道只有**定理** 3提及的那n個比值乘積為1嗎?仔細的思考後,我們又發現了另外$(n-2)$組『n個比值乘積為1』的結果,如下**定理4**所示。

定理 4. 平面上的『任意凸、凹或交叉n邊形共切定圓錐曲線之固定間隔切線交點與頂點連構三角形乘積定理』
承**定理** *3*之條件描述,則下列結果成立,

給定$k \in \{2,3,4,\cdots,n-1\}$，

若$\overleftrightarrow{A_1T_1}$與$\overleftrightarrow{A_{k+1}T_{2k+1}}$相交於$Y_{k,1}$點、$\overleftrightarrow{A_2T_3}$與$\overleftrightarrow{A_{k+2}T_{2k+4}}$相交於$Y_{k,2}$點、$\overleftrightarrow{A_3T_5}$與$\overleftrightarrow{A_{k+3}T_{2k+6}}$相交於$Y_{k,3}$點、…、$\overleftrightarrow{A_{n-1}T_{2n-3}}$、$\overleftrightarrow{A_{k+n-1}T_{2k+2n-2}}$相交於$Y_{k,n-1}$點、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n-1}}$與$\overleftrightarrow{A_{k+n}T_{2k+2n}}$相交於$Y_{k,n}$點,則$\prod_{i=1}^{n}\frac{\triangle A_{i+k}A_{i+2k}Y_{k,i}}{\triangle A_{i-k}A_iY_{k,i}}=1$(於此視$A_{-j}=A_{n-j}$，$A_{n+j}=A_j$，$\forall j \in \{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$)

證明. 利用**定理** 3可得證原命題成立。 □

有了**定理** 2為**定理** 1在任意凸(或凹、或交叉)四邊形之推論後,我們很自然地想將**定理** 1』推廣到任意凸(或凹、或交叉)n邊形中,在經過諸多的思考之後,我們利用『數學歸納法』並試著模仿**定理** 2之論證方法,成功地將**定理** 1推廣到任意凸(或凹、或交叉)n邊形中,如下**定理5**所示。

定理 5. 平面上的『任意凸、凹或交叉n邊形的西瓦共切圓錐曲線定理』
給定平面上一個凸(或凹或交叉)$n(n\geq 3)$邊形$A_1A_2\cdots A_n$,及一圓錐曲線Γ,承**定理** *3*之前提描述,則$\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=(j-1)\times 2(n-2)+1}^{j\times 2(n-2)}\frac{\overline{A_jP_i}}{\overline{P_iA_{j+1}}}\right)=1$(於此,我們視$A_{n+1}=A_1$)。

證明. 我們將採用**兩種方法**證明,如下之『方法一』與『方法二』所示,其中我們發現『方法二』比『方法一』簡潔許多。
方法一:仿**定理** 2之證明方法一,將$n(m\geq 3)$邊形$A_1A_2\cdots A_n$切割成n個$(n-1)$邊形,利用數學歸納法,再利用三角面積公式將線段比值轉換成三角形面積比值與**定理** 4之結果即可得證原命題成立。
方法二:仿**定理** 2之證明方法二,從$n(n\geq 3)$邊形$A_1A_2\cdots A_n$的n個頂點分別對$2n$條切線$\overleftrightarrow{A_1T_1}$、$\overleftrightarrow{A_1T_2}$、$\overleftrightarrow{A_2T_3}$、$\overleftrightarrow{A_2T_4}$、$\overleftrightarrow{A_3T_5}$、$\overleftrightarrow{A_3T_6}$、…、$\overleftrightarrow{A_nT_{2n-1}}$、與$\overleftrightarrow{A_nT_{2n}}$作垂直線(作高),再將原題中之線段比值轉換成與所作的高有關的線段比值,消去部分項之後,再將剩下之線段比值適當分組,然後各自轉換成三角形面積比值,再消去部分的項,進而利用**定理** 3之結果可得證原命題。 □

(二)、任意凸、凹或交叉多邊形的孟氏共圓錐曲線定理

完成『西瓦定理』的推廣—『任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共切圓錐曲線定理』後,我們不禁想著『孟氏定理』是不是也應該有類似的推論,果不其然,我們也有一些發現,為了方便起見,我們將之命名為『任意凸、凹或交叉多邊形的孟氏共圓錐曲線定理』,詳述如下。

引理 5. 孟氏定理*(Menelaus' Theorem)*
假設平面上有一$\triangle ABC$,又D、E與F分別為$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$與$\overleftrightarrow{AB}$上一點,滿足D、E與F三點共線,且D、E與F三點不與三角形ABC三頂點重合,如下圖*L8-1*,則$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$

證明. 詳見參考資料[1]附錄中之證明。 □

引理 6. 帕斯卡定理*(Pascal's Theorem)*
平面上,若圓錐曲線Γ的內接六邊形$ABCDEF$的邊$\overline{AB}$與$\overline{DE}$的延長線交於點G,邊$\overline{BC}$與$\overline{EF}$的延長線交於點H,邊$\overline{CD}$與$\overline{FA}$的延長線交於點K,則G、H與K三點共線。

『孟氏定理』是一個年代久遠的平面幾何上的重要結果,我們發現如果將**引理** 5前提敘述中的『D、E與F三點共直線的直線』換成『六點共圓錐曲線,且該六點分別落在三角形三邊所在直線上,又每條直線上各有兩點』,則經過實驗並且驗證得如下**定理6**的結果。

定理 6. 平面上的『三角形的孟氏共圓錐曲線定理』
假設平面上有一三角形ABC與一圓錐曲線Γ,又圓錐曲線Γ與直線$\overleftrightarrow{BC}$分別相交於D_1與D_2兩點,圓錐曲線Γ與直線$\overleftrightarrow{CA}$分別相交於E_1與E_2兩點,圓錐曲線Γ與直線$\overleftrightarrow{AB}$分別相交於F_1與F_2兩點,則,且D_1、D_2 、E_1、E_2 、F_1與F_2六點均不與三角形ABC三頂點重合,則$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} \times \dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \times \dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} \times \dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \times \dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \times \dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}} = 1$。

證明. Γ為圓之情形可利用三角形的相似性質證明之,可參考**定理7**之證法。於此我們僅考慮Γ為拋物線之情形,如下圖 T6-1所示,Γ為橢圓與雙曲線之情形的證明方法類似,我們將使用『純幾何法』與『射影幾何法』兩種方法證明之。

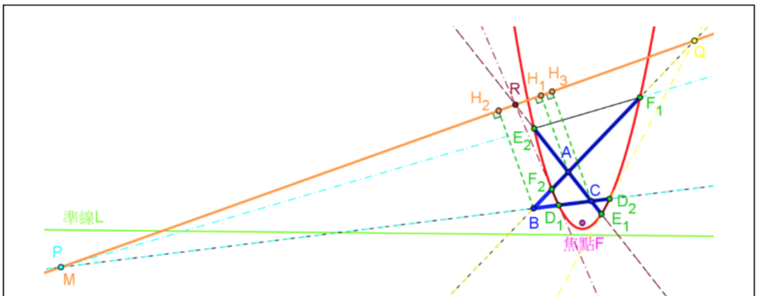

圖 T6-1

法(一):純幾何法
如上圖 T6-1,我們將引用**引理** 6 **帕斯卡定理**及**『將線段比值與三角形面積比值做適當的互換』**等工具與方法來證明,詳述如下:

1. 考慮拋物線Γ的內接六邊形$D_1D_2E_1E_2F_1F_2$,又若$\overline{D_1D_2}$與$\overline{E_1F_2}$的延長線交於點P,$\overline{D_2E_1}$與$\overline{F_1F_2}$的延長線交於點Q,$\overline{E_1E_2}$與$\overline{F_2D_1}$的延長線交於點R,則由**引理** 6知P、Q與R三點共線,將此直線命名為M 。

2. 過A點做直線$\overleftrightarrow{AH_1}$垂直直線$M$且交直線$M$於$H_1$點,
過B點做直線$\overleftrightarrow{BH_2}$垂直直線$M$且交直線$M$於$H_2$點,
過C點做直線$\overleftrightarrow{CH_3}$垂直直線$M$且交直線$M$於$H_3$點,

3. $$\begin{aligned}&\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} \times \frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \times \frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} \times \frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \times \frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \times \frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\\ &= \frac{\triangle AF_1P}{\triangle BF_1P} \times \frac{\triangle AD_1R}{\triangle BD_1R} \times \frac{\triangle BD_1R}{\triangle CD_1R} \times \frac{\triangle BE_1Q}{\triangle CE_1Q} \times \frac{\triangle CE_1Q}{\triangle AE_1Q} \times \frac{\triangle CF_1P}{\triangle AF_1P}\\ &= \frac{1}{\triangle BF_1P} \times \frac{\triangle AD_1R}{1} \times \frac{1}{\triangle CD_1R} \times \frac{\triangle BE_1Q}{1} \times \frac{1}{\triangle AE_1Q} \times \frac{\triangle CF_1P}{1}\end{aligned}$$

$$= \frac{\triangle AD_1R}{\triangle CD_1R} \times \frac{\triangle BE_1Q}{\triangle AE_1Q} \times \frac{\triangle CF_1P}{\triangle BF_1P} = \frac{\overline{AR}}{\overline{CR}} \times \frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{AH_1}}{\overline{CH_3}} \times \frac{\overline{BH_2}}{\overline{AH_1}} \times \frac{\overline{CH_3}}{\overline{BH_2}} = 1$$

,故得證原命題成立。

法(二):射影幾何法

1. 承法(一)的步驟1,並由**引理 6**知P、Q與R三點共線,再由孟氏定理可知

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \times \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \times \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1 \tag{14}$$

2. 承法(一)的步驟1知D_2、E_1、Q三點共線,所以由孟氏定理知

$$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \times \frac{\overrightarrow{BD_2}}{\overrightarrow{D_2C}} \times \frac{\overrightarrow{CE_1}}{\overrightarrow{E_1A}} = -1 \tag{15}$$

3. 承法(一)的步驟1知E_2、F_1、P三點共線,所以由孟氏定理知

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \times \frac{\overrightarrow{CE_2}}{\overrightarrow{E_2A}} \times \frac{\overrightarrow{AF_1}}{\overrightarrow{F_1B}} = -1 \tag{16}$$

4. 承法(一)的步驟1知F_1、D_1、R三點共線,所以由孟氏定理知

$$\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} \times \frac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2B}} \times \frac{\overrightarrow{BD_1}}{\overrightarrow{D_1C}} = -1 \tag{17}$$

5. 由$\dfrac{(15)\times(16)\times(17)}{(14)}$得

$$\frac{\frac{\overrightarrow{AF_1}}{\overrightarrow{F_1B}} \times \frac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2B}} \times \frac{\overrightarrow{BD_1}}{\overrightarrow{D_1C}} \times \frac{\overrightarrow{BD_2}}{\overrightarrow{D_2C}} \times \frac{\overrightarrow{CE_1}}{\overrightarrow{E_1A}} \times \frac{\overrightarrow{CE_2}}{\overrightarrow{E_2A}} \times \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \times \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \times \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}}{\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} \times \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \times \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}} = \frac{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}{(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AF_1}}{\overrightarrow{F_1B}} \times \frac{\overrightarrow{AF_2}}{\overrightarrow{F_2B}} \times \frac{\overrightarrow{BD_1}}{\overrightarrow{D_1C}} \times \frac{\overrightarrow{BD_2}}{\overrightarrow{D_2C}} \times \frac{\overrightarrow{CE_1}}{\overrightarrow{E_1A}} \times \frac{\overrightarrow{CE_2}}{\overrightarrow{E_2A}} = 1$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\right) \times \frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \times \left(-\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\right) \times \frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \times \left(-\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\right) \times \left(-\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} \times \frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \times \frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} \times \frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \times \frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \times \frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}} = 1$$
,故得證原命題成立。

□

我們試著將**定理 6**中的『三角形』換成『任意凸(或凹或交叉)n邊形』,發現會有類似的結果,詳述如下之『定理七』。

定理 7. 平面上的『任意凸、凹或交叉n邊形的孟氏共圓錐曲線定理』 假設平面上有一個凸(或凹或交叉)n邊形$A_1A_2\ldots A_n$與一圓錐曲線Γ,又$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$,$\Gamma$與直線$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$分別相交於$P_{2i-1}$與$P_{2i}$兩點,共產生$2n$個交點且$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$dots$、$P_{2n-1}$與$P_{2n}$等$2n$個交點均不與$n$邊形$A_1A_2\ldots A_n$之$n$個頂點重合,如圖 *T7-1* 與圖 *T7-2*,則

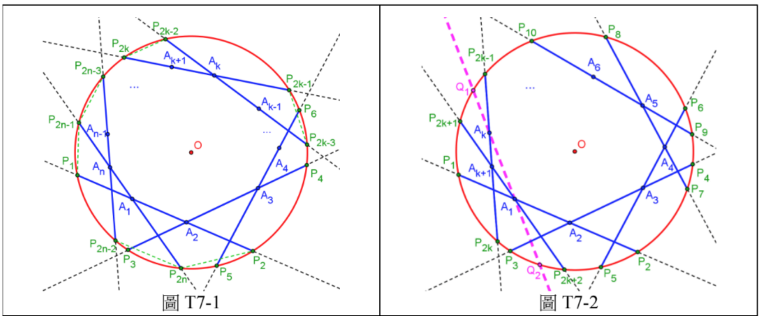

圖 T7-1　　圖 T7-2

證明. 證於此我們只證明Γ是圓的情形,Γ是其他圓錐曲線的情形之證明方法類似,我們將使用兩種方法證明此命題,如下所述。

方法一:利用三角形的相似性質,詳述如下。

如上圖 T7-1 所示,

1. 先考慮與A_1有關係之線段乘積
連接線段$\overline{P_1P_{2n-1}}$與$\overline{P_2P_{2n}}$,因為圓周角$\angle P_1P_{2n-1}P_{2n}$與$\angle P_1P_2P_{2n}$都對應同一個弧P_1P_{2n},所以$\angle P_1P_{2n-1}P_{2n} = \angle P_1P_2P_{2n}$;又對頂角$\angle P_1A_1P_{2n-1}$與$\angle P_2A_1P_{2n}$相等,所以$\triangle P_1A_1P_{2n-1} \sim \triangle P_{2n}A_1P_2$($AA$相似性質),推知$\overline{A_1P_1} : \overline{A_1P_{2n-1}} = \overline{A_1P_{2n}} : \overline{A_1P_2} \Rightarrow \overline{A_1P_1} \times \overline{A_1P_2} = \overline{A_1P_{2n-1}} \times \overline{A_1P_{2n}}$,因此$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{1} \times \dfrac{\overline{A_1P_2}}{1} \times \dfrac{1}{\overline{A_1P_{2n-1}}} \times \dfrac{1}{\overline{A_1P_{2n}}} = 1$,亦即$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{1} \times \dfrac{\overline{A_1P_2}}{1} \times \dfrac{1}{\overline{P_{2n-1}A_1}} \times \dfrac{1}{\overline{P_{2n}A_1}} = 1 \cdots\cdots (1)$

2. 再考慮與A_k有關係之線段乘積,其中$k \in \{2, 3, \ldots, n\}$,
連接線段$\overline{P_{2k-1}P_{2k-3}}$與$\overline{P_{2k-2}P_{2k}}$,因為圓周角$\angle P_{2k-1}P_{2k-3}P_{2k-2}$與$\angle P_{2k-2}P_{2k}P_{2k-1}$都對應同一個弧$P_{2k-1}P_{2k-2}$,所以$\angle P_{2k-1}P_{2k-3}P_{2k-2} = \angle P_{2k-2}P_{2k}P_{2k-1}$;又對頂角$\angle P_{2k-1}A_kP_{2k-3}$與$\angle P_{2k}A_kP_{2k-2}$相等,所以$\triangle P_{2k-1}A_kP_{2k-3} \sim \triangle P_{2k-2}A_kP_{2k}$($AA$相似性質),推知$\overline{A_kP_{2k-1}} : \overline{A_kP_{2k-3}} = \overline{A_kP_{2k-2}} : \overline{A_kP_{2k}} \Rightarrow \overline{A_kP_{2k-1}} \times \overline{A_kP_{2k}} = \overline{A_kP_{2k-3}} \times \overline{A_kP_{2k-2}}$,因此$\dfrac{\overline{A_kP_{2k-1}}}{1} \times \dfrac{\overline{A_kP_{2k}}}{1} \times \dfrac{1}{\overline{A_kP_{2k-3}}} \times \dfrac{1}{\overline{A_kP_{2k-2}}} = 1$,亦即$\dfrac{\overline{A_kP_{2k-1}}}{1} \times \dfrac{\overline{A_kP_{2k}}}{1} \times \dfrac{1}{\overline{P_{2k-3}A_k}} \times \dfrac{1}{\overline{P_{2k-2}A_k}} = 1 \cdots\cdots (k)$

3. 最後考慮與A_n有關係之線段乘積
連接線段$\overline{P_{2n-1}P_{2n-3}}$與$\overline{P_{2n-2}P_{2n}}$,因為圓周角$\angle P_{2n-1}P_{2n-3}P_{2n-2}$與$\angle P_{2n-1}P_{2n}P_{2n-2}$都對應同一個弧$P_{2n-1}P_{2n-3}$,所以$\angle P_{2n-1}P_{2n-3}P_{2n-2} = \angle P_{2n-1}P_{2n}P_{2n-2}$;又對頂角$\angle P_{2n-1}A_nP_{2n-3}$與$\angle P_{2n}A_nP_{2n-2}$相等,所以$\triangle P_{2n-1}A_nP_{2n} \sim \triangle P_{2n-2}A_nP_{2n}$($AA$相似性質),推知$\overline{A_nP_{2n-1}} : \overline{A_nP_{2n-3}} = \overline{A_nP_{2n-2}} : \overline{A_nP_{2n}} \Rightarrow \overline{A_nP_{2n-1}} \times \overline{A_nP_{2n}} = \overline{A_nP_{2n-3}} \times \overline{A_nP_{2n-2}}$,因此$\dfrac{\overline{A_nP_{2n-1}}}{1} \times \dfrac{\overline{A_nP_{2n}}}{1} \times \dfrac{1}{\overline{A_nP_{2n-3}}} \times \dfrac{1}{\overline{A_nP_{2n-2}}} = 1$,亦即$\dfrac{\overline{A_nP_{2n-1}}}{1} \times \dfrac{\overline{A_nP_{2n}}}{1} \times \dfrac{1}{\overline{P_{2n-3}A_n}} \times \dfrac{1}{\overline{P_{2n-2}A_n}} = 1 \cdots\cdots (n)$

4. 將上述第(1)至第(n)個等式相乘即得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}} \times \frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{n-1}P_{2n-3}}}{\overline{P_{2n-3}A_n}} \times \frac{\overline{A_{n-1}P_{2n-2}}}{\overline{P_{2n-2}A_n}} \times \frac{\overline{A_nP_{2n-1}}}{\overline{P_{2n-1}A_1}} \times \frac{\overline{A_nP_{2n}}}{\overline{P_{2n}A_1}} = 1$$

故得證原命題成立。

方法二:利用數學歸納法證明之,詳述如下。

如上圖 T7-2 所示,

1. 當$n=3$時,即**定理** 6之情形,故原命題成立。
2. 假設當$n=k$時,原命題成立,亦即

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{2k-3}}}{\overline{P_{2k-3}A_k}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{2k-2}}}{\overline{P_{2k-2}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_{2k-1}}}{\overline{P_{2k-1}A_1}}\times\frac{\overline{A_kP_{2k}}}{\overline{P_{2k}A_1}}=1$$

3. 當$n=k+1$時,則
   (a) 連接直線$\overleftrightarrow{A_1A_k}$將$(k+1)$邊形分割成一個$k$邊形$A_1A_2\cdots A_k$與一個三角形$\triangle A_1A_kA_{k+1}$,且假設直線$\overleftrightarrow{A_1A_k}$與圓$\Gamma$相交於$Q_1$與$Q_2$兩點。
   (b) 在k邊形$A_1A_2\cdots A_k$中,由上述步驟2知

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{2k-3}}}{\overline{P_{2k-3}A_k}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{2k-2}}}{\overline{P_{2k-2}A_k}}\times\frac{\overline{A_kQ_k}}{\overline{Q_1A_1}}\times\frac{\overline{A_kQ_2}}{\overline{Q_2A_1}}=1$$

   (c) 在$\triangle A_1A_kA_{k+1}$中,由**定理** 6知

$$\frac{\overline{A_1Q_1}}{\overline{Q_1A_k}}\times\frac{\overline{A_1Q_2}}{\overline{Q_2A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_{2k-1}}}{\overline{P_{2k-1}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_kP_{2k}}}{\overline{P_{2k}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{2k+1}}}{\overline{P_{2k+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{2k+2}}}{\overline{P_{2k+2}A_1}}=1$$

   (d) 由$(b)(c)$得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{2k-3}}}{\overline{P_{2k-3}A_k}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{2k-2}}}{\overline{P_{2k-2}A_k}}$$
$$\times\frac{\overline{A_kP_{2k-1}}}{\overline{P_{2k-1}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_kP_{2k}}}{\overline{P_{2k}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{2k+1}}}{\overline{P_{2k+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{2k+2}}}{\overline{P_{2k+2}A_1}}=1$$

   ,故當$n=k+1$時,原命題亦成立。

所以由數學歸納法得證原命題成立。 □

(三)、N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理

在考慮完平面上的情形之後,我們接著將焦點轉移到立體空間上,我們成功地找到了『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』。為了證明『任意四面體的西瓦共切球面定理』(即之後的『定理八』)的方便起見,我們先證明空間中一個關於三直線共交點或兩兩平行的結果,如下『引理八』所示。

引理 7. 給定空間中一點A_4,已知U_1、U_2、U_3、V_1、V_2與V_3六點共平面E_4滿足$\overleftrightarrow{U_1V_1}\parallel\overleftrightarrow{U_2V_2}\parallel\overleftrightarrow{U_3V_3}$且$A_4\notin E_4$,又$A_1$、$A_2$、$A_3$、$Q_1$、$Q_2$與$Q_3$分別落在直線$\overleftrightarrow{A_4V_1}$、$\overleftrightarrow{A_4V_2}$、$\overleftrightarrow{A_4V_3}$、$\overleftrightarrow{A_4U_1}$、$\overleftrightarrow{A_4U_2}$與$\overleftrightarrow{A_4U_3}$上滿足$A_1$、$A_2$ 、A_3、Q_1、Q_2與Q_3共平面$E_{A_1A_2A_3}$,則直線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$與$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$三線共點或兩兩平行。(為了方便起見,我們以$E_{XYZ}$表示包含$X$ 、Y與Z三點之平面。)

證明. 利用**引理** 1與參考資料[10]第 33 頁中的『交比的投影不變性質』可得證原命題成立。 □

定理 8. 空間中的『任意四面體的西瓦共切球面定理』
空間中,給定一個四面體Ω:$A_4-A_1A_2A_3$與一個半徑為r且球心為Q點的球面Γ,假設平面$E_{\overleftrightarrow{A_kA_l}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_kA_l}2}$表示包含直線$\overleftrightarrow{A_kA_l}$且與$\Gamma$相切之兩切平面, E_{XYZ}表示包含X 、Y與Z三點之平面,又若
直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_3A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_3A_4}2}$分別相交於異於$\overline{A_1A_2}$兩端點之$P_1$與$P_2$兩點;

直線$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_4A_1}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_4A_1}2}$分別相交於異於$\overline{A_2A_3}$兩端點之$P_3$與$P_4$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_1A_2}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_1A_2}2}$分別相交於異於$\overline{A_3A_4}$兩端點之$P_5$與$P_6$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_2A_3}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_2A_3}2}$分別相交於異於$\overline{A_4A_1}$兩端點之$P_7$與$P_8$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_2A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_2A_4}2}$分別相交於異於$\overline{A_1A_3}$兩端點之$P_9$與$P_{10}$兩點;
,如下圖 *T8-1* 所示,則

1. $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}} \times \dfrac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}} \times \dfrac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_1}} \times \dfrac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} = 1$

2. $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}} \times \dfrac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}} \times \dfrac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}} \times \dfrac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}} \times \dfrac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}} \times \dfrac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}} = 1$

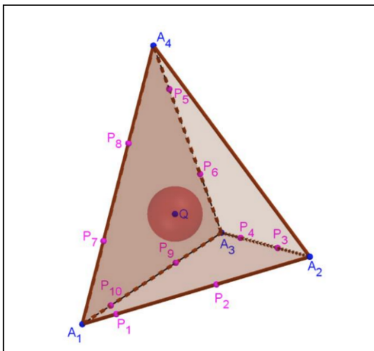

圖 T8-1

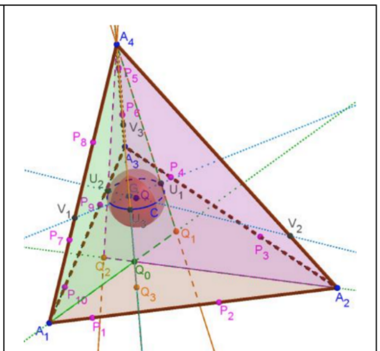

圖 T8-2

證明. 如上圖 T8-2 所示,

1. 考慮閉循環路徑$\overline{A_1A_2} \to \overline{A_2A_3} \to \overline{A_3A_1}$,則
   (a) 假設平面$E_{\overleftrightarrow{A_2A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_3A_4}2}$相交於直線$L_1$,且$L_1$與平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於$Q_1$點,
   假設平面$E_{\overleftrightarrow{A_3A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_1A_4}2}$相交於直線$L_2$,且$L_2$與平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於$Q_2$點,
   假設平面$E_{\overleftrightarrow{A_1A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_2A_4}2}$相交於直線$L_3$,且$L_3$與平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於$Q_3$點;
   由上述定義知直線L_1即直線$\overleftrightarrow{A_4Q_1}$,直線$L_2$即直線$\overleftrightarrow{A_4Q_2}$,直線$L_3$即直線$\overleftrightarrow{A_4Q_3}$。
   (b) 假設平面$E_{\overleftrightarrow{A_1A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_1A_4}2}$分別與球面$\Gamma$相切於點$T_{1,4,1}$與點$T_{1,4,2}$,
   平面$E_{\overleftrightarrow{A_2A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_2A_4}2}$分別與球面$\Gamma$相切於點$T_{2,4,1}$與點$T_{2,4,2}$,
   平面$E_{\overleftrightarrow{A_3A_4}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_3A_4}2}$分別與球面$\Gamma$相切於點$T_{3,4,1}$與點$T_{3,4,2}$,
   則我們將證明$T_{1,4,1}$、$T_{1,4,2}$、$T_{2,4,1}$、$T_{2,4,2}$、$T_{3,4,1}$與$T_{3,4,2}$等六個點會共平面,理由如下:
   因為$\overline{A_4T_{1,4,1}} = \overline{A_4T_{1,4,2}} = \overline{A_4T_{2,4,1}} = \overline{A_4T_{2,4,2}} = \overline{A_4T_{3,4,1}} = \overline{A_4T_{3,4,2}} = \sqrt{\overline{A_4Q}^2 - r^2}$
   ,且$T_{1,4,1}$、$T_{1,4,2}$、$T_{2,4,1}$、$T_{2,4,2}$、$T_{3,4,1}$與$T_{3,4,2}$等六個點均落在球面Γ上,又點A_4在Γ外部,所以$T_{1,4,1}$、$T_{1,4,2}$、$T_{2,4,1}$、$T_{2,4,2}$、$T_{3,4,1}$與$T_{3,4,2}$等六個點會落在『點A_4對Γ所作切平面之所有切點所成之平面E_4』上。
   (c) 假設上述(*b*)中之根平面E_4與直線L_1、L_2、L_3、$\overleftrightarrow{A_4A_1}$、$\overleftrightarrow{A_4A_2}$、$\overleftrightarrow{A_4A_3}$分別相交於$U_1$、$U_2$ 、U_3、V_1、V_2、V_3,又根平面E_4與球面Γ相交於一圓C,則考慮六邊形$U_1V_3U_2V_1U_3V_2$,我們發現直線$\overleftrightarrow{U_1V_3}$、$\overleftrightarrow{V_3U_2}$、$\overleftrightarrow{U_2V_1}$、$\overleftrightarrow{V_1U_3}$、$\overleftrightarrow{U_3V_2}$、$\overleftrightarrow{V_2U_1}$分別與圓$C$相切於點$T_{3,4,2}$、$T_{3,4,1}$、$T_{1,4,2}$、$T_{1,4,1}$、$T_{2,4,2}$、$T_{2,4,1}$,故由**引理** 2與**引理** 3知,$\overleftrightarrow{U_1V_1}$ 、$\overleftrightarrow{U_2V_2}$與$\overleftrightarrow{U_3V_3}$三直線共交點$G$或兩兩平行。
   (d) 接下來,我們依$\overleftrightarrow{U_1V_1}$、$\overleftrightarrow{U_2V_2}$與$\overleftrightarrow{U_3V_3}$三直線之關係,分成$\overleftrightarrow{U_1V_1}$、$\overleftrightarrow{U_2V_2}$與$\overleftrightarrow{U_3V_3}$三直線共交點$G$與兩兩平行兩種情形討論如下:

i. 當$\overleftrightarrow{U_1V_1}$、$\overleftrightarrow{U_2V_2}$與$\overleftrightarrow{U_3V_3}$三直線共交點$G$時,則

A. 因為$U_1 \in \overleftrightarrow{A_4Q_1}$且$V_1 \in \overleftrightarrow{A_4A_1}$,所以平面$E_{A_4A_1Q_1}$包含直線$\overleftrightarrow{U_1V_1}$,所以$G \in E_{A_4A_1Q_1}$;同理可得$G \in E_{A_4A_2Q_2}$與$G \in E_{A_4A_3Q_3}$,又$A_4 \in E_{A_4A_1Q_1}$、$A_4 \in E_{A_4A_2Q_2}$與$A_4 \in E_{A_4A_3Q_3}$,所以三平面$E_{A_4A_1Q_1}$、$E_{A_4A_2Q_2}$與$E_{A_4A_3Q_3}$包含直線$\overleftrightarrow{A_4G}$,亦即三平面$E_{A_4A_1Q_1}$、$E_{A_4A_2Q_2}$與$E_{A_4A_3Q_3}$相交於直線$\overleftrightarrow{A_4G}$。

B. 假設直線$\overleftrightarrow{A_4G}$與平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於$Q_0$點,則表示四平面$E_{A_4A_1Q_1}$、$E_{A_4A_2Q_2}$、$E_{A_4A_3Q_3}$與$E_{A_1A_2A_3}$相交於$Q_0$點;又$E_{A_4A_1Q_1}$與$E_{A_1A_2A_3}$相交於直線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$,$E_{A_4A_2Q_2}$與$E_{A_1A_2A_3}$相交於直線$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$,$E_{A_4A_3Q_3}$與$E_{A_1A_2A_3}$相交於直線$A_3Q_3$,所以三直線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$、$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$與$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$會共交點$Q_0$ 。

C. 由三角形面積公式得知,$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} = \dfrac{\triangle A_1A_3Q_2}{\triangle A_2A_3Q_2}$, $\dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} = \dfrac{\triangle A_1A_3Q_1}{\triangle A_2A_3Q_1}$,
$\dfrac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}} = \dfrac{\triangle A_2A_1Q_3}{\triangle A_3A_1Q_3}$, $\dfrac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}} = \dfrac{\triangle A_2A_1Q_2}{\triangle A_3A_1Q_2}$, $\dfrac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_1}} = \dfrac{\triangle A_3A_2Q_1}{\triangle A_1A_2Q_1}$,
$\dfrac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} = \dfrac{\triangle A_3A_2Q_3}{\triangle A_1A_2Q_3}$,
將此六個等式相乘得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_1}} \times \frac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}$$
$$= \frac{\triangle A_1A_3Q_2}{\triangle A_2A_3Q_2} \times \frac{\triangle A_1A_3Q_1}{\triangle A_2A_3Q_1} \times \frac{\triangle A_2A_1Q_3}{\triangle A_3A_1Q_3} \times \frac{\triangle A_2A_1Q_2}{\triangle A_3A_1Q_2} \times \frac{\triangle A_3A_2Q_1}{\triangle A_1A_2Q_1} \times \frac{\triangle A_3A_2Q_3}{\triangle A_1A_2Q_3}$$
$$= \frac{\triangle A_1A_3Q_1}{\triangle A_1A_2Q_1} \times \frac{\triangle A_2A_1Q_2}{\triangle A_2A_3Q_2} \times \frac{\triangle A_3A_2Q_3}{\triangle A_3A_1Q_3} = \frac{\triangle A_1A_3Q_0}{\triangle A_1A_2Q_0} \times \frac{\triangle A_2A_1Q_0}{\triangle A_2A_3Q_0} \times \frac{\triangle A_3A_2Q_0}{\triangle A_3A_1Q_0} = 1$$
,故得證此時原命題成立。

ii. 當$\overleftrightarrow{U_1V_1}$ 、$\overleftrightarrow{U_2V_2}$與$\overleftrightarrow{U_3V_3}$三直線兩兩平行時,則由**引理 7**知,直線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$與$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$三線共點或兩兩平行,以下我們分成此兩類情形討論之:

A. 當直線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$、$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$與$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$三線共交點$Q_0$時,則仿上述步驟$C$可以得證原命題成立。

B. 當直線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$、$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$與$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$三線兩兩平行時,則
設兩平行線$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$與$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$之距離為$h_1$,$\overleftrightarrow{A_2Q_2}$與$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$之距離為$h_2$,$\overleftrightarrow{A_3Q_3}$與$\overleftrightarrow{A_1Q_1}$之距離為$h_3$,則承上述步驟$C$可得
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_1}} \times \frac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}$$
$$= \frac{\triangle A_1A_3Q_1}{\triangle A_1A_2Q_1} \times \frac{\triangle A_2A_1Q_2}{\triangle A_2A_3Q_2} \times \frac{\triangle A_3A_2Q_3}{\triangle A_3A_1Q_3}$$
$\dfrac{h_3}{h_1} \times \dfrac{h_1}{h_2} \times \dfrac{h_2}{h_3} = 1$,故得證此時原命題成立。

2. 考慮閉循環路徑$\overline{A_1A_2} \to \overline{A_2A_3} \to \overline{A_3A_4} \to \overline{A_4A_1}$,則

(a) 先考慮另外一個三角形閉循環路徑$\overline{A_1A_3} \to \overline{A_3A_4} \to \overline{A_4A_1}$,則仿上述(1)中之步驟(a)到(d),可得$\dfrac{\overline{A_1P_9}}{\overline{P_9A_3}} \times \dfrac{\overline{A_1P_{10}}}{\overline{P_{10}A_3}} \times \dfrac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}} \times \dfrac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}} \times \dfrac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}} \times \dfrac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}} = 1$。

(b) 將上述(1)中與(2)中之步驟(a)所得之兩個等式相乘即得

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\overline{A_1P_9}}{\overline{P_9A_3}}\times\frac{\overline{A_1P_{10}}}{\overline{P_{10}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\right)=1$$

,消去四個比值得$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}=1$,

故得證原命題成立。

□

接著,我們嘗試從**定理** 8之結果去找出『N頂點多面體的西瓦共切球面定理』的一般化形式,如下之**定理9**所示,為了描述上的方便,我們先給出關於『N頂點多面體的各稜邊所在直線的序位數』以及『N頂點多面體上的閉循環路徑』的定義,詳見如下之**定義1**與**定義2**。

定義 1. 給定一個n頂點多面體Ω:$A_1A_2\cdots A_n$,為了方便起見,我們定義直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$(其中$1\le i<j\le n$)的序位數為

$$r_{i,j}:=\begin{cases}[(j-i-1)]\times 2C_2^{n-2} & if\, i=1\\ [(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+(n-(i-1))+(j-i-1)]\times 2C_2^{2n-2} & if\, i\ge 2\end{cases}$$

定義 2. 選取Ω中m個頂點$A_{k_1},A_{k_2},A_{k_3},\cdots,A_{k_{m-1}},A_{k_m}$*(頂點可允許重複選取)*構成一通過多面體的$m-1$條不重複稜線*(頂點可允許重複經過)*的循環路徑$\overline{A_{k_1}A_{k_2}}\to\overline{A_{k_2}A_{k_3}}\to\overline{A_{k_3}A_{k_4}}\to\cdots\to\overline{A_{k_{m-1}}A_{k_m}}$。為了方便起見,將起始點與終點重合(亦即$A_{k_m}=A_{k_1}$)的循環路徑稱為『閉循環路徑』

仿照上述**定理** 8之結果,可以推得『N頂點多面體的西瓦共切球面定理』的一般化形式,如下之**定理9**所示。

定理 9. 空間中的『N頂點多面體的西瓦共切球面定理』
已知空間中一n頂點多面體Ω:$A_1A_2\cdots A_n$與一個半徑為r且球心為Q點的球面Γ,假設平面$E_{\overleftrightarrow{A_kA_l}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_kA_l}2}$表示包含直線$\overleftrightarrow{A_kA_l}$且與$\Gamma$相切之兩切平面,又若

1. 給定$1\le i<j\le n$,對於$1\le k<l\le n,k\notin\{i,j\},l\notin\{i,j\}$,直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_kA_l}1}$、$E_{\overleftrightarrow{A_kA_l}2}$分別相交於異於線段$\overleftrightarrow{A_iA_j}$兩端點的兩點,所以直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$上共有$2C_2^{n-2}$個交點*(不必然全部相異)*,令此$2C_2^{n-2}$個交點為$P_{r_{i,j}+1},P_{r_{i,j}+2},P_{r_{i,j}+3},\cdots,P_{r_{i,j}+2C_2^{n-2}}$,其中$r_{i,j}$,為直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$之序位數*(詳見上述**定義** 1中所述)*。
2. 多面體Ω:$A_1A_2\cdots A_n$中任三頂點不共線,亦即過Ω的任三個頂點A_i、A_j與A_k均可以決定唯一的平面$E_{A_iA_jA_k}$

若取定Ω之一閉循環路徑α為通過該多面體Ω的m條不重複稜線(頂點可允許重複經過)如下,
$\overline{A_{k_1}A_{k_2}}\to\overline{A_{k_2}A_{k_3}}\to\overline{A_{k_3}A_{k_4}}\to\cdots\to\overline{A_{k_{m-1}}A_{k_m}}\to A_{k_m}A_{k_1}$,則

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{t=1}^{2C_2^{n-1}}\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_i,k_{i+1}}+t}}}{\overline{P_{r_{k_i,k_{i+1}}+t}A_{k_{i+1}}}}=1\tag{18}$$

證明. Part A: 先證明閉循環路徑為三角形的情形,詳述如下:
因為A_1、A_2與A_3三點不共線,我們先考慮α是三角形的閉循環路徑的情形,在不失一般性之下,取α為閉循環路徑$\overline{A_1A_2}\to\overline{A_2A_3}\to\overline{A_3A_1}$,如下圖 T9-1 所示。

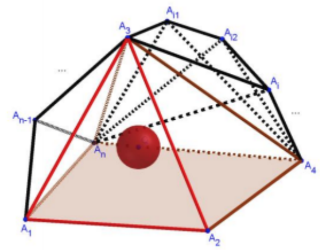

圖 T9-1

1. 對於每一個$i \in \{4,5,\cdots,n\}$,考慮四面體Ω_i:$A_i - A_1A_2A_3$,針對閉循環路徑$\overline{A_1A_2} \to \overline{A_2A_3} \to \overline{A_3A_1}$,由**定理** 8中的證明步驟(a)至(d)知

$$\frac{\overline{A_1P_1^{A_i-A_1A_2A_3}}}{\overline{P_1^{A_i-A_1A_2A_3}A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2^{A_i-A_1A_2A_3}}}{\overline{P_2^{A_i-A_1A_2A_3}A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_3^{A_i-A_1A_2A_3}}}{\overline{P_3^{A_i-A_1A_2A_3}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_4^{A_i-A_1A_2A_3}}}{\overline{P_4^{A_i-A_1A_2A_3}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_5^{A_i-A_1A_2A_3}}}{\overline{P_5^{A_i-A_1A_2A_3}A_1}} \times \frac{\overline{A_3P_6^{A_i-A_1A_2A_3}}}{\overline{P_6^{A_i-A_1A_2A_3}A_1}} = 1 \tag{19}$$

,其中
直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_iA_3}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_iA_3}2}$分別相交於異於$\overline{A_1A_2}$兩端點之$P_1^{A_i-A_1A_2A_3}$與$P_2^{A_i-A_1A_2A_3}$兩點,
直線$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_iA_1}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_iA_1}2}$分別相交於異於$\overline{A_2A_3}$兩端點之$P_3^{A_i-A_1A_2A_3}$與$P_4^{A_i-A_1A_2A_3}$兩點,
直線$\overleftrightarrow{A_3A_1}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_iA_2}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_iA_2}2}$分別相交於異於$\overline{A_3A_1}$兩端點之$P_5^{A_i-A_1A_2A_3}$與$P_6^{A_i-A_1A_2A_3}$兩點,
所以共有$(n-3)$個形如(19)式的等式。

2. 對於每一個$i_1, i_2 \in \{4,5,\cdots,n\}$,$i_1 < i_2$,針對閉循環路徑$\overline{A_1A_2} \to \overline{A_2A_3} \to \overline{A_3A_1}$,由已知可設
直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}2}$分別相交於異於$\overline{A_1A_2}$兩端點之$P_1^{A_{i_1}A_{i_2}}$與$P_2^{A_{i_1}A_{i_2}}$兩點,
直線$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}2}$分別相交於異於$\overline{A_2A_3}$兩端點之$P_3^{A_{i_1}A_{i_2}}$與$P_4^{A_{i_1}A_{i_2}}$兩點,
直線$\overleftrightarrow{A_3A_1}$與平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}1}$與$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}2}$分別相交於異於$\overline{A_3A_1}$兩端點之$P_5^{A_{i_1}A_{i_2}}$與$P_6^{A_{i_1}A_{i_2}}$兩點,

3. 因為平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}1}$與直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_1}$分別相交於$P_1^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_3^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_5^{A_{i_1}A_{i_2}}$三點,所以平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}1}$與平面$E_{A_1A_2A_3}$不平行,故平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}1}$與平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於一直線$L_1$,且直線$L_1$必定通過 $P_1^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_3^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_5^{A_{i_1}A_{i_2}}$三點,又$P_1^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_3^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_5^{A_{i_1}A_{i_2}}$三點分別落在$E_{A_1A_2A_3}$三邊所在直線上,所以由**引理** 5知

$$\frac{\overline{A_1P_1^{A_{i_1}A_{i_2}}}}{\overline{P_1^{A_{i_1}A_{i_2}}A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_3^{A_{i_1}A_{i_2}}}}{\overline{P_3^{A_{i_1}A_{i_2}}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_5^{A_{i_1}A_{i_2}}}}{\overline{P_5^{A_{i_1}A_{i_2}}A_1}} = 1 \tag{20}$$

因此共有C_2^{n-3}個形如(20)式的等式。

4. 因為平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}2}$與直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_1}$分別相交於$P_2^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_4^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_6^{A_{i_1}A_{i_2}}$三點,所以平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}2}$與平面$E_{A_1A_2A_3}$不平行,故平面$E_{\overleftrightarrow{A_{i_1}A_{i_2}}2}$與平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於一直線$L_2$,且直線$L_2$必定通過 $P_2^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_4^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_6^{A_{i_1}A_{i_2}}$三點,又$P_2^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_4^{A_{i_1}A_{i_2}}$、$P_6^{A_{i_1}A_{i_2}}$三點分別落在$E_{A_1A_2A_3}$三邊所在直線上,所以由**引理** 5知

$$\frac{\overline{A_1P_2^{A_{i_1}A_{i_2}}}}{\overline{P_2^{A_{i_1}A_{i_2}}A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4^{A_{i_1}A_{i_2}}}}{\overline{P_4^{A_{i_1}A_{i_2}}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_6^{A_{i_1}A_{i_2}}}}{\overline{P_6^{A_{i_1}A_{i_2}}A_1}}=1 \tag{21}$$

因此共有C_2^{n-3}個形如(21)式的等式。

5. 上述步驟1、3、4中形如(19)、(20)、(21)式的等式中的所有線段比值均不相同,故共會有$(n-3)^2$個等式,且共會產生$3\times(2C_2^{n-2})$個不同的線段比值,說明如下:

等式個數$=(n-3)+C_2^{n-3}\times 2=(n-3)+\frac{(n-3)(n-4)}{2}\times 2=(n-3)+(n-3)(n-4)=(n-3)^2$

線段比值個數$=(n-3)\times 6+(C_2^{n-3}\times 3)\times 2=6\times[(n-3)+C_2^{n-3}]=6\times\left[\frac{2(n-3)}{2}+\frac{(n-3)(n-4)}{2}\right]=6\times\left[\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right]=6\times C_2^{n-2}=3\times(2C_2^{n-2})$ 將上述步驟1、3、4中形如(19)、(20) 、(21)式的$(n-3)^2$個等式全部相乘即得等式(△)如下

$$\frac{\overline{A_1P_{r_{1,2}+1}}}{\overline{P_{r_{1,2}+1}A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_{r_{1,2}+2}}}{\overline{P_{r_{1,2}+2}A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{r_{1,2}+2C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{r_{1,2}+2C_2^{n-2}}A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{r_{2,3}+1}}}{\overline{P_{r_{2,3}+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{r_{2,3}+2}}}{\overline{P_{r_{2,3}+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{r_{2,3}+2C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{r_{2,3}+2C_2^{n-2}}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{r_{1,3}+1}}}{\overline{P_{r_{1,3}+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_{r_{1,3}+2}}}{\overline{P_{r_{1,3}+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_3P_{r_{1,3}+2C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{r_{1,3}+2C_2^{n-2}}A_1}}=1 \tag{22}$$

亦即

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{2C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}}A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-1)C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{2(n-1)C_2^{n-2}+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-1)C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{2nC_2^{n-2}+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2nC_2^{n-2}}}}{\overline{P_{2nC_2^{n-2}}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{2C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_{2C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_3P_{4C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{4C_2^{n-2}}A_1}}=1 \tag{23}$$

或寫成$\prod_{i=1}^{m}\prod_{t=1}^{2C_2^{n-1}}\frac{\overline{A_iP_{r_{i,i+1}+t}}}{\overline{P_{r_{i,i+1}+t}A_{i+1}}}=1$(此時$A_4=A_1$,且視$r_{3,4}=r_{3,1}=r_{1,3}$),故此時原命題成立。

Part B:對於非三角形的閉循環路徑α,我們均可將α拆成數個三角形閉循環路徑的合成,然後針對每一個三角形閉循環路徑,利用上述Part A中之結論,可得一形如上述Part A中的等式(△)之等式,將所得之所有等式相乘消去重複路徑的比值乘積後,即得
$\prod_{i=1}^{m}\prod_{t=1}^{2C_2^{n-1}}\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_i,k_{i+1}}+t}}}{\overline{P_{r_{k_i,k_{i+1}}+t}A_{k_{i+1}}}}=1$,故得證原命題。 □

Remark 1: (空間中的『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』)

事實上,我們可以將**定理** 8與**定理** 9中的結果推廣到其他的『圓錐曲面』中,即推廣到『橢球面』、『橢圓拋物面』、『雙曲拋物面』與『雙曲面』中均成立,而且證明方法亦類似。

(四)、N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理

在找到空間中的『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』之後,我們接著將焦點轉移到立體空間上的『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』的探尋。首先,我們考慮『任意四面體的孟氏共球面定理』,如下**定理10**所示。

定理 10. (空間中的『任意四面體的孟氏共球面定理』)
空間中,給定一個四面體Ω:$A_4-A_1A_2A_3$與一個半徑為r且球心為Q點的球面 ,若
直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與**球面**$\Gamma$相交於異於$\overline{A_1A_2}$兩端點之$P_1$與$P_2$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與**球面**$\Gamma$相交於異於$\overline{A_2A_3}$兩端點之$P_3$與$P_4$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_3A_4}$與**球面**$\Gamma$相交於異於$\overline{A_3A_4}$兩端點之$P_5$與$P_6$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_4A_1}$與**球面**$\Gamma$相交於異於$\overline{A_4A_1}$兩端點之$P_7$與$P_8$兩點;
直線$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與**球面**$\Gamma$相交於異於$\overline{A_1A_3}$兩端點之$P_9$與$P_{10}$兩點;
則

1. $$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}=1$$

2. $$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}=1$$

證明.

1. 利用**定理** 6之結果可得證原命題成立。
2. 利用上述(1)之結果並仿**定理** 8(2)之證法可得證原命題成立。

□

接著,我們嘗試從**定理** 10之結果去找出『N頂點多面體的孟氏共球面定理』的一般化形式,如下之**定理11**所示,為了描述上的方便,我們先給出有別於**定義** 1的第二種『N頂點多面體的各稜邊所在直線的序位數』的定義,詳見如下之**定義3**。

定義 3. (適用於孟氏共圓錐曲面定理):
給定一個n頂點多面體Ω:$A_1A_2\cdots A_n$,為了方便起見,我們定義直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$(其中$1\le i<j\le n$)的第二種序位數為

$$s_{i,j}:=\begin{cases}[(j-i-1)]\times 2 & if\, i=1\\ [(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+(n-(i-1))+(j-i-1)]\times 2 & if\, i\ge 2\end{cases}$$

仿照上述**定理** 10之結果,可以推得『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』的一般化形式,如下之**定理11**所示。

定理 11. (空間中的『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』)
已知空間中一n頂點多面體Ω:$A_1A_2\cdots A_n$與一個圓錐曲面Γ(即球面、橢球面、橢圓拋物面、雙曲面與雙曲拋物面),若

1. 給定$1\le i<j\le n$,對於$1\le k<l\le n,k\notin\{i,j\},l\notin\{i,j\}$,直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$與$\Gamma$相交於異於線段$\overline{A_iA_j}$兩端點的兩點,所以直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$上共有2個交點(不必然全部相異),令此2個交點為$P_{s_{i,j}+1}$,$P_{s_{i,j}+2}$,其中$s_{i,j}$,為直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$之第二種序位數(詳見上述**定義** 3中所述)。
2. 多面體Ω:$A_1A_2\cdots A_n$中任三頂點不共線,亦即過Ω的任三個頂點A_i、A_j與A_k均可以決定唯一的平面$E_{A_iA_jA_k}$

若取定Ω之一閉循環路徑通過該多面體Ω的m條不重複稜線(頂點可允許重複經過)如下,
$\overline{A_{k_1}A_{k_2}} \to \overline{A_{k_2}A_{k_3}} \to \overline{A_{k_3}A_{k_4}} \to \cdots \to \overline{A_{k_{m-1}}A_m} \to \overline{A_{k_m}A_{k_1}}$,則

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{t=1}^{2}\frac{\overline{A_{k_i}P_{s_{k_i,k_{i+1}}+t}}}{\overline{P_{s_{k_i,k_{i+1}}+t}A_{k_{i+1}}}}=1$$

證明. 仿**定理** 9與**定理** 10之證法可得證原命題成立。 □

3 討論

針對**定理** 1之結果,教授在評審過程中,提出建議說是否可以讓$\triangle ABC$的某一個頂點落在圓Γ內,則是否依舊會有數個線段比值乘積為定值1的結果,利用軟體 Geogebra 測試後,截至目前為止並未發現有類似的數個線段比值乘積為定值1,但是如果我們讓$\triangle ABC$的某幾個頂點落在圓Γ上,則依舊會有數個線段比值乘積為定值1,詳述如下**定理1-1**。

定理1-1:

1. (三角形三頂點恰有一頂點在圓錐曲線上之西瓦共切圓錐曲線定理)
   承**定理** 1之描述,但讓A點落在圓錐曲線Γ上,此時過A點只能對Γ作一條切線$\overleftrightarrow{AD_0}$,若$\overleftrightarrow{AD_0}$與$\overleftrightarrow{BC}$相交於$D_0$點,則$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$
2. (三角形三頂點恰有兩頂點在圓錐曲線上之西瓦共切圓錐曲線定理)
   承**定理** 1之描述,但讓A點落在圓錐曲線Γ上,此時過A點只能對Γ作一條切線$\overleftrightarrow{AD_0}$,若$\overleftrightarrow{AD_0}$與$\overleftrightarrow{BC}$相交於$D_0$點,且讓$B$點亦落在Γ上,此時過$B$點只能對Γ作一條切線$\overleftrightarrow{BE_0}$,若$\overleftrightarrow{BE_0}$與$\overleftrightarrow{CA}$相交於$E_0$點,則$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}}=1$
3. (三角形三頂點均在圓錐曲線上之西瓦共切圓錐曲線定理)
   承**定理** 1之描述,但讓A點落在圓錐曲線Γ上,此時過A點只能對Γ作一條切線$\overleftrightarrow{AD_0}$,若$\overleftrightarrow{AD_0}$與$\overleftrightarrow{BC}$相交於$D_0$點,且讓$B$點亦落在Γ上,此時過$B$點只能對Γ作一條切線$\overleftrightarrow{BE_0}$,若$\overleftrightarrow{BE_0}$與$\overleftrightarrow{CA}$相交於$E_0$點,且讓$C$點亦落在Γ上,此時過$C$點只能對Γ作一條切線$\overleftrightarrow{CF_0}$,若$\overleftrightarrow{CF_0}$與$\overleftrightarrow{AB}$相交於$F_0$點,則$\frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}}\times\frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}}=1$,亦即$\frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}}\times\frac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}}\times\frac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}}=1$;;且此時$D_0$、$E_0$與$F_0$三點亦共線,算是『帕斯卡定理』的退化情形。

證明. 仿**定理** 1之證明方法(二)的射影幾何證法可得證原命題成立。 □

,

此外,針對**定理** 6,我們讓$\triangle ABC$的某幾邊所在的直線與圓錐曲線Γ相切,則依舊會有數個線段比值乘積為定值1,詳述如下**定理6-1**。 **定理6-1:**

1. (三角形一邊所在直線與圓錐曲線相切之孟氏共圓錐曲線定理)
   承**定理** 6之描述,但讓$\overleftrightarrow{AB}$與圓錐曲線Γ相切於F_0點,此時$\overleftrightarrow{AB}$只能與Γ相交於一點F_0,則$\frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}}\times\frac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$
2. (三角形兩邊所在直線與圓錐曲線相切之孟氏共圓錐曲線定理)
   承**定理** 6之描述,但讓$\overleftrightarrow{AB}$與圓錐曲線Γ相切於F_0點,此時$\overleftrightarrow{AB}$只能與Γ相交於一點F_0,且

讓$\overleftrightarrow{BC}$與Γ相切於D_0點,此時$\overleftrightarrow{BC}$只能與Γ相交於一點D_0,則$\dfrac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}} \times \dfrac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}} \times \dfrac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}} \times \dfrac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}} \times \dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \times \dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}} = 1$

3. (三角形三邊所在直線與圓錐曲線相切之孟氏共圓錐曲線定理)
承**定理** 6之描述,但讓$\overleftrightarrow{AB}$與圓錐曲線Γ相切於F_0點,此時$\overleftrightarrow{AB}$只能與Γ相交於一點F_0,且讓$\overleftrightarrow{BC}$與Γ相切於D_0點,此時$\overleftrightarrow{BC}$只能與Γ相交於一點D_0,且再讓$\overleftrightarrow{CA}$與Γ相切於E_0點,此時$\overleftrightarrow{CA}$只能與Γ相交於一點E_0,則$\dfrac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}} \times \dfrac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}} \times \dfrac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}} \times \dfrac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}} \times \dfrac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}} \times \dfrac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}} = 1$,亦即$\dfrac{\overline{AF_0}}{\overline{F_0B}} \times \dfrac{\overline{BD_0}}{\overline{D_0C}} \times \dfrac{\overline{CE_0}}{\overline{E_0A}} = 1$

證明. 仿**定理** 6之證明方法(二)的射影幾何證法可得證原命題成立。 □

4 結論與未來展望

本文除了找到原始問題—『問題 A』的純幾何證法與射影幾何證法以外,主要結果有四大部分,我們驗證了如下的結果:

1. 找到『任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共切圓錐曲線定理』的一般化形式並驗證它,其與參考資料[1]中的『任意凸、凹或交叉多邊形的西瓦共點定理』與『三角形中的西瓦共切圓定理』不相同。

2. 找到『任意凸、凹或交叉多邊形的孟氏共圓錐曲線定理』的一般化形式並驗證它,其與參考資料[1]中的『任意凸、凹或交叉多邊形的孟氏共線定理』不相同。

3. 找到『N頂點多面體的西瓦共切圓錐曲面定理』的一般化形式並驗證它,其與參考資料[1]中的『N頂點多面體的西瓦共點定理』不相同。

4. 找到『N頂點多面體的孟氏共圓錐曲面定理』的一般化形式並驗證它,其與參考資料[1]中的『N頂點多面體的孟氏共面定理』不相同。

除此之外,在平面上,我們也嘗試將第(一)部分結果中的『圓錐曲線』換成其他的封閉曲線,如『心臟線』、『腎臟線』或與其同類型的外擺線,我們發現第(一)部分中的結果不再成立。未來,在平面上,我們將嘗試把本文中的『圓錐曲線』換成更多不一樣的『封閉曲線』,看看有沒有類似本文的第(一)部分與第(二)部份的結果。除此之外,在空間中,我們也將思考『圓錐曲面』是否可以以其他的『封閉曲面』取代。此外,關於第(一)部份與第(二)部份的結果,針對三角形的情形,除了純幾何證法外,我們也已經找到其射影幾何的證法,尤其是第(二)部份的結果,我們只要再結合原來使用的數學歸納法,就可以驗證N邊形的結果亦成立;至於第(一)部份的結果,針對$N \geq 4$的情形,我們也期待在未來可以找到其射影幾何的證法,從而使我們的證明更加簡潔、優美且典雅。

參考文獻(References)

[1] 2014 年臺灣國際科學展覽優勝作品專輯,國立台灣科學教育館彙編,作品名稱:『孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣』,作者:許喬婷。

[2] 黃家禮編著,幾何明珠,第 230 頁至第 236 頁,九章出版社,2009 年。

[3] 范志軒編輯,根軸到底在哪裡,詳細資料如下網址所示:
https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=http%3A%2F%2Fwww5.hwsh.tc.edu.tw%2Fc%2Fdocument_library%2Fget_file%3FfolderId%3D429198%26name%3DDLFE-9220.doc

[4] 劉紹正編著,圓錐曲線切線的尺規作圖,臺北市立內湖高級中學。

[5] 解析幾何與坐標幾何的意義,詳細資料如下網址所示:
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%A7%A3%E6%9E%90%E5%87%A0%E4%BD%95

[6] 張景中著,平面幾何新路解題研究,第 3 頁至第 4 頁,九章出版社,2002 年。

[7] 游森棚,林延輯,柯建彰,洪士薰,洪育祥,張宮明,高中數學第二冊、第三冊與第四冊,翰林出版社,2015 年。

[8] 帕斯卡定理(Pascal's Theorem),詳細資料如下網址所示:
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B8%95%E6%96%AF%E5%8D%A1%E5%AE%9A%E7%90%86

[9] 心臟線與腎臟線等外擺線之參數方程式,詳細資料如下網址所示:
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%96%E6%91%86%E7%BA%BF

[10] 趙文敏著,幾何學概論,第 203 頁至第 310 頁,九章出版社,2005年。

[11] 趙文敏著,解析幾何講義,第 221 頁至第 222 頁,2004年。

作品評語

張鎮華教授

國立台灣大學數學系

這篇文章主要在研究西瓦定理和孟氏定理的推廣。西瓦定理是說『給定三角形ABC及一點P，直線 AP、BP、CP分別交直線BC、CA、AB於D、E、F則$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$。』有趣的是，如果將西瓦定理中的點$P$『膨脹』成一個圓$\Gamma$，將三角形三頂點到$P$的連線換成三頂點到圓$\Gamma$的切線，也會有類似的結果，精確來說是『給定三角形$ABC$及一圓$\Gamma$，三頂點到圓$\Gamma$的切線分別交直線$BC$、$CA$、$AB$於$D_1$與$D_2$、$E_1$與$E_2$、$F_1$與$F_2$，則$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} \cdot \frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} \cdot \frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \cdot \frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \cdot \frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \cdot \frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}} = 1$。』值得注意的是，這是西瓦定理的一種推廣，因為當圓Γ『退化』成一點P的時候，就回到原來的西瓦定理。

這篇文章首先將上述結果中的圓再推廣到圓錐曲線，給了兩個證明，一個是純幾何的證法，還有一個是射影幾何的證法。觀其證明，只針對圓的情況解釋，其他圓錐曲線的證明說是方法類似。由於證法是引用布理昂雄定理，而這個定理對圓錐曲線成立，所以本文的證明是可以推到圓錐曲線。整個證明可以說是中規中矩，有相當成熟度。

比較細緻的部份是，將三角形推廣到多邊形，也有類似但巧妙的等式，整個推導也是十分精彩。此外，這篇文章也平行地處理了與西瓦定理對偶的孟氏定理，獲得不錯的結果。最後，更將二維的定理推廣到三維，一樣有成功的結果。

整體來說，這篇文章得到的結論不錯，所使用的手法相當細緻，是一篇優良的文章。