N 邊形與多面體的頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質

國立鹿港高級中學 莊祐鈞
指導老師:鄭仕豐

Abstract

The main purpose of the article is to investigate the generalization of a certain geometric property concerning the sum of the ratios of several segments in triangle. The original problem says that *Given a triangle ABC and a point P inside the triangle. Suppose that the lines $\overleftrightarrow{AP},\overleftrightarrow{BP}$ and $\overleftrightarrow{CP}$ intersects the segments $\overline{BC},\overline{CA}$ and $\overline{AB}$ at the points P_1,P_2 and P_3 respectively. Then*

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1.$$

We had generalized it and already found out that there are similar results in parallelograms and regular polygons. But the sum of the ratios of several segments is no longer equal to 1. For parallelograms and regular polygons, we had observed the general formula of the fixed sum of the ratios of several segments. Moreover, we found that the point P in the original problem is not necessarily inside the triangle, the parallelograms and the regular polygons. Instead, we could move the point P to the outside of the triangle, the parallelograms and the regular polygons and generalize the original result to be the form of the fixed sum of the ratios of several directed segments. In addition, we also try to consider the inference of the original result to arbitrary tetrahedrons, parallelepipeds and regular polyhedrons. Fortunately, we got that the sum of the ratios of several directed segments is fixed. Finally, we also generalized the original result to arbitrary trapezoids, arbitrary convex or concave quadrilaterals and pentagons. And try to find out the corresponding results for arbitrary N-polygons.

Keywords: N-polygon, polyhedron, division of vectors

中文摘要

本文主要探討三角形的一個幾何定性性質的推廣，原始問題為：『點 P 為三角形 ΔABC 內部一點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，則 $\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 成立。』我們發現此結果在平行四邊形與正多邊形中也有相對應的推論，只是定值不再是 1 ，我們可以表示出數個線段比值相加後之定值的一般化公式；更甚者，我們發現原問題中的點 P 不一定要在三角形、平行四邊形與正多邊形的內部，而可以將之移至三角形、平行四邊形與正多 邊形的外部，並將原結論推廣成『有向線段比值和為定值』的一般化結果。此外， 我們亦將原問題推廣到空間中的『任意四面體』、『平行六面體』與『正多面體』中，並發現驗證得相對應的有向線段比值和為定值。最後，我們又嘗試將原問題推廣到『任意梯形』、『任意凸、凹四邊形』與『任意凸、凹五邊形』中，進而試 圖找出任意 N 邊形中的相對應結論。

關鍵詞： N 邊形、多面體、向量的除法

1 簡介

1.1 研究動機

在一個課餘的機會裡，老師教我們使用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖形，透過實驗與觀察重新驗證一些平面幾何上的結果，我們做了許多數學實驗，發現這套軟體除了容易操作外，重要的是操作起來讓我們覺得很有趣，因為它可以快速實驗考慮多種變化的情形。在這個軟體操作的學習裡，我們除了重新品嚐了一些學過的平面幾何結論外，更 對參考資料 [1]中的一個三角形幾何定性性質產生興趣，問題的描述詳見第 3 頁之**引理 1** 。

除此之外，在參考資料 [3] 與 [4] 中，曾經探討了西瓦定理在任意 n 邊形中的推廣，其中**定理 3** 的交點 P_i 乃是該 n 邊形之頂點與平面上一定點 P （註：該定點 P 不落在該 n 邊形之 n 個邊所在直線上，亦不落在其對角線上。）連線與各邊所在直線相交產生的，總共產生 $n(n-2)$ 個交點，應此 $n(n-2)$ 個交點，而有 $n(n-2)$ 個『線段比值之積』為定值 1 的幾何定性性質，由此結果加上**引理 1** 的啓發，我們萌生了在同樣的圖形中如果改討論某數個『線段比值之和』，那麼是否也有可能有類似的幾何定性性質？就這樣開始了這一份科展研究。

研究過程中，我們除了用軟體檢驗了一下這個幾何定性性質，也給出其嚴謹的證明（詳見第 3 頁之引理一），接著我們就想說有沒有機會將它推廣到任意多邊形的情形，我們用了軟體先行檢驗一番，發現任意的凸四邊形內只有一些 P 點會保持這個性質成立，所以我們退而求其次，先考慮正多邊形的情形，從正方形、平行四邊形、正五邊形、正六邊形、正七邊形 與正八邊形，一直到一般化的正 $2n(n \geq 2)$邊形與正 $2n-1(n \geq 2)$ 邊形，一步一腳印，邊數由小至大，探索過程之中，除了軟體作圖、紙筆計算外，並給予嚴謹的證明，慢慢地我們發現其中的奧妙與規則，最後，我們發現平行四邊形與正多邊形內的任一點 P 都可以維持這樣的定性性質，只是數個比值相加後之定值不再是 1 ，而是會隨著邊數的不同而有所改變，幸運的是我們可以給出這個定值的一般化公式。

完成**引理 1** 在平面上平行四邊形與正多邊形中的推論後，我們試想著**引理 1** 中 的點 P 是否可以將之移至三角形的外部，進而在平行四邊形與正多邊形中的推論是否也可以，將點 P 移至平行四邊形與正多邊形的外部，我們做了一些嘗試後，發現直接將 P 點移至三角形、平行四邊形與正多邊形的外部時，原來的『線段比值和』不再是定值，但是如果我們同時將『線段比值和』換成相對應的『有向線段比值和』時，則這些『有向線段比值和』會成相同的定值，這樣我們便更完整的看到**引理 1** 在三角形、平行四邊形與正多邊形的推論。

完成了**引理 1** 在平面上三角形、平行四邊形與正多邊形中的推論後，我們更進一步去思考在空間中延伸的可能性，經過一些努力，輔以繪圖軟體 Cabri 3D，我們成功地驗證得**引理 3** 在『任意四面體』、『平行六面體』與『正多面體』中也有類似的推論，依舊可得『數個有向線段比值和為定值』，而且互為對偶的兩個正多面體之『數個有向線段比值和的定值』相等。

1.2 研究目的

1. 將**引理 1** 中三角形內的一點 P 移至三角形外，觀察驗證對應的定性性質。
2. **引理 1** 在平行四邊形、正 $2n(n \geq 2)$ 邊形與正 $2n-1(n \geq 2)$ 邊形中的推論。
3. **引理 3** 在任意四面體、平行六面體與正多面體中的推論。
4. 將前述三個研究目的中的『線段比值和』改成『有向線段比值和』，探討該比值和的不變性。
5. **引理 1** 在『特殊梯形』、『任意梯形』與『任意凸、凹四邊形與五邊形』中的推論。

1.3 研究設備及器材

頭腦、計算機、紙、筆、尺、電腦軟體（Microsoft Word, Geogebra 4.2, Cabri 3D）

2 研究過程、方法與主要結果

在參考資料 [1] 中，我發現了如下的結果，為驗證其正確性，我以 Geogebra 繪圖軟體驗證其正確性，並給出了嚴謹的證明如下。

引理 1.（三角形之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）

在平面上，已知點 P 在 ΔABC 內部，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，如下圖 $I-1$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$$

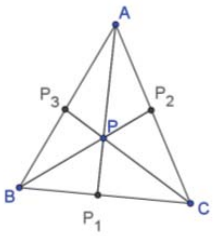

圖 I - 1

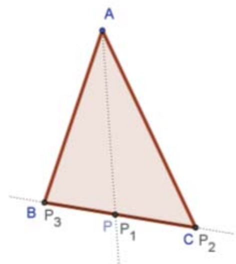

圖 R - 1

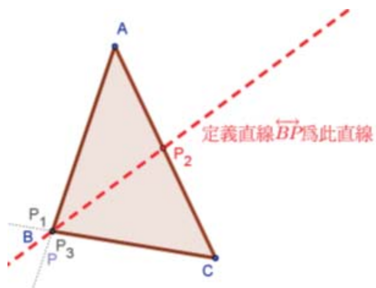

圖 R - 2

證明.

將線段比值轉換成三角形面積比值即可得證原命題成立。 □

上述**引理 1** 中，若將點 P 移至 ΔABC 的邊上，但是點 P 不與 ΔABC 的三頂點重合，則結論依舊會成立，詳述如下。

備註 1.

(1) 在平面上，已知點 P 在 ΔABC 邊上，但是點 P 不與 ΔABC 的三頂點重合，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 三邊於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，如上圖 $R-1$ 所示，則 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 亦成立。

(2) 承 (1) ，若點 P 與 ΔABC 的某一頂點重合，則等式 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$ 可視為不成立或視為成立。

證明.

(1) $\because P$ 在 $\overline{BC}$ 上，$\therefore P_1 = P,\ P_2 = C,\ P_3 = B$ ，從而

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = \frac{0}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{PB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = 1$$

故得證原命題成立。

(2)

觀點一： 視為不成立的理由
假設點 P 與頂點 B 重合，則直線 $\overline{BP}$ 無定義，所以 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overline{AC}$ 之交點 P_2 不存在，故原等式無意義，或說原等式不成立。

觀點二： 視為成立的理由
假設點 P 與頂點 B 重合，若我們定義直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 為通過 B 點的任意直線，則此時 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{AC}$ 會交於一點 P_2 ，如上圖 $R-2$ 所示，又 $P_1 = P,\ P_3 = P$ ，所以 $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = \frac{0}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BP_2}}{\overline{BP_2}} = \frac{0}{\overline{CP_3}} = 1$ ，即原等式成立。

上述的『觀點一』似乎比『觀點二』合理一些，但是其實『觀點二』可以視為**引理 1** 的一種極端情形。

□

在參考資料 [2] 中，我發現了如下的『共邊定理』，在接下來的問題論證中，偶爾會用到這個結果，因此特別將其列出，詳述如下。

引理 2.
若直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 相交於 M 點，則

$$\frac{\Delta PAB}{\Delta QAB} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}}$$

證明.
將線段比值轉換成三角形面積比值即可證得原命題。 □

上述**引理 1** 之結論，如果允許 P 點的位置在 ΔABC 的外部，則會有如下之結果。

問題 1.
在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P ，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A 、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C ，使得 L_B 與 L_C 交於點 A' 、 L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C' ，則

(1) 若 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部，如下圖 $1-1$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(2) 若 P 點落在 $\Delta AB'C$ 內部，如下圖 $1-2$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(3) 若 P 點落在 $\Delta ABC'$ 內部，如下圖 $1-3$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$$

(4) 若 P 點不落在 $\Delta A'BC$ 、 $\Delta AB'C$ 與 $\Delta ABC'$ 內部，如下圖 $1-4$ 、 $1-5$ 與 $1-6$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1 \text{ ， } \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}>1 \text{ 且 } \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}>1$$

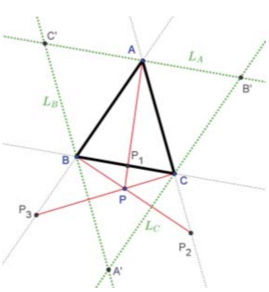

圖 1 - 1

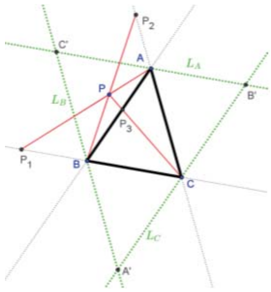

圖 1 - 2

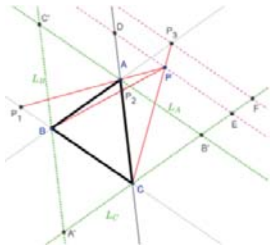

圖 1 - 3

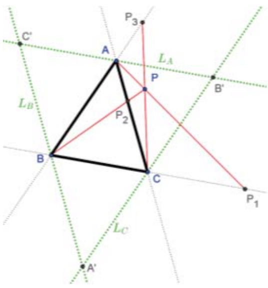

圖 1 - 4

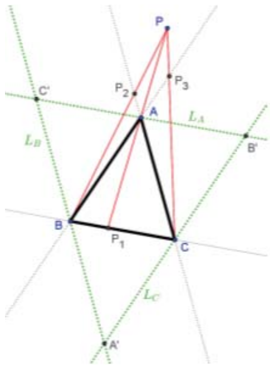

圖 1 - 5

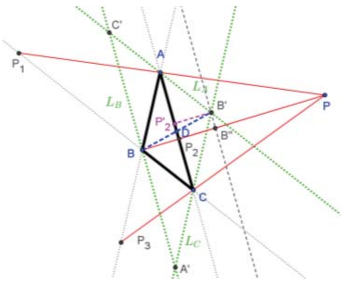

圖 1 - 6

證明.

利用**引理 2** 且將線段比值轉換成三角形面積比值再做適當代換，即可得證原命題成立。 □

針對上述**問題 1** 中 (4) 之結果，我可以再將其細分成幾種情形，為了方便起見，我們先定義如下幾個符號。

定義 1.

我們將上圖 $1-1$ 由直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},L_A,L_B$ 與 L_C 所圍成之各區域以下列符號定義之：

(1) 以 $I_{\Delta ABC}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CA}$ 所圍成之三角形 ΔABC 內部區域』。

(2) 以 $I_{\Delta A'BC}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{A'B},\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CA'}$ 所圍成之三角形 $\Delta A'BC$ 內部區域』。

(3) 以 $I_{\Delta AB'C}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{AB'},\overleftrightarrow{B'C}$ 與 $\overleftrightarrow{CA}$ 所圍成之三角形 $\Delta AB'C$ 內部區域』。

(4) 以 $I_{\Delta ABC'}$ 表示『由直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC'}$ 與 $\overleftrightarrow{C'A}$ 所圍成之三角形 $\Delta ABC'$ 內部區域』。

(5) 定義 I_A 為 $I_A := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\text{，其中 } x<0,\ y<0\right\}$。

(6) 定義 $I_{A'}$ 為 $I_{A'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{A'P} = x\overrightarrow{A'B} + y\overrightarrow{A'C}\text{，其中 } x<0,\ y<0\right\}$。

(7) 定義 I_B 為 $I_B := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}\text{，其中 } x<0,\ y<0\right\}$。

(8) 定義 $I_{B'}$ 為 $I_{B'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{B'P} = x\overrightarrow{B'A} + y\overrightarrow{B'C}\text{，其中 } x<0,\ y<0\right\}$。

(9) 定義 I_C 為 $I_C := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}\text{，其中 } x<0,\ y<0\right\}$。

(10) 定義 $I_{C'}$ 為 $I_{C'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{C'P} = x\overrightarrow{C'A} + y\overrightarrow{C'B}\text{，其中 } x<0,\ y<0\right\}$。

(11) 定義 $I_{AB'}$ 為 $I_{AB'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB'}\text{，其中 } x<0,\ 0<y<1\right\}$。

(12) 定義 $I_{AC'}$ 為 $I_{AC'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AC'}\text{，其中 } x<0,\ 0<y<1\right\}$。

(13) 定義 $I_{BC'}$ 為 $I_{BC'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BC'}\text{，其中 } x<0,\ 0<y<1\right\}$。

(14) 定義 $I_{BA'}$ 為 $I_{BA'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BA'}\text{，其中 } x<0,\ 0<y<1\right\}$。

(15) 定義 $I_{CA'}$ 為 $I_{CA'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CA'}\text{，其中 } x<0,\ 0<y<1\right\}$。

(16) 定義 $I_{CB'}$ 為 $I_{CB'} := \left\{P \,\middle|\, \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CB'}\text{，其中 } x<0,\ 0<y<1\right\}$。

各區域位置詳見下圖 $D-1$。

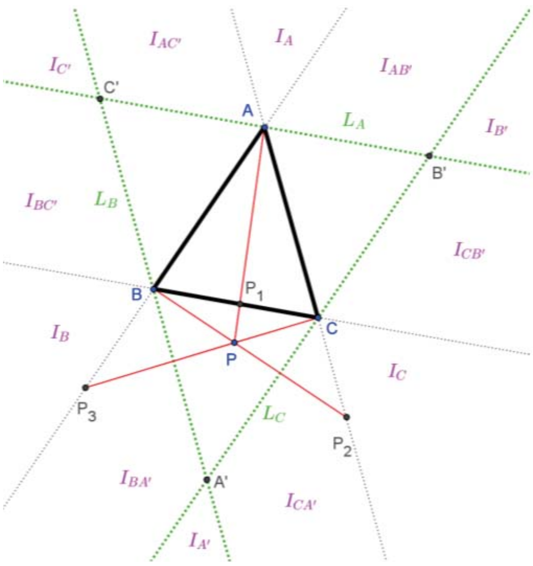

圖 D - 1

將上述**問題 1** 中 (4) 之結果細分成幾種情形，經測試驗證得如下之結果。

問題 2.

承**問題 1**，在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A 、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C，使得 L_B 與 L_C 交於點 A' 、 L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C'，承**定義 1** 中各符號之定義，於此又定義

$$R := \frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}, \qquad R_A := \frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}$$
$$R_B := \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CP_3}}, \qquad R_C := \frac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}$$

則

(1) 當 $P \in I_A$ 或 $P \in -\overrightarrow{AB}$ 或 $P \in -\overrightarrow{AC}$ 時， $R = R_B = R_C > 1$ 且 $R_A = R + 2$ 。

(2) 當 $P \in I_{A'}$ 時， $R = R_B = R_C > 1$ 且 $R_A = R - 2$ 。

(3) 當 $P \in I_B$ 或 $P \in -\overrightarrow{BC}$ 或 $P \in -\overrightarrow{BA}$ 時， $R = R_C = R_A > 1$ 且 $R_B = R + 2$ 。

(4) 當 $P \in I_{B'}$ 時， $R = R_B = R_C > 1$ 且 $R_B = R - 2$ 。

(5) 當 $P \in I_C$ 或 $P \in -\overrightarrow{CA}$ 或 $P \in -\overrightarrow{CB}$ 時， $R = R_A = R_B > 1$ 且 $R_C = R + 2$ 。

(6) 當 $P \in I_{C'}$ 時， $R = R_B = R_C > 1$ 且 $R_C = R - 2$ 。

(7) 當 $P \in I_{AB'}$ 時， $R = R_C > 1$ 且 $R_A - R_B = 2$ 。

(8) 當 $P \in I_{AC'}$ 時， $R = R_B > 1$ 且 $R_A - R_C = 2$ 。

(9) 當 $P \in I_{BC'}$ 時， $R = R_A > 1$ 且 $R_B - R_C = 2$ 。

(10) 當 $P \in I_{BA'}$ 時， $R = R_C > 1$ 且 $R_B - R_A = 2$ 。

(11) 當 $P \in I_{CA'}$ 時， $R = R_B > 1$ 且 $R_C - R_A = 2$ 。

(12) 當 $P \in I_{CB'}$ 時， $R = R_A > 1$ 且 $R_C - R_B = 2$ 。

備註 2.

1. 綜合上述**引理 1** 、**備註 1** 、**問題 1** 與 **2** 之結果，我們其實已經討論完平面上所有 P 點的情形。

2. 在**問題 1** 與**問題 2** 中，針對任意三角形，我們討論了**引理 1** 裡的 P 點不在三角形內部的所有情形，我們發現『三組線段比值之和』有為定值 1 的情形，亦有大於 1 的時候。只是美中不足的是**問題 1** 與**問題 2** 中的『三組線段比值』並不完全與**引理 1** 中的『三組線段比值』一樣，於是我們開始去思考，有沒有可能讓『三組線段比值』 同**引理 1** 一樣，但試著讓某幾個線段比值先取負值再加總，觀察加總之後的和是否有機會為定值 1 ，以下的**問題 3** 與**定理 1** 兩個結果是我們發現的。

為了方便本文後續內容之描述，我們定義了兩個向量的除法如下。

定義 2.

(1) 在空間中，若兩向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$ 時，則我們定義

$$\frac{\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{v}} = \frac{\left|\overrightarrow{u}\right| \cos\theta}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

(2) 承 (1) ，在空間中，若兩向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 同方向，則我們定義

$$\frac{\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{v}} = \frac{\left|\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

(3) 承 (1) ，在空間中，若兩向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 反方向，則我們定義

$$\frac{\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{v}} = -\frac{\left|\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$$

將**引理 1** 中之 P 點移至 ΔABC 之外部，則有如下之結果。

問題 3.

在平面上，已知 ΔABC 外部有一點 P ，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，過 A 點作平行直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線 L_A 、過 B 點作平行直線 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線 L_B 及過 C 點作平行直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線 L_C ，使得 L_B 與 L_C 交於點 A' 、 L_C 與 L_A 交於點 B' 及 L_A 與 L_B 交於點 C' ，如圖 $D-1$ 所示，則

(1) 若 P 點落在 $\Delta A'BC$ 內部或 $P \in I_{BA'}$ 或 $P \in I_{CA'}$ 或 $P \in I_{A'}$ ，如**問題 1** 中的圖 $1-1$ 所示，試證明：

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(2) 若 P 點落在 $\Delta AB'C$ 內部或 $P \in I_{AB'}$ 或 $P \in I_{CB'}$ 或 $P \in I_{B'}$ ，如**問題 1** 中的圖 $1-2$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(3) 若 P 點落在 $\Delta ABC'$ 內部或 $P \in I_{AC'}$ 或 $P \in I_{BC'}$ 或 $P \in I_{C'}$ ，如**問題 1** 中的圖 $1-3$ 所示，試證明：

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(4) 若 $P \in I_A$ ，如**問題 1** 中的圖 $1-4$ 所示，試證明：

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(5) 若 $P \in I_B$ ，試證明：

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}} = 1$$

(6) 若 $P \in I_C$ ，試證明：

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}=1$$

證明.

將線段比值轉換成三角形面積比值即可得證原命題成立。 □

綜合**引理 1** 與**問題 2** 之結論，我們可以歸納出如下之結果。

定理 1. **（任意三角形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

給定平面上一個三角形 ΔABC ，且 P 為平面上異於 ΔABC 三頂點之一定點， 又連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交三邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，則

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}=1$$

證明.

分別就 $P \in \Delta ABC$ 、 $P \in \Delta A'BC$ 、 $P \in \Delta AB'C$ 、 $P \in \Delta ABC'$ 、 $P \in I_A$ 、 $P \in I_B$ 、 $P \in I_C$ 、 $P \in I_{A'}$ 、 $P \in I_{B'}$ 、 $P \in I_{C'}$ 、 $P \in I_{BA'}$ 、 $P \in I_{AB'}$ 、 $P \in I_{CA'}$ 、 $P \in I_{AC'}$ 、 $P \in I_{BC'}$ 、 $P \in I_{CB'}$ 等 16 種情形討論，利用**定義 2** ，且論證過程類似於**引理 1** 與**問題 3** ，故證得該命題成立。 □

備註 3.

定理 1 中的定點 P 已經不需要限制在三角形 ΔABC 的內部了，我們依然可以有類似**引理 1** 的結果，而且我們從**定理 1** 的證明過程中很輕易的知道**引理 1** 的結論其實是**定理 1** 的特例，換言之，**定理 1** 的結論已大大的改善了**引理 1** 中的結果，事實上，我們可以說**定理 1** 的結論是**引理 1** 的向量形式。

我們試著考慮**引理 1** 、**問題 4** 與**定理 1** 的一般化情形如下：

定理 2.

給定平面上一個三角形 ΔABC，且 P_1 、 P_2 與 P_3 分別為直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的動點滿足 $\overline{AP_3}:\overline{P_3B}=k_1:1$ 、 $\overline{BP_1}:\overline{P_1C}=k_2:1$ 與 $\overline{CP_2}:\overline{P_2A}=k_3:1$ ，連接直線 $\overleftrightarrow{AP_1}$ 、 $\overleftrightarrow{BP_2}$ 與 $\overleftrightarrow{CP_3}$ 使得 $\overleftrightarrow{AP_1}$ 與 $\overleftrightarrow{BP_2}$ 相交於 P 、 $\overleftrightarrow{BP_2}$ 與 $\overleftrightarrow{CP_3}$ 相交於 Q 、 $\overleftrightarrow{CP_3}$ 與 $\overleftrightarrow{AP_1}$ 相交於 R ，如下圖所示，則下述結論成立。

(1) 在《幾何明珠》一書（參考資料 *[5]*）中第 55 頁曾經提到如下結論：
當 P_1 、 P_2 與 P_3 分別為線段 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 上的動點時，則

$$2+\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=2+\frac{(k_1k_2k_3-1)^2}{(1+k_1+k_1k_2)(1+k_2+k_2k_3)(1+k_3+k_3k_1)}$$

(2) 如圖 $T2-1$，當 P_1 、 P_2 與 P_3 分別為線段 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 上的動點時，則

$$\begin{aligned}&\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{RP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{QP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{RP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{QP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}=2+\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}\\&=2+\frac{(k_1k_2k_3-1)^2}{(1+k_1+k_1k_2)(1+k_2+k_2k_3)(1+k_3+k_3k_1)}\end{aligned}$$

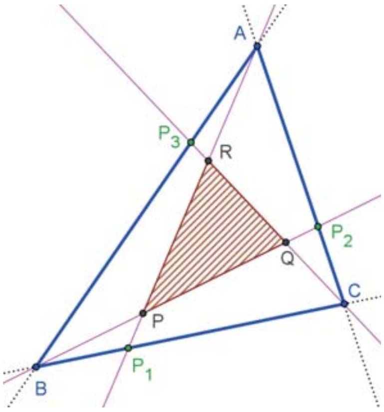

圖 T2 - 1

證明.

(1) 參閱 《幾何明珠》一書（參考資料 [5]）中第 55 頁之證法。

(2) $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{RP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{QP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{RP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\dfrac{\overrightarrow{QP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}$

$=\dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{RP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overline{QP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overline{RP_3}}{\overline{CP_3}}+\dfrac{\overline{QP_3}}{\overline{CP_3}}$

$=\dfrac{\Delta PBC}{\Delta ABC}+\dfrac{\Delta RBC}{\Delta ABC}+\dfrac{\Delta QCA}{\Delta BCA}+\dfrac{\Delta PCA}{\Delta BCA}+\dfrac{\Delta RAB}{\Delta CAB}+\dfrac{\Delta QAB}{\Delta CAB}$

$=\dfrac{1}{\Delta ABC}\left[(\Delta PBC+\Delta PCA)+(\Delta QCA+\Delta QAB)+(\Delta RAB+\Delta RBC)\right]$

$=\dfrac{1}{\Delta ABC}\left[(\Delta ABC-\Delta PAB)+(\Delta ABC-\Delta QBC)+(\Delta ABC-\Delta RCA)\right]$

$=\dfrac{1}{\Delta ABC}\left[3\Delta ABC-(\Delta ABC-\Delta PQR)\right]=\dfrac{2\Delta ABC-\Delta PQR}{\Delta ABC}=2+\dfrac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$

$=2+\dfrac{(k_1k_2k_3-1)^2}{(1+k_1+k_1k_2)(1+k_2+k_2k_3)(1+k_3+k_3k_1)}$ 故得證原命題成立。

□

備註 4.

當 $k_1k_2k_3=1$ 時， $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{RP_1}}{\overline{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{QP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{RP_3}}{\overline{CP_3}}+\dfrac{\overrightarrow{QP_3}}{\overline{CP_3}}=2$ ，此時， $\dfrac{k_1}{1}\times\dfrac{k_1}{1}\times\dfrac{k_1}{1}=1$ ，由西瓦定理知， $\overleftrightarrow{AP_1}$ 、 $\overleftrightarrow{BP_2}$ 與 $\overleftrightarrow{CP_3}$ 三線共點，即當 $k_1k_2k_3=1$ 時，**定理 2** 會變成**定理 1** 之結果，也就是**定理 2** 推廣了**定理 1** 的結果。

接下來我們想將**引理 1** 的三角形換成『正方形』，看看是否也有類似的結果，詳述如下。

問題 4.

已知 $ABCD$ 為一正方形，點 P 在正方形 $ABCD$ 內部，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 、 $\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$ ， $\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、 $\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、 $\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 $4-1$ 所示，試證明：

(1)

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$$

(2)

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$$

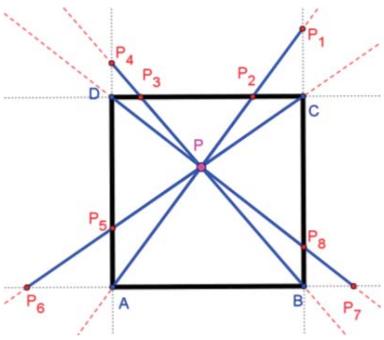

圖 4 - 1

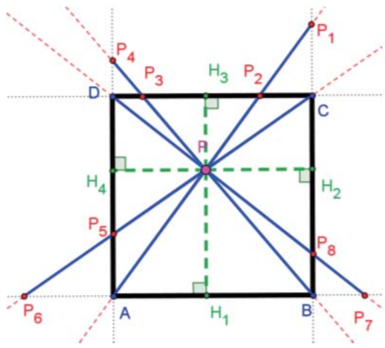

圖 4 - 2

證明.

利用相似三角形性質將線段比值代換成另外一線段比值，合併後即可得證原命題成立。 □

說明：

事實上，上述**問題 4** 中的『正方形』可以將之換成『平行四邊形』，結果亦成立，證明方法亦類似，僅需將『過 P 點作四垂直線分別垂直正方形四邊所在直線』換成『過 P 點作四平行線分別平行平行四邊形四邊所在直線』，再利用三角形相似性質將原線段比值換成另一線段比值即可。

接著我們試著考慮**問題 4** 中的 P 點在正方形外部的情形，而有如下的結果。

問題 5.

已知 $ABCD$ 為一正方形，點 P 為平面上不落在正方形 $ABCD$ 四邊所在直線的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 、 $\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$ ， $\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、 $\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、 $\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如圖 5 – 1 與圖 5 – 2 所示，則

(1) 當 $P \in I_A$ 時，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$$

亦即

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}-\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$$

(2) 當 $P \in I_{AB}$ 時，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=2$$

亦即

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}-\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}-\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=4$$

(3) 當 $P \in I_B$ 時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} - \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} - \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} - \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 2$$

亦即

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} - \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} - \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} - \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 4$$

(4) 當 $P \in I_{BC}$ 時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} - \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 2$$

亦即

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} - \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 4$$

(5) 當 $P \in I_C$ 時，則

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = -\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} - \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 2$$

亦即

$$-\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} - \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 4$$

(6) 當 $P \in I_{CD}$ 時，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = -\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 2$$

亦即

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} + \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 4$$

(7) 當 $P \in I_D$ 時，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} - \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = -\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} - \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 2$$

亦即

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} - \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} - \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} - \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} - \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} + \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 4$$

(8) 當 $P \in I_{DA}$ 時，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} - \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} - \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 2$$

亦即

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} - \frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}} - \frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} + \frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} + \frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}} = 4$$

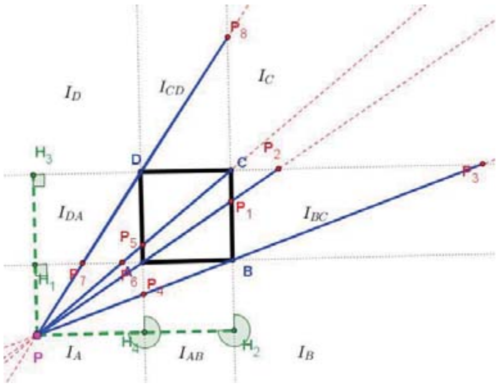

圖 5 - 1

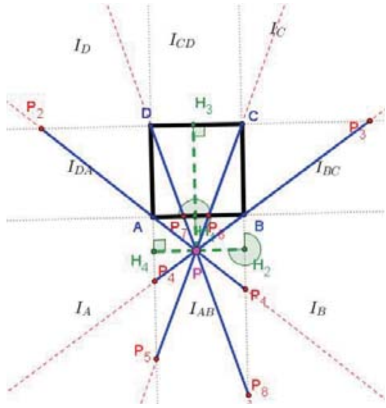

圖 5 - 2

證明.

利用相似三角形性質將每一個線段比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

問題 4 與**問題 5** 中 (1) 至 (8) 之結果可以合併寫成向量形式，並將『正方形』換成『平行四邊形』，如下所示。

定理 3. **（平行四邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

已知 $ABCD$ 為一正方形，點 P 為平面上不落在平行四邊形 $ABCD$ 四邊所在直線的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 、 $\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$ ， $\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、 $\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、 $\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 $T3-1$ 所示，則：

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=2$$

(2)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=4$$

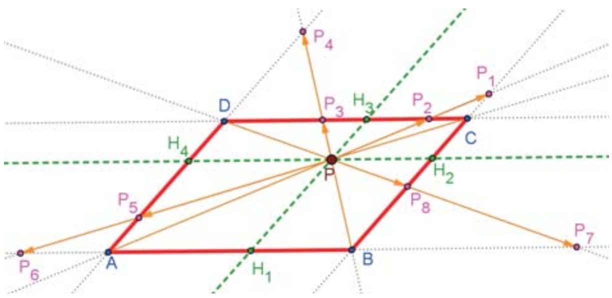

圖 T3 - 1

證明.

仿**問題 5** 之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用**定義 2** 與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

備註 5.

(1) 承上述**定理 3** ，如果 P 點落在平行四邊形 $ABCD$ 四邊所在直線上，但是 P 點不與平行四邊形 $ABCD$ 之四頂點重合，則某些頂點與 P 點的連線會與平行四邊形 $ABCD$ 之某邊所在直線平行，即此連線不與該邊所在直線有交點，此時，若我們定義此連線與該邊所在直線相交於無窮遠處，並規定此頂點到此無窮遠交點之有向線段與 P 點到此無 窮遠交點之有向線段的比值為 1,則上述**定理 3** 中的結論亦會成立。

(2) 承上述**定理 3** 與**備註 5** (1)中之定義與規定，如果 P 點與平行四邊形 $ABCD$ 的某頂點重合，則**定理 3** 中的結論可『視為不成立』或『視為成立』。

證明.

(1) 我們僅討論 P 點落在 BC 上的情形，其他情形的證明方法類似，如下圖 $R5-1$ 所示：

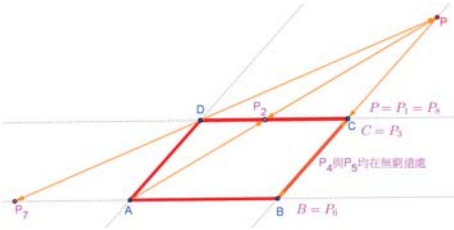

圖 R5 - 1

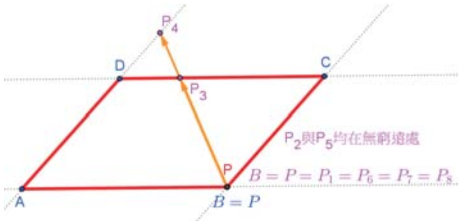

圖 R5 - 2

則

(a) $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=0+\left(-\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BC}}\right)+1+\dfrac{\overline{PB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{PB}-\overline{CP}}{\overline{BC}}+1=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC}}+1=2$

(b) $\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=0+\left(-\dfrac{\overline{CP}}{\overline{AD}}\right)+1+\dfrac{\overline{PB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{PB}-\overline{CP}}{\overline{BC}}+1=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC}}+1=2$

(c) 將上述 (a) 與 (b) 兩式相加即得 $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=4$

(2)

觀點一： 視為不成立的理由
假設點 P 與頂點 B 重合，則直線 $\overline{BP}$ 無定義，所以 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 、 $\overleftrightarrow{DA}$ 之交點 P_3 、 P_4 不存在，故**定理 3** 中的原等式無意義，或說原等式不成立。

觀點二： 視為成立的理由
假設點 P 與頂點 B 重合，若我們定義直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 為通過 B 點的任意直線，則此時 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 、 $\overleftrightarrow{DA}$ 會分別交於 P_3 、 P_4 兩點，如上圖 $R5-2$ 所示，又 $B=P=P_1=P_6=P_7=P_8$ ， P_2 與 P_5 在無窮遠處，所以

i. $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=0+1+1+0=2$ ；

ii. $\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=1+1+0+0=2$ ；

iii. 將上述 (a) 與 (b) 兩式相加即得

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=4$$

故**定理 3** 中的結論成立。

□

試著將**問題 6** 裡的『正方形』換成『正五邊形』，看看是不是會有類似的結果，詳述如下。

問題 6.

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 為一正五邊形，點 P 在正五邊形 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 的內部，連結直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$ ， $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點， $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4 、 P_5 與 P_6 三點， $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7 、 P_8 與 P_9 三點， $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_10 、 P_11 與 P_12 三點， $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_13 、 P_14 與 P_15 三點，如下圖 6 – 1 所示，試證明：

(1)

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+\frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}}+\frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}}+\frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+\frac{\overline{PP_8}}{\overline{A_3P_8}}+\frac{\overline{PP_{11}}}{\overline{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$$

(3)

$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+\frac{\overline{PP_6}}{\overline{A_2P_6}}+\frac{\overline{PP_9}}{\overline{A_3P_9}}+\frac{\overline{PP_{12}}}{\overline{A_4P_{12}}}+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(4)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

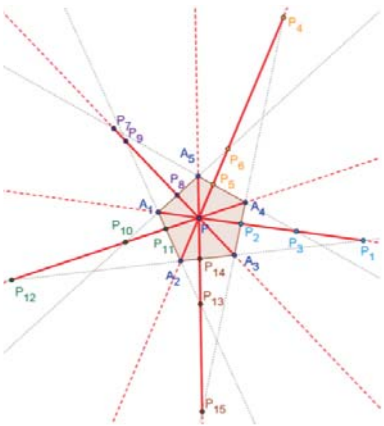

圖 6 - 1

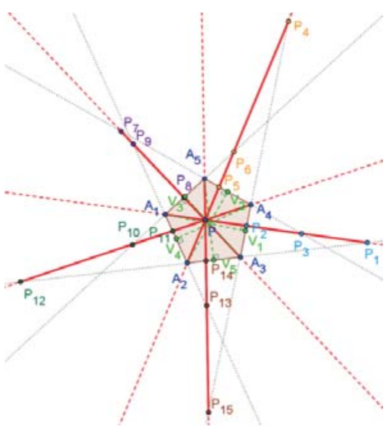

圖 6 - 2

證明.

作輔助線，切割正五邊形求其面積，再利用相似三角形性質將線段比值代換成另外一線段比值，合併後即可得證原命題成立。 □

試著將**問題 6** 中的定點 P 移至正五邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 4. **（正五邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

已知 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 為一正五邊形，點 P 為平面上異於正五邊形 Γ 五頂點之一定點，連結直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$ ， $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點， $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4 、 P_5 與 P_6 三點， $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7 、 P_8 與 P_9 三點， $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_10 、 P_11 與 P_12 三點， $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_13 、 P_14 與 P_15 三點，如圖 $T4-1$ 所示，則：

(1)
$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(2)
$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$$

(3)
$$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(4)
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

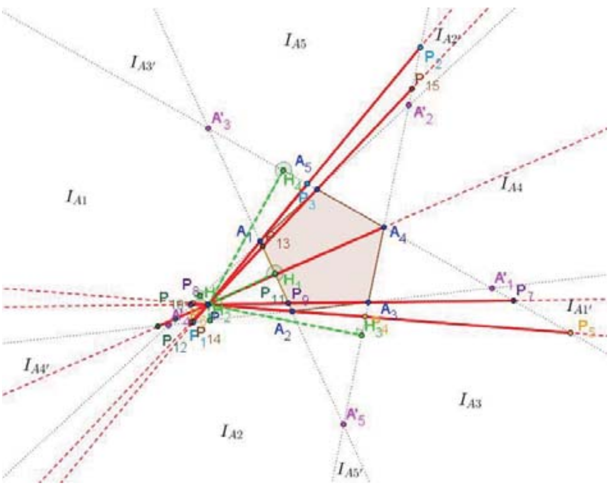

圖 T4 - 1

證明.

首先將正五邊形的外部分成 15 個區域（即 $I_{A_1A_2A'_4}$ 、 $I_{A_2A_3A'_5}$ 、 $I_{A_3A_4A'_1}$ 、 $I_{A_4A_5A'_2}$ 、 $I_{A_5A_1A'_3}$ 、 $I_{A'_1}$ 、 $I_{A'_2}$ 、 $I_{A'_3}$ 、 $I_{A'_4}$ 、 $I_{A'_5}$ 、 I_{A_1} 、 I_{A_2} 、 I_{A_3} 、 I_{A_4} 、與 I_{A_5} 等十五個區域），再加上正五邊形的內部，共可分成 16 個區域，如上圖 $T3-1$ 所示，接下來我們將就 P 點所在之位置分類討論，由**定義 2** 且仿**問題 6** 之證法即可證得原命題成立。 □

備註 6.

(1) 承上述**定理 4** ,如果 P 點不與正五邊形 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 之五頂點重合,且 P 點與正五邊形 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 某頂點之連線平行 Γ 之某邊所在直線，則該頂點與 P 點的連線會與正五邊形 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 之該平行邊所在直線平行，即此連線不與該邊所在直線有交點，此時，若我們定義此連線與該邊所在直線相交於無窮遠處，並規定此頂點到此無窮遠交點之有向線段與 P 點到此無窮遠交點之有向線段的比值為 1 ，則上述**定理 4** 中的結論亦會成立。

(2) 承上述**定理 4** 與 **備註 6** (1) 中之定義與規定，如果 P 點與正五邊形 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 的某頂點重合，則**定理 4** 中的結論可『視為不成立』或『視為成立』。

證明.

設正五邊形之邊長 $\overline{A_1A_2} = a$

(1) 我們僅討論 P 點在正五邊形 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 內部且 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 平行的情形，其他情形的證明方法類似，如下圖 $R6-1$ 所示，

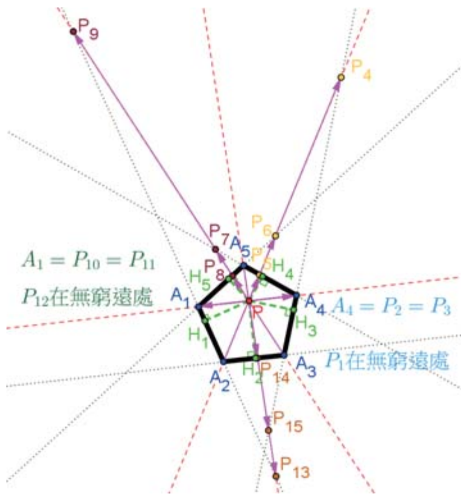

圖 R6 - 1

(a) $$\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right) = \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}} + \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}} + \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}} + \frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}} + \frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}$$

$$= 1 + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}} + \frac{\overline{PP_7}}{\overline{A_3P_7}} + \frac{\overline{PP_{10}}}{\overline{A_4P_{10}}} + \frac{\overline{PP_{13}}}{\overline{A_5P_{13}}}$$

$$= \frac{a\cos 18^\circ}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ} + \frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{1}{a\cos 18^\circ}\left(\overline{PH_2} + \overline{PH_3} + \overline{PH_4} + \overline{PH_5} + \overline{PH_1}\right) = \frac{1}{a\cos 18^\circ} \times \frac{5a\tan 54^\circ}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}$

$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_45}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+$
$\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}=\sqrt{5}$

(c) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}$

$=\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}+1+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}$

$=\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}+\frac{a\cos 18^\circ}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}$

$=\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

(d) 將上述 (a) 、 (b) 與 (c) 三式相加即得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=5+2\sqrt{5}$$

(2)

觀點一： 視為不成立的理由

假設點 P 與頂點 A_1 重合，則直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 無定義，所以**定理 3** 中 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點亦不存在，故**定理 3** 中的原等式無意義，或說原等式不成立。

觀點二： 視為成立的理由

假設點 P 與頂點 A_1 重合，若我們定義直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 為通過 A_1 點的任意直線，則此時 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點，如下圖 $R6-2$ 所示，

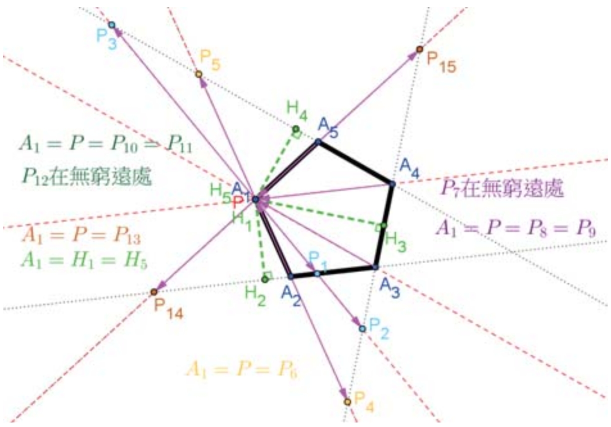

圖 R6 - 2

又 $A_1=P=P_1=P_6=P_9=P_9=P_{10}=P_{11}=P_{13}$ ，所以

(a) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}$

$=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_2P_4}}+1+0+0$

$=\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}$

$=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_5}}{\overline{A_2P_5}}+0+0+\frac{\overline{PP_{14}}}{\overline{A_5P_{14}}}$

$=\frac{\overline{PH_3}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_4}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}+$
$\frac{\overline{PH_2}}{2a\cos 36^\circ\cos 18^\circ}=\sqrt{5}$

(c) $\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}$

$=\frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_1P_3}}+0+0+1+\frac{\overline{PP_{15}}}{\overline{A_2P_{15}}}$

$=\frac{\overline{PH_4}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_5}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_1}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_2}}{a\cos 18^\circ}+\frac{\overline{PH_3}}{a\cos 18^\circ}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

(d) 將上述 (a) 、 (b) 與 (c) 三式相加即得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}} &= \left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{5}\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)\\ &= 5+2\sqrt{5}\end{aligned}$$

□

定理 5. （正六邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）

定理 6. （正八邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）

由上述**問題 4** 與**定理 3** ，我們推測在『正 $2n$ 邊形』中應該也有類似的結果，驗證其結論如下：

定理 7. （正 $2n$ 邊形之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）

已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$ 為一正 $2n$ 邊形，點 P 在正 $2n$ 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的內部，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n\}$ ，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-2)}$ 、 $P_{2+(i-1)(2n-2)}$ 、 $P_{3+(i-1)(2n-2)}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{(2n-2)+(i-1)(2n-2)}$ 與 $P_{i(2n-2)}$ 等 $2n-2$ 個點，則

(1)

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right) &= \frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{1+(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{1+(2n-2)(2n-2)}}}\\ &= \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right) = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{2+(2n-2)(2n-3)}}}$$

$$= \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{k\pi}{n}}$$

(3) (a) 當 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right) = \frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-1)(2n-2)}}}$$

$$= \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{k\pi}{n}}$$

(b) 當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-3\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right) = \frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-2)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-1)(2n-2)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-1)(2n-2)}}}$$

$$= \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\frac{k\pi}{n}}$$

(4)

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}} = \left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum\lim_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

(6)

$$\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}-\frac{1}{2}\left(\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$$

證明.

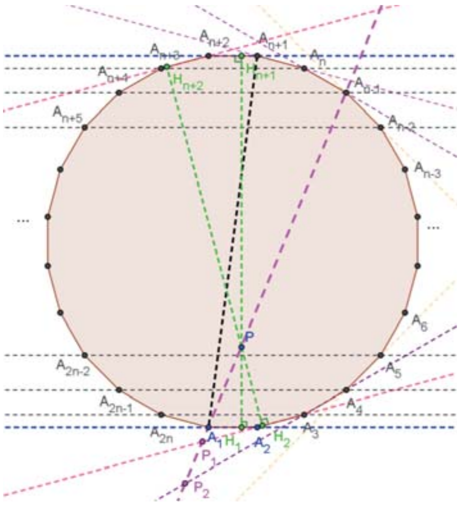

圖 T7 - 1

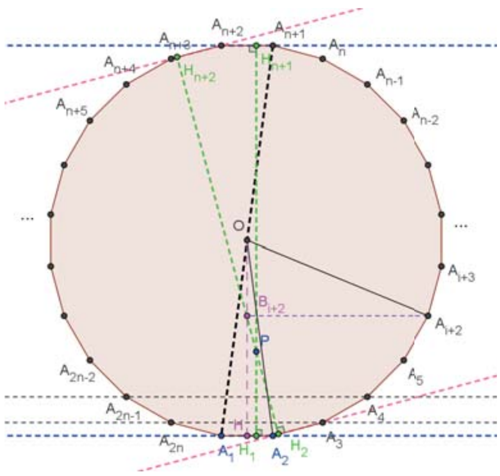

圖 T7 - 2

對於每一個 $i \in \{1, 2, \cdots, 2n\}$ ，我們均過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 H_i ，如上圖 $T7-1$ 所示。

(1) 假設正 $2n$ 邊形 Γ 之邊長為 a 且 O 為正 $2n-1$ 邊形 Γ 之中心，則

(a) $$\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right) = \left(\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}} + \frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}} + \cdots + \frac{\overline{PH_{2n}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}} + \frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}}\right)$$
$$= \frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left(\overline{PH_2} + \overline{PH_3} + \cdots + \overline{PH_{2n-1}} + \overline{PH_{2n}} + \overline{PH_1}\right)$$
$$= \frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left(\left(\overline{PH_1} + \overline{PH_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\overline{PH_{n-1}} + \overline{PH_{2n-1}}\right) + \left(\overline{PH_n} + \overline{PH_{2n}}\right)\right)$$

再由正 $2n$ 邊形的對稱性得知

$$\left(\overline{PH_1} + \overline{PH_{n+1}}\right) = \left(\overline{PH_2} + \overline{PH_{n+2}}\right) = \cdots = \left(\overline{PH_{n-1}} = \overline{PH_{2n-1}}\right) = \left(\overline{PH_n} + \overline{PH_{2n}}\right)$$

所以

$$\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right) = \frac{1}{a\sin\frac{180^\circ}{n}}\left(n \times \left(\overline{PH_1} + \overline{PH_{n+1}}\right)\right)$$

(b)

觀點一： 由上圖 $T7-1$ 知

$$\begin{aligned}
\overline{PH_1} + \overline{PH_{n+1}} &= a\sin\frac{360^\circ}{2n} + a\sin\frac{720^\circ}{2n} + a\sin\frac{1080^\circ}{2n} + \cdots + a\sin\frac{(n-1)\times 360^\circ}{2n} \\
&= a\left(\sin\frac{360^\circ}{2n} + \sin\frac{720^\circ}{2n} + \sin\frac{1080^\circ}{2n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\times 360^\circ}{2n}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

觀點二： 將正 $2n$ 邊形切成等大的 $2n$ 個三角形，則其面積為 $2n\times\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$，又正 $2n$ 邊形面積 $= n\times(\Delta PA_1A_2+\Delta PA_{n+1}A_{n+2})$ $= n\left(\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_{n+1}}\right)$，所以由用兩種方來計算正 $2n$ 邊形的面積得， $2n\times\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)=n\left(\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_1}+\frac{1}{2}\times a\times\overline{PH_{n+1}}\right)$

$\Rightarrow 2\times\left(\frac{a}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)=\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}$

$\Rightarrow \overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}=a\tan\frac{(n-1)\pi}{n}$

在下面的論述中，我們可以將 $\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}$ 之值以 $a\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$ 來取代，亦可以將 $\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}$ 之值以 $a\tan\frac{(n-1)\pi}{n}$ 來取代。

(c) 承上述 (b) ，我們依 n 的奇偶性分兩類情形來討論 $\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$ 之和，詳述如下，

i. 若 n 是奇數，則

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\\
=\quad&\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\\
=\quad&\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{\left(\frac{(n-1)}{2}\right)\pi}{n}+\sin\frac{\left(\frac{(n+1)}{2}\right)\pi}{n}\right)\\
=\quad&2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}+2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{(n-4)\pi}{2n}+\cdots2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2n}\\
=\quad&2\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}+\cos\frac{(n-4)\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

ii. 若 n 是偶數，則

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\\
=\quad&\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\\
=\quad&\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi}{n}+\sin\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi}{n}\right)+\sin\frac{\frac{n}{2}\pi}{n}\\
=\quad&2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}+2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{(n-4)\pi}{2n}+\cdots2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2}\\
=\quad&2\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}+\cos\frac{(n-4)\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{\pi}{2n}\right)+1
\end{aligned}$$

(d) 結合上述 (a) 與 (b) 之結果得知

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right) &= \frac{1}{a\sin\frac{\pi}{n}}\left(n\times\left(\overline{PH_1}+\overline{PH_{n+1}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{a\sin\frac{\pi}{n}}\left(a\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times n\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

故得證原命題。

(2)

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)\\ =&\left(\frac{\overline{PH_3}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_4}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\cdots+\frac{\overline{PH_{2n-1}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}\right.\\ &\left.+\frac{\overline{PH_{2n}}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_1}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}+\frac{\overline{PH_2}}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+a\sin\frac{720^\circ}{2n}}\right)\\ =&\frac{1}{a\sin\frac{\pi}{n}+a\sin\frac{2\pi}{n}}\left(\overline{PH_3}+\overline{PH_4}+\cdots+\overline{PH_{2n-1}}+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}+\overline{PH_2}\right)\\ =&\frac{1}{a\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\right)}\left(a\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times n\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}\end{aligned}$$

故得證原命題。

(3) 為了方便起見，對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,2n-2\}$ 我們定義 $R_{2n,i}=\left(\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)$

(a) 當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$ 時，

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)\\ =&\frac{1}{a\sin\frac{360^\circ}{2n}+\cdots+a\sin\frac{i\times360^\circ}{2n}}\left(\overline{PH_{i+1}}+\overline{PH_{i+2}}+\cdots+\overline{PH_{2n}}+\overline{PH_1}+\cdots+\overline{PH_i}\right)\\ =&\frac{1}{a\left(a\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+a\sin\frac{i\pi}{n}\right)}\left(a\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times n\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}\end{aligned}$$

故得證原命題。

(b) 當 $i \in \{n, n+1, \cdots, 2n-2\}$ 時，由正 $2n$ 邊形的對稱性可知：
對於每一個 $i \in \{n, n+1, \cdots, 2n-2\}$ ， $R_{2n,i} = R_{2n,(2n-2)-(i-1)}$ ，即此時

$$R_{2n,i} = R_{2n,(2n-2)-(i-1)} = \frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$$

故得證原命題。

(4) 因為 $R_{2n,i} = R_{2n,(2n-2)-(i-1)}$ ，所以將 (3) 所得之 $2n-2$ 個等式相加即得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}} &= 2\left(\frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}} + \cdots + \frac{n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)\\ &= 2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

故得證原命題。

(5) 由上述 (1) 中之 (a) ，我們得知等式 $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 必成立，故得證原命題。

(6) 如上圖 $T7-2$ 所示，

(a) 假設線段 $\overline{OH}$ 垂直線段 $\overline{A_1A_2}$ 於 H 點 ，則 $\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ ， $\angle A_1OH = \angle A_2OH = \frac{\pi}{2n}$ ， $\angle A_{i+2}OH = \angle A_{i+2}OA_2 + \angle A_2OH = \frac{\pi}{n}((i+2)-2) + \frac{\pi}{2n} = \frac{(n-1)\pi}{2n}$ 。

(b) $\angle OA_1H = \frac{1}{2}\times$（正 $2n$ 邊形的內角）$= \frac{1}{2}\times\frac{(2n-2)\pi}{2n} = \frac{(n-1)\pi}{2n}$ ， $\cos\angle OA_1H = \frac{\overline{A_1H}}{\overline{OA_1}} \Rightarrow \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\frac{1}{2}a}{\overline{OA_1}} \Rightarrow \overline{OA_1} = \frac{1}{2}a\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}$ 。

(c) 由下圖 $T7-3$ 與 (a) 、 (b) 知， $\overline{OB_{i+2}} = \overline{OA_{i+2}}\cos\angle A_{i+2}OH$
$= \frac{1}{2}a\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}$ 。

(d) $\tan\angle OA_1H = \frac{\overline{OH}}{\overline{A_1H}} \Rightarrow \tan\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\overline{OH}}{\frac{1}{2}a} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{1}{2}a\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$ ，
所以 $\overline{B_{i+2}H} = \overline{OH} - \overline{OB_{i+2}} = \frac{1}{2}a\tan\frac{(n-1)\pi}{2n} - \frac{1}{2}a\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}$ 。

(e) 由下圖 $T7-3$ 知，
$\sum_{k=1}^{i}a\sin\frac{k\pi}{n} = \overline{B_{i+2}H} = \frac{1}{2}a\tan\frac{(n-1)\pi}{2n} - \frac{1}{2}a\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}$ ，
所以 $\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n} - \frac{1}{2}a\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}$

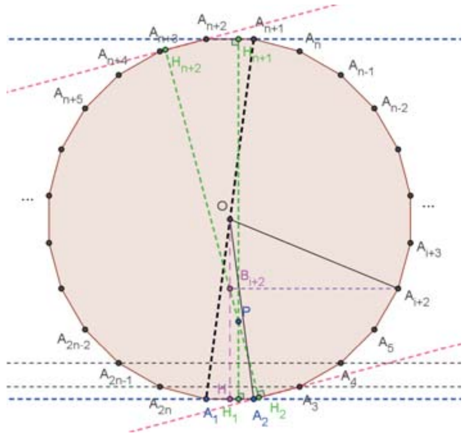

圖 T7 - 3

□

試著將**定理 7** 中的定點 P 移至正 $2n$ 邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 8. **（正 $2n$ 邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

已知 $\Gamma : A_1A_2\cdots A_{2n}$ 為一正 $2n$ 邊形，點 P 為平面上異於正 $2n$ 邊形 Γ 的 $2n$ 個頂點之一定點，對於 $i \in \{1,2,\cdots,2n\}$ ，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-2)}$ 、 $P_{2+(i-1)(2n-2)}$ 、 $P_{3+(i-1)(2n-2)}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{(2n-3)+(i-1)(2n-2)}$ 與 $P_{i(2n-2)}$ 等 $2n-2$ 個點，則

(1)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{1+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sin\frac{2\pi}{N}}$ 。

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{2+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{2}\sin\frac{k\pi}{n}}$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sum\limits_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{N}}$ 。

(3) (a) 當 $i \in \{1,2,\cdots,\dfrac{2n-2}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}}$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{N}}$ 。

(b) 當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-2)-(i-1)}\sin\frac{k\pi}{n}}$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sum\limits_{k=1}^{(N-2)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{N}}$ 。

(4)

$$\sum_{i=1}^{2n-2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}=\left(2n\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sum\lim_{k=1}^{j}\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\tan\dfrac{(N-2)\pi}{2N}$ 。

(6)

$$\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}-\frac{1}{2}\left(\sec\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{(N-2)\pi}{2N}-\dfrac{1}{2}\left(\sec\dfrac{(N-2)\pi}{2N}\right)\left(\cos\dfrac{(2i+1)\pi}{N}\right)$ 。

證明.

仿**定理 7** 之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用**定義 2** 與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

備註 7.

(1) 承上述**定理 8** ，如果 P 點不與正 $2n$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n}$ 之 $2n$ 個頂點重合，且 P 點與正 $2n$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n}$ 某頂點 A_i 之連線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 平行 Γ 之某邊所在直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ ，即此連線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 不與直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 相交，此時，若我們定義此連線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 與直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 相交於無窮遠處，並規定頂點 A_i 到此無窮遠交點 P_a 之有向線段與 P 點到此無窮遠交點 P_a 之有向線段的比值 $\dfrac{\overrightarrow{PP_a}}{\overrightarrow{A_iP_a}}$ 為定值 1 ，則上述**定理 8** 中的結論亦會成立。

(2) 承上述**定理 8** 與**備註 7** (1) 中之定義與規定，如果 P 點與正 $2n$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n}$ 某頂點 A_i 重合，則**定理 8** 中的結論可『視為不成立』或『視為成立』。

證明.

仿**備註 5** 與**備註 6** 之證明方法即可證明上述結論成立。 □

由上述**引理 1** 與**問題 6**，我們推測在『正 $2n-1$ 邊形』中應該也有類似的結果，驗證其結論如下：

定理 9.（正 $2n-1$ 邊形之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）

已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 為一正 $2n-1$ 邊形，點 P 在正 $2n$ 邊形 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 的內部，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、 … 、 $\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-3)}$ 、 $P_{2+(i-1)(2n-3)}$ 、 $P_{3+(i-1)(2n-3)}$ 、 … 、 $P_{(2n-3)+(i-1)(2n-3)}$ 與 $P_{i(2n-3)}$ 等 $2n-3$ 個點，則

(1)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}}+\frac{\overline{PP_{1+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{1+(2n-3)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{1+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{1+(2n-2)(2n-3)}}}$$
$$=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$$

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_1P_2}}+\frac{\overline{PP_{2+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{2+(2n-3)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{2+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{2+(2n-2)(2n-3)}}}$$
$$=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$

(3) (a) 當 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}$$
$$=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$

(b) 當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-3\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_1P_i}}+\frac{\overline{PP_{i+(2n-3)}}}{\overline{A_2P_{i+(2n-3)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{i+(2n-2)(2n-3)}}}{\overline{A_{2n-1}P_{i+(2n-2)(2n-3)}}}$$
$$=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\left(\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$

(4)

$$\sum_{i=1}^{2n-3}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overline{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overline{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+2\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}=\tan\frac{(2(n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}+\frac{1}{2}\sec\frac{((2n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}$$

(6)

$$\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}=\frac{1}{2}\tan\frac{((2n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}-\frac{1}{2}\left(\sec\frac{((2n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}\right)\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n-1}\right)$$

證明.

仿**定理 7** 之證法可以得證原命題成立。 □

試著將**定理 9** 中的定點 P 移至正 $2n-1$ 邊形的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 10. **（正 $2n-1$ 邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**
已知 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 為一正 $2n-1$ 邊形，點 P 為平面上異於正 $2n-1$ 邊形 Γ 的 $2n-1$ 個頂點之一定點，對於 $i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$ ，連接直線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 、$\overleftrightarrow{A_{i+2}A_{i+3}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+3}A_{i+4}}$ 、 $\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i-3}A_{i-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}}$ 於 $P_{1+(i-1)(2n-3)}$ 、 $P_{2+(i-1)(2n-3)}$ 、 $P_{3+(i-1)(2n-3)}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{(2n-3)+(i-1)(2n-3)}$ 與 $P_{i(2n-3)}$ 等 $2n-3$ 個點，則

(1)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{1+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$$

令 $N=2n-1$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sin\frac{2\pi}{N}}$ 。

(2)

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{2+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+(k-1)(2n-3)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$

令 $N=2n-1$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sum_{k=1}^{2}\sin\frac{2k\pi}{N}}$ 。

(3) (a) 當 $i\in\{1,2,\cdots,\frac{2n-2}{2}\}$ 時，則

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2\pi}{2n-1}}$$

令 $N=2n-1$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{N}}$ 。

(b) 當 $i\in\{n,n+1,\cdots,2n-2\}$ 時，

$$\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-2)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-2)}}}\right)=\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}$$

令 $N=2n-1$ ，則左式 $=\dfrac{\frac{N}{2}\tan\left(\frac{N-2}{2N}\pi\right)}{\sum\limits_{k=1}^{(N-2)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{N}}$ 。

(4)

$$\sum_{i=1}^{2n-3}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\overrightarrow{PP_{i+(k-1)(2n-3)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+(k-1)(2n-3)}}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+\sum_{i=1}^{2n-3}\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{(2n-3)-(i-1)}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)+2\sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{\frac{2n-1}{2}\tan\frac{(2n-3)\pi}{2(2n-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}}\right)$$

(5)

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}=\tan\frac{(2(n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}+\frac{1}{2}\sec\frac{((2n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\tan\dfrac{(N-2)\pi}{2N}+\dfrac{1}{2}\sec\dfrac{(N-2)\pi}{2N}$ 。

(6)

$$\sum_{k=1}^{i}\sin\frac{2k\pi}{2n-1}=\frac{1}{2}\tan\frac{((2n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}-\frac{1}{2}\left(\sec\frac{((2n-1)-2)\pi}{2(2n-1)}\right)\left(\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n-1}\right)$$

令 $N=2n$ ，則左式 $=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{(N-2)\pi}{2N}-\dfrac{1}{2}\left(\sec\dfrac{(N-2)\pi}{2N}\right)\left(\cos\dfrac{(2i+1)\pi}{N}\right)$ 。

證明.

仿**定理 9** 之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用**定義 2** 與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

備註 8.

(1) 承上述**定理 10** ，如果 P 點不與正 $2n-1$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 之 $2n-1$ 個頂點重合，且 P 點與正 $2n-1$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n-1}$ 某頂點 A_i 之連線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 平行 Γ 之某邊所在直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ ，即此連線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 不與直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 相交，此時，若我們定義此連線 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 與直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 相交於無窮遠處，並規定頂點 A_i 到此無窮遠交點 P_a 之有向線段與 P 點到此無窮遠交點 P_a 之有向線段的比值 $\dfrac{\overrightarrow{PP_a}}{\overrightarrow{A_iP_a}}$ 為定值 1 ，則上述**定理 10** 中的結論亦會成立。

(2) 承上述**定理 10** 與**備註 8** (1) 中之定義與規定，如果 P 點與正 $2n-1$ 邊形 $\Gamma:A_1A_2\cdots A_{2n}$ 某頂點 A_i 重合，則**定理 10** 中的結論可『視為不成立』或『視為成立』。

證明.

仿**備註 5** 與**備註 6** 之證明方法即可證明上述結論成立。 □

接下來，我們又試著將平面上的結論推廣到立體空間中的『任意四面體』與『正多面體』，我們發現**引理 1** 在『任意四面體』與『正多面體』中均有類似的推論，詳細結果如下之**引理 3**、**定理 11**、**定理 12**、**定理 13**、**定理 14**、**定理 15**、**定理 16**、**定理 17**、**定理 18** 與**定理 19**。

在參考資料 [1] 中，曾提及**引理 1** 在立體空間中的推論，我們將其結果詳細描述如下：

引理 3. **(任意四面體之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質)**

假設 $\Gamma: A-BCD$ 為空間中一四面體，且 P 點為四面體 內部一點，又直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別與平面 E_{BCD}、E_{ACD}、E_{ABD}、E_{ABC} 交於 P_1、P_2、P_3、P_4 四點，如下圖 $III-1$ 與 $III-2$ 所示，則

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}+\frac{\overline{PP_2}}{\overline{BP_2}}+\frac{\overline{PP_3}}{\overline{CP_3}}+\frac{\overline{PP_4}}{\overline{DP_4}}=1$$

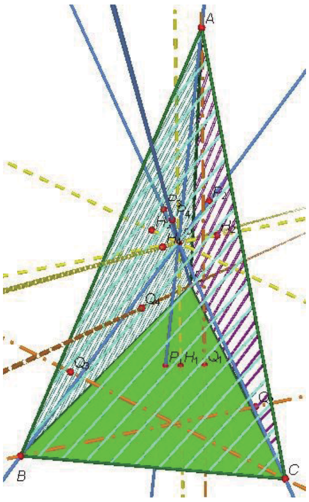

圖 III - 1

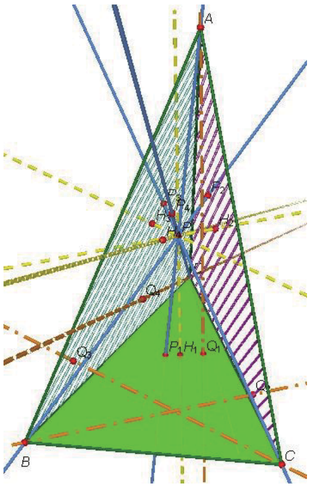

圖 III - 2

證明.

利用三角形相似性質與三角錐體積公式將線段比值轉換成三角錐體積比值即可證得原命題成立。 □

試著將**引理 3** 中的定點 P 移至四面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 11. **(任意四面體之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質)**

假設 $\Gamma: A-BCD$ 為空間中一四面體，且點 P 為空間中異於四面體 Γ 之四個頂點的一定點，又直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別與平面 E_{BCD}、E_{ACD}、E_{ABD}、E_{ABC} 交於 P_1、P_2、P_3、P_4 四點，如下圖 $III-1$ 與 $III-2$ 所示，則

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{BP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{CP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{DP_4}}=1$$

證明.

我們依點 P 所在的位置分成四大類情形討論，再由**定義 2** 與利用**引理 3** 的證法即可得證原命題。 □

我們試著考慮**引理 3** 在『正六面體』上的推論，而有了如下**定理 12** 的結果。

定理 12. （正立方體之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）

已知正立方體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ ，且 P 點為正立方體內部一點，對於 $k \in \{1,2,\cdots,8\}$ ，直線 $\overleftrightarrow{A_kP}$ 分別交包含 Γ 之六個面的六個平面中不通過 A_k 點之三個平面於 $P_{1+3(k-1)}$ 、 $P_{2+3(k-1)}$ 與 $P_{3+3(k-1)}$ 三點，則

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{PP_{i+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overline{PP_{1+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+3(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$$

證明.

利用相似三角形性質將線段比值作適當代換成另一線段比值，再分組合併後，即可得證原命題成立。 □

試著將**定理 12** 中的定點 P 移至正立方體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 13. （正立方體之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）

承**定理 12** ，已知正立方體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ ，點 P 為空間中不落在正立方體 Γ 之六個面所在平面的一定點，其餘前提條件均同**定理 12** ，試證明：

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{PP_{i+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+3(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+3(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+3(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+3(k-1)}}}\right)=12$$

證明.

我們將依點 P 所在的位置分成幾類情形討論，仿**定理 12** 之證法即可得證原命題成立。 □

備註 9.

將**定理 12** 與**定理 13** 中的『正立方體』換成『長方體』或『平行六面體』時，結論亦成立，證明方法類似，僅需將直線 $\overleftrightarrow{PH_i}$ 改成通過 P 點且平行『長方體』或『平行六面 體』兩互相平行平面的直線即可。

完成**引理 3** 在『正立方體』的推論之後，我們接著去考慮**引理 3** 在『正八面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理 14. （正八面體之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）

已知正八面體 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ，且 P 點為正八面體內部一點，對於 $k \in \{1,2,\cdots,6\}$ ，直線 $\overleftrightarrow{A_kP}$ 分別交包含 Γ 之八個面的八個平面中不通過 A_k 點之四個平面於 $P_{1+4(k-1)}$ 、 $P_{2+4(k-1)}$ 、 $P_{3+4(k-1)}$ 與 $P_{4+4(k-1)}$ 四點，如下圖 $T14-1$ 與圖 $T14-2$所示，則

$$\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overline{PP_{i+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overline{PP_{1+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{3+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{4+4(k-1)}}}{\overline{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$$

證明.

利用相似三角形性質將線段比值作適當代換成另一線段比值，再分組合併後，即可得證原命題成立。 □

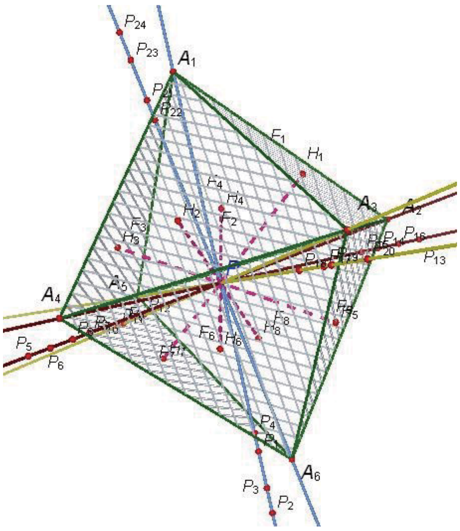

圖 T14 - 1

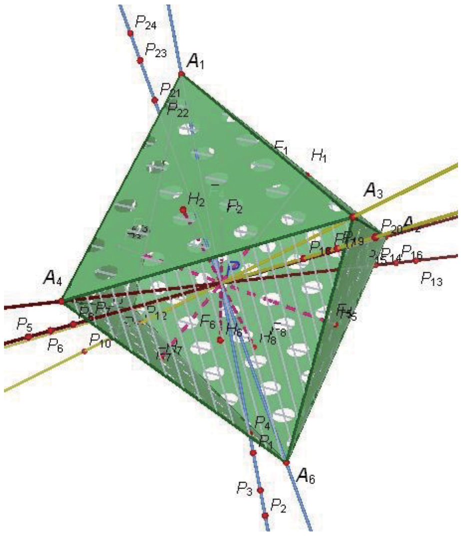

圖 T14 - 2

試著將**定理 14** 中的定點 P 移至正八面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 15. **（正八面體之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

承**定理 14** ,已知正八面體 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ，點 P 為空間中不落在 Γ 之八個面所在平面的一定點，其餘前提條件均同**定理 14** ，試證明：

$$\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{4}\frac{\overrightarrow{PP_{i+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+4(k-1)}}}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{3+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{3+4(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{4+4(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{4+4(k-1)}}}\right)=12$$

證明.

仿**定理 14** 之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用**定義 2** 與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

完成**引理 3** 在『正八面體』的推論之後，我們接著去考慮**引理 3** 在『正十二面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理 16. **（正十二面體之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）**

已知正十二面體 $\Gamma : A_1A_2\cdots A_{20}$ ，且 P 點為正二十面體 Γ 內部一點等。對於 $k\in\{1,2,\cdots,20\}$ ，，直線 $\overleftrightarrow{A_kP}$ 分別交包含 Γ 之十二個面的十二個平面中不通過 A_k 點之九個平面於 $P_{1+9(k-1)}$ 、 $P_{2+9(k-1)}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{9+9(k-1)}$ 等九點，又 a 表示 Γ 之任兩平行面的距離， b 與 c 分別表示 Γ 之任一頂點到包含不通過該頂點之 一組平行面的兩平面的距離，則

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+9(k-1)}}} &= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{\overline{PP_{1+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+9(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+9(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{9+9(k-1)}}}{\overline{A_kP_{9+9(k-1)}}}\right)\\ &= 30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{C}\right)=90+30\sqrt{5}\end{aligned}$$

證明.

利用相似三角形性質將線段比值作適當代換成另一線段比值，再分組合併後，即可得證原命題成立。 □

試著將**定理 16** 中的定點 P 移至正十二面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 17. **（正十二面體之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**
同**定理 16** 之前提，僅將『 P 點為正十二面體 Γ 內部一點』改為『點 P 為空間中不落在 Γ 之 十二個面所在平面的一定點』，試證：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overrightarrow{PP_{i+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+9(k-1)}}} &= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+9(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+9(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overrightarrow{PP_{9+9(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{9+9(k-1)}}}\right)\\ &= 30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{C}\right)=90+30\sqrt{5}\end{aligned}$$

證明.
仿**定理 16** 之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用**定義 2** 與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

完成**引理 3** 在『正十二面體』的推論之後，我們接著去考慮**引理 3** 在『正二十面體』的推論，於是有了如下的結果。

定理 18. **（正二十面體之頂點與其內部一定點連線所生線段比值之和的定性性質）**
已知正二十面體 $\Gamma: A_1A_2\cdots A_{12}$ ，且 P 點為正二十面體 Γ 內部一點等。對於 $k\in\{1,2,\cdots,12\}$ ，，直線 $\overleftrightarrow{A_kP}$ 分別交包含 Γ 之二十個面的二十個平面中不通過 A_k 點之十五個平面於 $P_{1+15(k-1)}$ 、 $P_{2+15(k-1)}$ 、 $\cdots$ 、 $P_{15+15(k-1)}$ 等十五點，又 a 表示 Γ 之任兩平行面的距離， b 與 c 分別表示 Γ 之任一頂點到包含不通過該頂點之 一組平行面的兩平面的距離，則

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{PP_{i+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{i+15(k-1)}}} &= \sum_{k=1}^{12}\left(\frac{\overline{PP_{1+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{1+15(k-1)}}}+\frac{\overline{PP_{2+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{2+15(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overline{PP_{15+15(k-1)}}}{\overline{A_kP_{15+15(k-1)}}}\right)\\ &= 30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{C}\right)=90+30\sqrt{5}\end{aligned}$$

證明.
利用相似三角形性質將線段比值作適當代換成另一線段比值，分組合併後，再利用餘弦定理與三角形重心性質，即可得證原命題成立。 □

試著將**定理 18** 中的定點 P 移至正二十面體的外部，並將之改寫成向量形式，則我們會有如下的結果。

定理 19. **（正二十面體之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**
同**定理 18** 之前提，僅將『 P 點為正二十面體 Γ 內部一點』改為『點 P 為空間中不落在 Γ 之二十個面所在平面的一定點』，試證：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{9}\frac{\overrightarrow{PP_{i+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{i+15(k-1)}}} &= \sum_{k=1}^{12}\left(\frac{\overrightarrow{PP_{1+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{1+15(k-1)}}}+\frac{\overrightarrow{PP_{2+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{2+15(k-1)}}}+\cdots+\frac{\overrightarrow{PP_{15+15(k-1)}}}{\overrightarrow{A_kP_{15+15(k-1)}}}\right)\\ &= 30a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{C}\right)=90+30\sqrt{5}\end{aligned}$$

證明.
仿**定理 18** 之證法，就 P 點所在之位置分類討論，再利用**定義 2** 與相似三角形性質，將每一個向量比值轉換成另一個線段比值，即可證得原命題。 □

◎**引理 1 在任意多邊形中的推廣**

前述至此的討論過程中，我們僅將**引理 1** 推論到『任意三角形』、『平行四邊形』、『正多邊形』、『任意四面體』、『平行六面體』與『正多面體』中。於此我們將進一步推論到『任意多邊形』的情形，我們先從『特殊四邊形』著手，再行討論『任意凸(或凹)四邊形』與『任意凸（或凹）五邊形』，進而思考『任意多邊形』之可能性。我們首先考慮一特殊梯形，如下**定理 20** 所示。

定理 20.（特殊梯形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）

已知 $\Gamma: ABCD$ 為平面上一梯形，滿足，$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$，$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$，$\overline{AD} \le \overline{BC}$，又點 P 為平面上不落在直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$，$\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、$\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、$\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 $T20-1$ 所示，試證明：

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}} + \frac{\sin C \times \cos\angle PCB}{\sin\angle DCP} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}} + \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}} = 2$$

(2)

$$\frac{\sin D \times \cos\angle PCB}{\sin\angle DCP} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}} + \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}} + \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}} + \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}} = 2$$

(3)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}} + \frac{\sin D \times \cos\angle PCB}{\sin\angle DCP} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}} + \frac{\sin C \times \cos\angle PCB}{\sin\angle DCP} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}$$
$$+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}} + \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}} + \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}} + \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}} = 4$$

註：上述 (1)、(2) 與 (3) 中的有向角 $\angle XOY$ 表示已射線 $\overrightarrow{OX}$ 為始邊且射線 $\overrightarrow{OY}$ 為終邊之逆時針旋轉的有向角，因此有向角 $\angle XOY$ 為正角。換句話說，$\angle XOY = 2\pi - \angle YOX$。

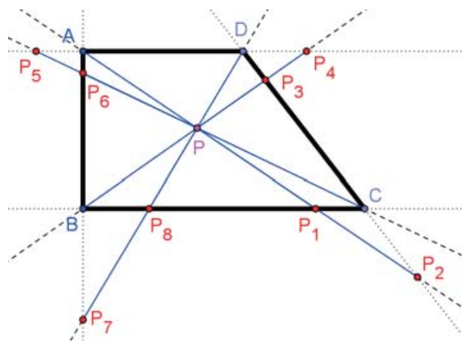

圖 T20 - 1

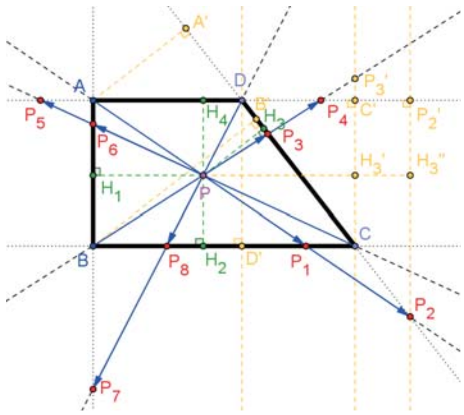

圖 T20 - 2

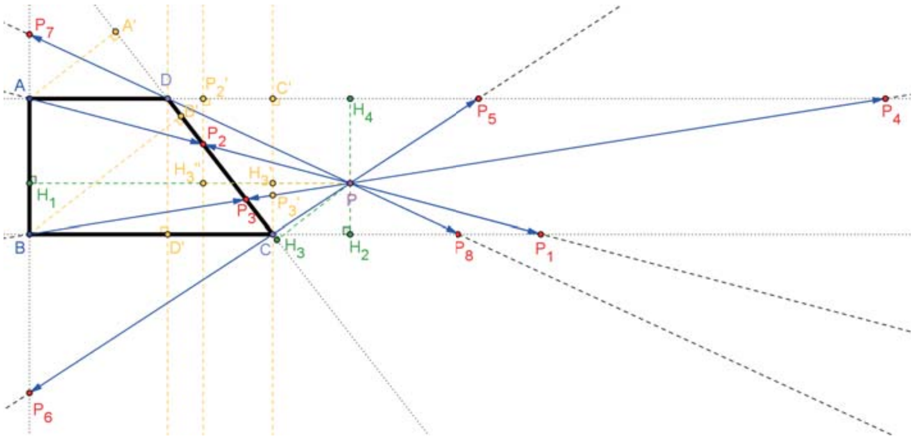

圖 T20 - 3

證明.

(1) 我分成兩大類情形討論如下：

(a) 當 P 點落在 Γ 內部時，如上圖 $T20-2$ 所示。

i. 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 H_1 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_2}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 H_2 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_3}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 H_3 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_4}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 交 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 H_4 ，如上圖 $T20-2$ 所示。

ii. 過 A 點作直線 $\overleftrightarrow{AA'}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 A' ，過 B 點作直線 $\overleftrightarrow{BB'}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 B' ，過 C 點作直線 $\overleftrightarrow{CC'}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 C' ，過 D 點作直線 $\overleftrightarrow{DD'}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 D' ，如上圖 $T20-2$ 所示。

iii. 假設直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 分別交直線 $\overleftrightarrow{CC'}$ 與 $\overleftrightarrow{P_2P_2'}$ 於 H_3' 與 H_3'' ，且直線 $\overleftrightarrow{BP}$ 交直線 $\overleftrightarrow{CC'}$ 於 P_3' ，如上圖 $T20-2$ 所示。

iv. 由三角形相似性質與**定義 2** 知，

(i) $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}} = \dfrac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}} = \dfrac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}$

(ii) $\because \overline{PH_3} = \overline{PC}\sin\angle DCP$ ， $\overline{PH_3'} = \overline{PC}\cos\angle PCB$ ，

$\therefore \dfrac{\overline{PH_3}}{\overline{PH_3'}} = \dfrac{\overline{PC}\sin\angle DCP}{\overline{PC}\cos\angle PCB} = \dfrac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}$ ，

亦即 $\overline{PH_3} = \overline{PH_3'} \times \dfrac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}$ ，

所以 $\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}} = \dfrac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}} = \dfrac{\overline{PH_3}}{\overline{BP_3}} = \dfrac{\overline{PH_3'} \times \frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{BC} \times \sin C}$ ，故

$$\frac{\sin C \times \cos\angle PCB}{\sin\angle DCP} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}} = \frac{\sin C \times \cos\angle PCB}{\sin\angle DCP} \times \frac{\overline{PH_3'} \times \frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{BC} \times \sin C} = \frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}$$

(iii) $\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}} = \dfrac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}} = \dfrac{\overline{PH_4}}{\overline{CC'}} = \dfrac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}$

(iv) $\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}} = \dfrac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}} = \dfrac{\overline{PH_1}}{\overline{DA}} \Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \dfrac{\overline{PH_1}}{\overline{DA}} = \dfrac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}$

將上述 (i) 、 (ii) 、 (iii) 、 (iv) 之結果相加得

$$\begin{aligned}
&\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}\\
=\ &\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{PH_2}+\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}+\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}\\
=\ &\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=2
\end{aligned}$$

故得證此時原命題成立。

(b) 當 P 點落在 Γ 外部時，於此我們僅討論上圖 $T20-3$ 之情形， P 點落在 Γ 外部的其他區域的證明方法會類似於下述之證法。

i. 同上述 (a) 之步驟 i 、 ii 與 iii ，圖形如圖 $T20-3$ 所示。

ii. 由三角形相似性質與定義二知，

(i) $\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}$

(ii) $\because\overline{PH_3}=\overline{PC}\sin\angle H_3CP=\overline{PC}\sin(\pi-\angle PCD)=\overline{PC}\sin(3\pi-\angle DCP)$
$=-\overline{PC}\sin\angle DCP$ ，且 $\overline{PH_3'}=\overline{PC}\cos\angle H_2CP=\overline{PC}\cos(\pi-\angle PCB)=$
$-\overline{PC}\cos\angle PCB$ ，

$\therefore\frac{\overline{PH_3}}{\overline{PH_3'}}=\frac{-\overline{PC}\sin\angle DCP}{-\overline{PC}\cos\angle PCB}=\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}$ ，

亦即 $\overline{PH_3}=\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}$ ，

所以 $\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}=-\frac{\overline{PP_3}}{\overline{BP_3}}=-\frac{\overline{PH_3}}{\overline{BP_3}}=-\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{BC}\times\sin C}$ ，

故
$$\begin{aligned}
&\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}\\
=\ &\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\left(-\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{BC}\times\sin C}\right)=-\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}
\end{aligned}$$

(iii) $\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}=\frac{\overline{PP_5}}{\overline{CP_5}}=\frac{\overline{PH_4}}{\overline{CC'}}=\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}$

(iv) $\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PH_1}}{\overline{DA}}\Rightarrow\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overline{PH_1}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}$

將上述 (i) 、 (ii) 、 (iii) 、 (iv) 之結果相加得

$$\begin{aligned}
&\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}\\
=\ &\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}+\left(-\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}\right)+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{PH_2}+\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}-\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}\\
=\ &\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=2
\end{aligned}$$

故得證此時原命題成立。

(2) 我分成兩大類情形討論如下：

(a) 當 P 點落在 Γ 內部時，如上圖 $T20-2$ 所示。

i. 同上述 (a) 之步驟 i 、 ii 與 iii ，圖形如圖 $T20-2$ 所示。

ii. 由三角形相似性質與定義二知，

(i) $$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}=\frac{\overline{PH_3}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AD}\times\sin(\pi-D)}=\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AD}\times\sin D},$$

故 $$\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}$$
$$=\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AD}\times\sin D}=\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}$$

(ii) $$\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}=\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}$$

(iii) $$\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}=\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}=\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}$$

(iv) $$\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=\frac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}$$

將上述 (i) 、 (ii) 、 (iii) 、 (iv) 之結果相加得

$$\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}$$
$$=\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PH_2}+\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}+\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}$$
$$=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=2$$

故得證此時原命題成立。

(b) 當 P 點落在 Γ 外部時，於此我們僅討論上圖 $T20-3$ 之情形， P 點落在 Γ 外部的其他區域的證明方法會類似於下述之證法。

i. 同上述 (a) 之步驟 i 、 ii 與 iii ，圖形如圖 $T20-3$ 所示。

ii. 由三角形相似性質與定義二知，

(i) $$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}=-\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}=-\frac{\overline{PH_3}}{\overline{AA'}}=-\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AD}\times\sin(\pi-D)}=-\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AD}\times\sin D},$$

故 $$\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}$$
$$=\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\left(-\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AD}\times\sin D}\right)=-\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}$$

(ii) $$\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}=\frac{\overline{PP_4}}{\overline{BP_4}}=\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}$$

(iii) $$\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}=\frac{\overline{PP_6}}{\overline{CP_6}}=\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}$$

(iv) $\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=\dfrac{\overline{PP_8}}{\overline{DP_8}}=\dfrac{\overline{PH_2}}{\overline{DD'}}=\dfrac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}$

將上述 (i) 、 (ii) 、 (iii) 、 (iv) 之結果相加得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}\\
=&\left(-\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}\right)+\frac{\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PH_2}+\overline{PH_4}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{PH_1}-\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}\\
=&\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=2
\end{aligned}
$$

故得證此時原命題成立。

(3) 將上述 (1) 與 (2) 所得之兩等式相加即得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}\\
&+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=4
\end{aligned}
$$

故得證原命題成立。

□

備註 10.

由於梯形之對邊不再保證等長，且其中一組對邊不再平行，所以該結論中的等式已不如**定理 3** 那樣對稱，而需在某些有向線段比值乘上一倍數，不過從此結果的建立， 我們似乎看到了**引理 1** 推廣到『任意四邊形』中的可能性。

我們試著放寬**定理 20** 中之特殊梯形的限制，發現對任意梯形，均有如下的結果。

定理 21. **（任意梯形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

已知 $\Gamma:ABCD$ 為平面上一梯形，滿足 $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ ，又點 P 為平面上不落在直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 、 $\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$ ， $\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、 $\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、 $\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 $T21-1$ 所示，試證明：

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\sin A\times\cos\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=2$$

(2)

$$\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\sin B\times\cos\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=2$$

(3)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\sin D\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}+\frac{\sin C\times\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}$$
$$+\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}+\frac{\sin B\times\cos\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}\times\frac{\sin A\times\cos\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=4$$

註：上述 (1) 、 (2) 與 (3) 中的有向角 $\angle XOY$ 表示已射線 $\overrightarrow{OX}$ 為始邊且射線 $\overrightarrow{OY}$ 為終邊之逆時針旋轉的有向角，因此有向角 $\angle XOY$ 為正角。換句話說， $\angle YOX=2\pi-\angle XOY$ 。

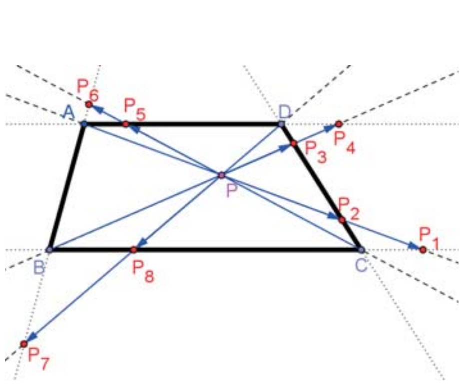

圖 T21 - 1

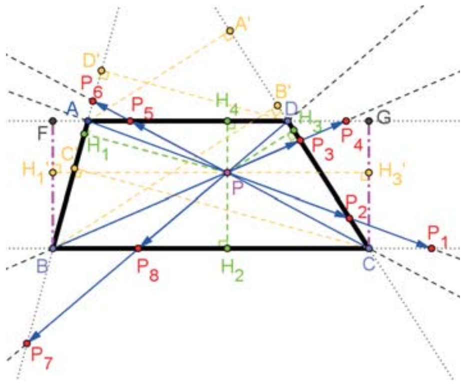

圖 T21 - 2

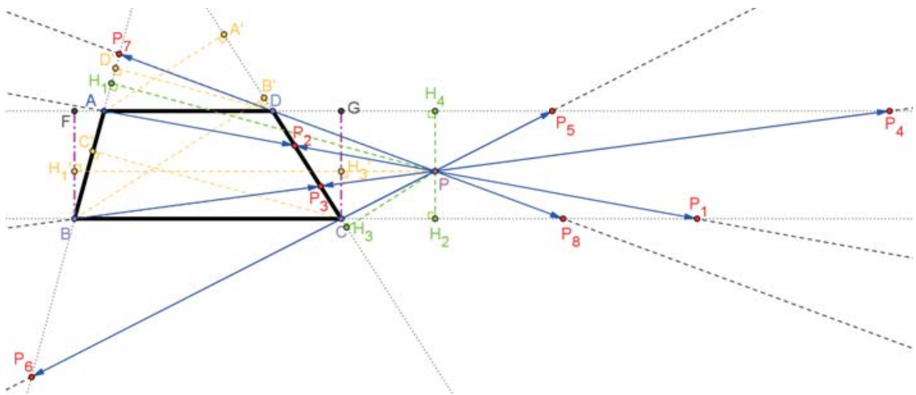

圖 T21 - 3

證明.

仿**定理 20** 之法即可得證原命題成立。 □

備註 11.

在**定理 21** 中，如果 $\angle BAD=\angle ABC=90°$ 且 $\overline{AD}\le\overline{BC}$ ，則其結果顯然會變成**定理 20** 之結果，故**定理 21** 一般化了**定理 20** ，也同時將**定理 3** 的結論推廣到任意的梯形中，如此，**定理 3** 在任意四邊形中的推論似乎又近了一步。

接下來，我們將考慮**引理 1** 在任意凸(或凹)四邊形中的推廣，如下**定理 22** 所示。

定理 22.（任意凸或凹四邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）

已知 $\Gamma : ABCD$ 為平面上一凸（或凹）四邊形，又點 P 為平面上異於 Γ 之四頂點的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、 $\overleftrightarrow{BP}$ 、 $\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DP}$ ， $\overleftrightarrow{AP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 P_1 與 P_2 兩點、 $\overleftrightarrow{BP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 於 P_3 與 P_4 兩點、 $\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 P_5 與 P_6 兩點、 $\overleftrightarrow{DP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 P_7 與 P_8 兩點，如下圖 $T22-1$ 所示，試證明：

(1)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} \times \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle DCB} \times \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}} + \frac{\sin C \times \cos \angle PCB}{\sin \angle DCP} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}$$
$$+ \frac{\sin(\angle DCB + \angle PDC)\sin \angle ADC}{\sin \angle ADP \times \sin \angle DCB} \times \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}} + \frac{\sin BAD \times \cos \angle CBP}{\sin \angle PBA} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}} = 2$$

(2)

$$\frac{\sin D \times \cos \angle PCB}{\sin \angle DCP} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}} + \frac{\sin(\angle DCB + \angle PDC)\sin \angle ADB}{\sin \angle ADP \times \sin \angle CBD} \times \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}$$
$$+ \frac{\sin B \times \cos \angle CBP}{\sin \angle PBA} \times \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}} + \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}} = 2$$

(3)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} \times \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle DCB} \times \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}} + \frac{\sin D \times \cos \angle PCB}{\sin \angle DCP} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}$$
$$+ \frac{\sin C \times \cos \angle PCB}{\sin \angle DCP} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}} + \frac{\sin(\angle DCB + \angle PDC)\sin \angle ADB}{\sin \angle ADP \times \sin \angle CBD} \times \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}$$
$$+ \frac{\sin(\angle DCB + \angle PDC)\sin \angle ADC}{\sin \angle ADP \times \sin \angle DCB} \times \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}} + \frac{\sin B \times \cos \angle CBP}{\sin \angle PBA} \times \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}$$
$$+ \frac{\sin BAD \times \cos \angle CBP}{\sin \angle PBA} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}} + \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}} = 4$$

註：上述 (1) 、 (2) 與 (3) 中的有向角 $\angle XOY$ 表示已射線 $\overrightarrow{OX}$ 為始邊且射線 $\overrightarrow{OY}$ 為終邊之逆時針旋轉的有向角，因此有向角 $\angle XOY$ 為正角。換句話說， $\angle YOX = 2\pi - \angle XOY$ 。

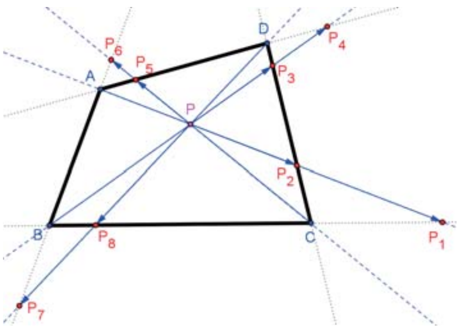

圖 T22 - 1

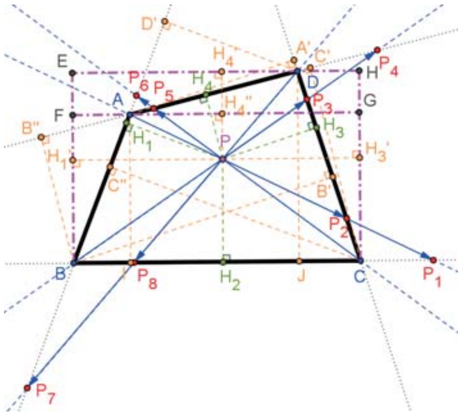

圖 T22 - 2

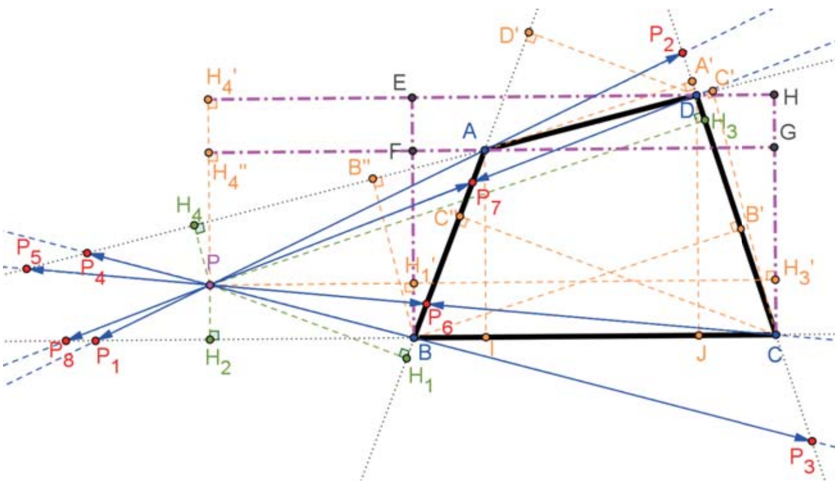

圖 T22 - 3

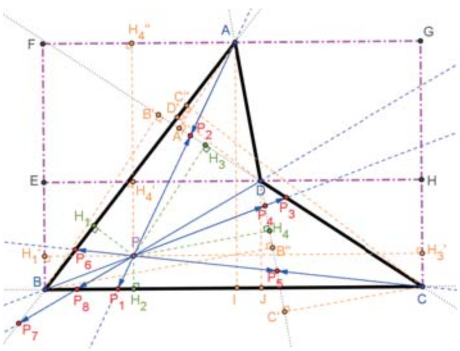

圖 T22 - 4

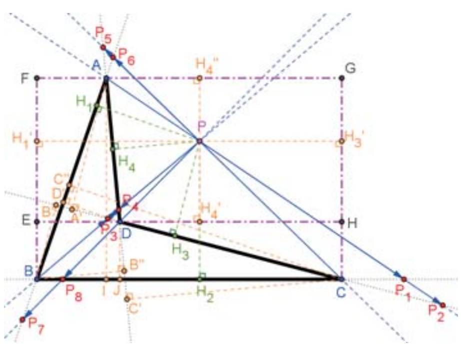

圖 T22 - 5

證明.

仿**定理 20** 之法即可得證原命題成立。 □

備註 12.

定理 22 中的 (1) 與 (2) 之結果可以改寫成如下的形式，

$$(1)' \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}\times\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle DCB}\times\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}+\frac{\sin C\cos\angle PCB}{\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{BP_3}}$$
$$+\frac{\sin(\angle DCB+\angle PDC)\times\sin\angle ADC}{\sin\angle ADP\times\sin\angle DCB}\times\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{CP_5}}$$
$$+\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}\times\frac{\sin\angle DBA\times\cos\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=2$$

$$(2)' \quad \frac{\sin(\angle CBA+\angle DCA)\times\cos\angle PCB}{\sin\angle BAC\times\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}$$
$$+\frac{\sin(\angle DCB+\angle PDC)\times\sin\angle ADB}{\sin\angle ADP\times\sin\angle CBD}\times\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{BP_4}}+\frac{\sin C\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{CP_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{DP_8}}=2$$

事實上， $(1)'$ 僅第一項與第四項與**定理 22** 中的 (1) 不一樣， $(2)'$ 僅第一項與**定理 22** 中的 (2) 不一樣，其理由如下：

$(1)'$ 之說明（以圖 $T21-2$ 為例）

第一項： $\because\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{AP_1}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{AI}},\ \therefore\frac{\overline{AI}}{\overline{DJ}}\times\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{DJ}}\Rightarrow\frac{\overline{AC}\sin\angle ACB}{\overline{CD}\sin\angle DCB}\times\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{AP_1}}=\frac{\overline{PH_2}}{\overline{DJ}}.$

第四項： $\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=\frac{\overline{PP_7}}{\overline{DP_7}}=\frac{\overline{PH_1}}{\overline{DD'}}=\frac{\overline{PH_1'}\times\frac{\sin\angle PBA}{\cos\angle CBP}}{\overline{DB}\sin\angle DBA}$ ， 由此推知

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}\times\frac{\sin\angle DBA\times\cos\angle CBP}{\sin\angle PBA}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{DP_7}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}\times\frac{\overline{PH_1'}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{PH_1'}}{\overline{BC}}$$

$(2)'$ 之說明（以圖 $T21-2$ 為例）

第一項： $\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}=\frac{\overline{PP_2}}{\overline{AP_2}}=\frac{\overline{PH_3}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{AC}\sin\angle DCA}=\frac{\overline{PH_3'}\times\frac{\sin\angle DCP}{\cos\angle PCB}}{\overline{BC}\times\frac{\sin\angle CBA}{\sin\angle BAC}\times\sin\angle DCA}$ ，故

$$\frac{\sin\angle CBA\times\sin\angle DCA\times\cos\angle PCB}{\sin\angle BAC\times\sin\angle DCP}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{AP_2}}=\frac{\overline{PH_3'}}{\overline{BC}}\ 。$$

接下來，我們將考慮**引理 1** 在任意凸(或凹)五邊形中的推廣，首先我們考慮有三個內等於 $108°$ 且另兩個內角不一定等於 $108°$ 的五邊形，如下**定理 23** 所示。

定理 23.（特殊五邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質 I ）

已知$\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 為平面上一凸（或凹）五邊形，滿足 $\angle A_5A_1A_2 = \angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = 108^\circ$ ，且 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$ ，又點 P 為平面上異於 Γ 之五頂點的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$ ， $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4 、 P_5 與 P_6 三點、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7 、 P_8 與 P_9 三點、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{10} 、 P_{11} 與 P_{12} 三點、 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{13} 、 P_{14} 與 P_{15} 三點，如下圖 $T23-1$ 所示，試證明：

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}} + \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}} + \frac{\sin\angle A_5A_4A_3 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}} + \frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}} + \frac{\overline{A_1A_5} \times \sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(2)

$$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}} + \frac{\sin\angle A_5A_4A_2 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}} + \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}} + \frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}} + \frac{\overline{A_1A_5} \times \sin\angle A_2A_1A_5 \times \sin\angle A_3A_2A_5}{2\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ \times \cos 36^\circ \times \sin\angle A_5A_2A_1} \times \frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}} = \sqrt{5}$$

(3)

$$\frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}} + \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}} + \frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}} + \frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}} + \frac{\overline{A_4A_5} \times \sin\angle A_5A_4A_3}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(4) 將上述 (1) 、 (2) 與 (3) 中之三個等式相加即得

$$\begin{aligned}
&\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}} + \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}} + \frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}} \\
&+ \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}} + \frac{\sin\angle A_5A_4A_2 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}} + \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}} \\
&+ \frac{\sin\angle A_5A_4A_3 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}} + \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}} + \frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}} + \frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}} \\
&+ \frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}} + \frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}} + \frac{\overline{A_1A_5} \times \sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}} \\
&+ \frac{\overline{A_1A_5} \times \sin\angle A_2A_1A_5 \times \sin\angle A_3A_2A_5}{2\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ \times \cos 36^\circ \times \sin\angle A_5A_2A_1} \times \frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}} + \frac{\overline{A_4A_5} \times \sin\angle A_5A_4A_3}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}} \\
&= 5 + 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

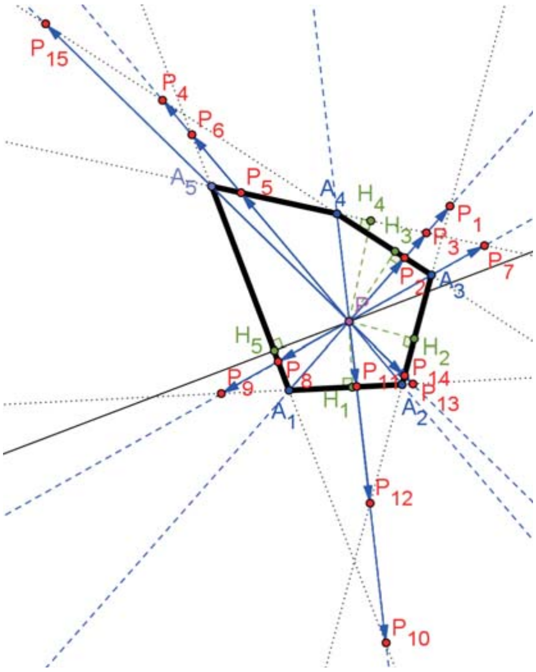

圖 T23 - 1

證明.

(1) (a) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_1}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 H_1 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_2}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 H_2 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_3}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 H_3 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_4}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 H_4 ，作直線 $\overleftrightarrow{PH_5}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 H_5 ，如上圖 $T23-1$ 所示。

(b) 過 A_4 點作直線 $\overleftrightarrow{A_4A_5'}$ 交 $\overleftrightarrow{A_4A_5'}$ 於 A_5' ，且滿足 $\angle A_5'A_4A_3 = 108^\circ$ 。

(c) 過 P 點作直線 $\overleftrightarrow{PH_4'}$ 垂直直線 $\overleftrightarrow{A_4A_5'}$ 交 $\overleftrightarrow{A_4A_5'}$ 於 H_4' 。

i $\dfrac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_2}}{\overline{A_1A_2} \times \cos 18^\circ}$

ii $\dfrac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_3}}{\overline{A_1A_2} \times \cos 18^\circ}$

iii $\because \overline{PH_4} = \overline{A_4P}\sin\angle A_5A_4P$ ， $\overline{PH_4'} = \overline{A_4P}\sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)$ ，

$\therefore \dfrac{\overline{PH_4}}{\overline{PH_4'}} = \dfrac{\overline{A_4P}\sin\angle A_5A_4P}{\overline{A_4P}\sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)} = \dfrac{\sin\angle A_5A_4P}{\sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}$

$\dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_4}}{\overline{A_1A_2} \times \sin\angle A_5A_4A_3}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\angle A_5A_4A_3 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\sin\angle A_5A_4P} \times \dfrac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_4'}}{\overline{A_1A_2} \times \cos 18^\circ}$

iv $\dfrac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_5}}{\overline{A_1A_2} \times \cos 18^\circ}$

v $\dfrac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_1}}{\overline{A_5A_1}\times\sin\angle A_2A_1A_5}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_5A_1}\times\sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2}\times\cos18^\circ}\times\dfrac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_1}}{\overline{A_1A_2}\times\cos18^\circ}$

將上述 i 、 ii 、 iii 、 iv 與 v 之結果相加得

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\sin\angle A_5A_4A_3\times\sin(108^\circ-\angle PA_4A_3)}{\cos18^\circ\sin\angle A_5A_4P}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}+\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}$$
$$+\frac{\overline{A_1A_5}\times\sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2}\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}=\frac{\overrightarrow{PH_2}+\overrightarrow{PH_3}+\overrightarrow{PH_4'}+\overrightarrow{PH_5}+\overrightarrow{PH_1}}{\overline{A_1A_2}\times\cos18^\circ}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

故得證此時原命題成立。

(2) i $\dfrac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_3}}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ}$

ii $\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_4}}{2\overline{A_1A_2}\sin\angle A_5A_4A_2\times\cos36^\circ}$

$\Rightarrow\dfrac{\sin\angle A_5A_4A_2\times\sin(108^\circ-\angle PA_4A_3)}{\cos18^\circ\sin\angle A_5A_4P}\times\dfrac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_4'}}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ}$

iii $\dfrac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_5}}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ}$

iv $\dfrac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_1}}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ}$

v $\dfrac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_2}}{\overline{A_1A_5}\times\sin\angle A_2A_1A_5\times\frac{\sin\angle A_3A_2A_5}{\sin\angle A_5A_2A_1}}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{A_1A_5}\times\sin\angle A_2A_1A_5\times\sin\angle A_3A_2A_5}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ\times\sin\angle A_5A_2A_1}\times\dfrac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\dfrac{\overrightarrow{PH_2}}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ}$

將上述 i 、 ii 、 iii 、 iv 與 v 之結果相加得

$$\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}+\frac{\sin\angle A_5A_4A_2\times\sin(108^\circ-\angle PA_4A_3)}{\cos18^\circ\sin\angle A_5A_4P}\times\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}$$
$$+\frac{\overline{A_1A_5}\times\sin\angle A_2A_1A_5\times\sin\angle A_3A_2A_5}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ\times\sin\angle A_5A_2A_1}\times\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}$$
$$=\frac{\overrightarrow{PH_2}+\overrightarrow{PH_3}+\overrightarrow{PH_4'}+\overrightarrow{PH_5}+\overrightarrow{PH_1}}{2\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\times\cos36^\circ}=\sqrt{5}$$

故得證此時原命題成立。

(3) i $\dfrac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_4}}{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}} = \frac{\overrightarrow{PH_4'}}{\overline{A_1A_2}\times\cos 18^\circ}$$

ii $\dfrac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_5}}{\overline{A_1A_2}\times\cos 18^\circ}$

iii $\dfrac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_1}}{\overline{A_1A_2}\times\cos 18^\circ}$

iv $\dfrac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_2}}{\overline{A_1A_2}\times\cos 18^\circ}$

v $\dfrac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_3}}{\overline{A_4A_5}\times\sin\angle A_5A_4A_3} \Rightarrow \dfrac{\overline{A_4A_5}\times\sin\angle A_5A_4A_3}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ}\times\dfrac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}} = \dfrac{\overrightarrow{PH_3}}{\overline{A_1A_2}\times\cos 18^\circ}$

將上述 i 、 ii 、 iii 、 iv 與 v 之結果相加得

$$\frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4 \times \sin(108^\circ - \angle PA_4A_3)}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ \sin\angle A_5A_4P} \times \frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}} + \frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}} + \frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}} + \frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}$$
$$+\frac{\overline{A_4A_5}\times\sin\angle A_5A_4A_3}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}} = \frac{\overrightarrow{PH_2}+\overrightarrow{PH_3}+\overrightarrow{PH_4'}+\overrightarrow{PH_5}+\overrightarrow{PH_1}}{\overline{A_1A_2}\times\cos 18^\circ} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

故得證此時原命題成立。

□

接下來,我們將考慮**引理 1** 在另一類型之凸(或凹)五邊形中的推廣，我們考慮僅有兩個內角等於 108° 且另三個內角不一定等於 108° 的五邊形，如下**定理 24** 所示。

定理 24.（特殊五邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質 II）

已知 $\Gamma: A_1A_2A_3A_4A_5$ 為平面上一凸（或凹）五邊形，滿足 $\angle A_5A_1A_2 = \angle A_1A_2A_3 = 108^\circ$ ，且 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ ，又點 P 為平面上異於 Γ 之五頂點的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$ ， $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4 、 P_5 與 P_6 三點、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7 、 P_8 與 P_9 三點、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{10} 、 P_{11} 與 P_{12} 三點、 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{13} 、 P_{14} 與 P_{15} 三點，如下圖 $T24-1$ 所示，試證明：

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}} + \frac{\overline{A_3P}\sin(108^\circ - \angle PA_3A_2)\sin\angle A_4A_3A_2}{\overline{A_4P}\cos 18^\circ \sin\angle PA_4A_3} \times \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}$$
$$+\frac{\overline{A_4A_3}\sin\angle A_5A_4A_3\cos 18^\circ\left(\overline{A_1A_2} - \overline{A_1P}\left(\cos\angle PA_1A_5 - \sin\angle PA_1A_5\tan 18^\circ\right)\right)}{\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ\sin\angle PA_5A_4} \times \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}$$
$$+\frac{\overline{A_5A_4}\sin\angle A_1A_5A_4}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}} + \frac{\overline{A_1A_5}\times\sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(2)

$$\frac{\overline{A_3P}\times\overline{A_1A_4}\sin\left(108^\circ-\angle PA_3A_2\right)\sin\angle A_1A_4A_3}{2\overline{A_4P}\times\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ\sin\angle PA_4A_3}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}$$
$$+\frac{\overline{A_2A_5}\sin\angle A_2A_5A_4\cos18^\circ\left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1P}\left(\cos\angle PA_1A_5-\sin\angle PA_1A_5\tan18^\circ\right)\right)}{2\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ\sin\angle PA_5A_4}\times\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}$$
$$+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overline{A_4A_2}\sin\angle A_4A_2A_1}{2\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{A_5A_3}\times\sin\angle A_5A_3A_2}{2\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}=\sqrt{5}$$

(3)

$$\frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4\cos18^\circ\left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1P}\left(\cos\angle PA_1A_5-\sin\angle PA_1A_5\tan18^\circ\right)\right)}{\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\sin\angle PA_5A_4}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}$$
$$+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overline{A_4A_3}\sin\angle A_4A_3A_2}{\overline{A_1A_2}\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}$$
$$+\frac{\overline{A_5A_4}\times\overline{A_3P}\sin\left(108^\circ-\angle PA_3A_2\right)\sin\angle A_5A_4A_3}{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_4P}\cos18^\circ\sin\angle PA_4A_3}\times\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(4) 將上述 (1) 、 (2) 與 (3) 中之三個等式相加即得

$$\frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}}+\frac{\overline{A_3P}\times\overline{A_1A_4}\sin\left(108^\circ-\angle PA_3A_2\right)\sin\angle A_1A_4A_3}{2\overline{A_4P}\times\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ\sin\angle PA_4A_3}\times\frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}}$$
$$+\frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4\cos18^\circ\left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1P}\left(\cos\angle PA_1A_5-\sin\angle PA_1A_5\tan18^\circ\right)\right)}{\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\sin\angle PA_5A_4}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}$$
$$+\frac{\overline{A_3P}\sin\left(108^\circ-\angle PA_3A_2\right)\sin\angle A_4A_3A_1}{\overline{A_4P}\cos18^\circ\sin\angle PA_4A_3}\times\frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}}+\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}}$$
$$+\frac{\overline{A_2A_5}\sin\angle A_2A_5A_4\cos18^\circ\left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1P}\left(\cos\angle PA_1A_5-\sin\angle PA_1A_5\tan18^\circ\right)\right)}{2\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ\sin\angle PA_5A_4}\times\frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}}$$
$$+\frac{\overline{A_4A_3}\sin\angle A_5A_4A_3\cos18^\circ\left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1P}\left(\cos\angle PA_1A_5-\sin\angle PA_1A_5\tan18^\circ\right)\right)}{\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos18^\circ\sin\angle PA_5A_4}\times\frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}}$$
$$+\frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}}+\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}}+\frac{\overline{A_5A_4}\sin\angle A_1A_5A_4}{\overline{A_1A_2}\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}}$$
$$+\frac{\overline{A_4A_2}\sin\angle A_4A_2A_1}{2\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}}+\frac{\overline{A_4A_3}\sin\angle A_4A_3A_2}{\overline{A_1A_2}\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}}$$
$$+\frac{\overline{A_1A_5}\times\sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2}\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}}+\frac{\overline{A_5A_3}\times\sin\angle A_5A_3A_2}{2\overline{A_1A_2}\cos36^\circ\cos18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}}$$
$$+\frac{\overline{A_5A_4}\times\overline{A_3P}\sin\left(108^\circ-\angle PA_3A_2\right)\sin\angle A_5A_4A_3}{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_4P}\cos18^\circ\sin\angle PA_4A_3}\times\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}=5+2\sqrt{5}$$

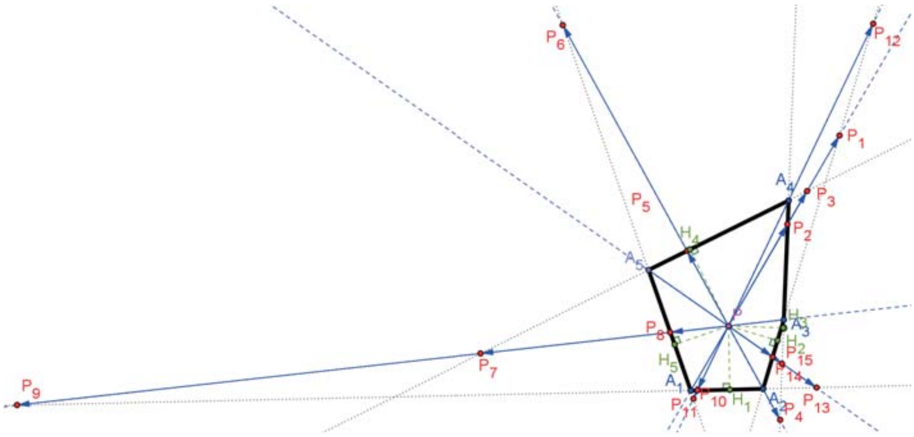

圖 T24 - 1

證明.

仿**定理 23** 之法即可得證原命題成立。 □

接下來,我們將考慮**引理 1** 在任意凸(或凹)五邊形中的推廣，如下**定理 25** 所示。

定理 25. **（任意五邊形之頂點與一定點連線所生有向線段比值之和的定性性質）**

已知 $\Gamma : A_1A_2A_3A_4A_5$ 為平面上一凸（或凹）五邊形，又點 P 為平面上異於 Γ 之五頂點的一定點，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5P}$ ， $\overleftrightarrow{A_1P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 於 P_1 、 P_2 與 P_3 三點、 $\overleftrightarrow{A_2P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 於 P_4 、 P_5 與 P_6 三點、 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 P_7 、 P_8 與 P_9 三點、 $\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 P_{10} 、 P_{11} 與 P_{12} 三點、 $\overleftrightarrow{A_5P}$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 P_{13} 、 P_{14} 與 P_{15} 三點，如下圖 $T25-1$ 所示，試證明：

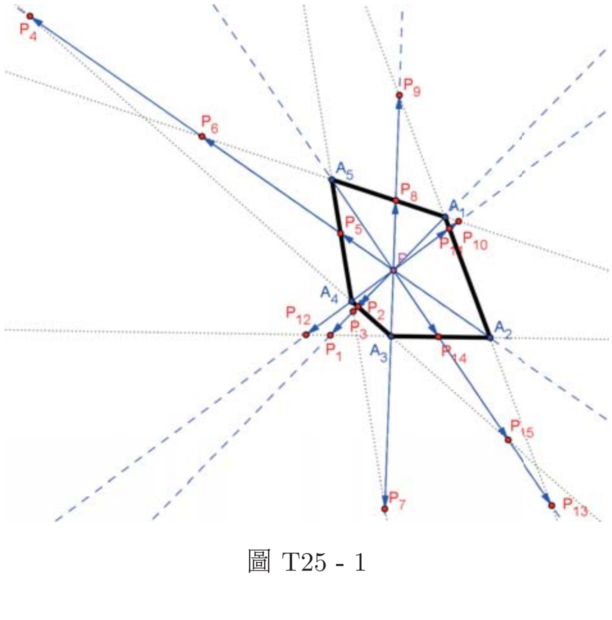

圖 T25 - 1

(1)

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{A_2A_1} \times \overline{A_2P} \sin\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) \sin\angle A_3A_2A_1}{\overline{A_3PA_1A_2} \cos 18^\circ \sin\angle PA_3A_2} \times \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{A_1P_1}} \\
+ \quad & \frac{\overline{A_3A_2} \sin\angle A_4A_3A_2 \cos 18^\circ}{\overline{A_4P} \times \overline{A_1A_2} \cos 18^\circ \sin\angle PA_4A_3} \times \frac{\overrightarrow{PP_4}}{\overrightarrow{A_2P_4}} \times \\
& \left(\overline{A_1A_2} - \overline{A_2P} \cos\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) + \overline{A_2P} \sin\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) \tan 18^\circ\right) \\
+ \quad & \frac{\overline{A_4A_3} \sin\angle A_5A_4A_3 \cos 18^\circ}{\overline{A_5P} \times \overline{A_1A_2} \cos 18^\circ \sin\angle PA_5A_4} \frac{\overrightarrow{PP_7}}{\overrightarrow{A_3P_7}} \times \\
& \left(\overline{A_1A_2} - \overline{A_1P} \cos\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) + \overline{A_1P} \sin\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) \tan 18^\circ\right) \\
+ \quad & \frac{\overline{A_1P} \times \overline{A_5A_4} \sin\left(108^\circ - \angle A_2A_1P\right) \sin\angle A_1A_5A_4}{\overline{A_1PA_1A_2} \sin\angle PA_1A_5 \cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{10}}}{\overrightarrow{A_4P_{10}}} \\
+ \quad & \frac{\overline{A_1A_5} \times \sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1A_2} \cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{13}}}{\overrightarrow{A_5P_{13}}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{A_1A_4} \sin\angle A_1A_4A_3 \cos 18^\circ}{2\overline{A_4P} \times \overline{A_1A_2} \cos 36^\circ \cos 18^\circ \sin\angle PA_4A_3} \times \frac{\overrightarrow{PP_2}}{\overrightarrow{A_1P_2}} \times \\
& \left(\overline{A_1A_2} - \overline{A_2P} \cos\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) + \overline{A_2P} \sin\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) \tan 18^\circ\right) \\
+ \quad & \frac{\overline{A_2A_5} \sin\angle A_2A_5A_4 \cos 18^\circ}{2\overline{A_5P} \times \overline{A_1A_2} \cos 36^\circ \cos 18^\circ \sin\angle PA_5A_4} \times \frac{\overrightarrow{PP_5}}{\overrightarrow{A_2P_5}} \times \\
& \left(\overline{A_1A_2} - \overline{A_1P} \cos\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) + \overline{A_1P} \sin\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) \tan 18^\circ\right) \\
+ \quad & \frac{\overline{A_1P} \times \overline{A_3A_1} \sin\left(108^\circ - \angle A_2A_1P\right) \sin\angle A_3A_1A_5}{2\overline{A_1PA_1A_2} \sin\angle PA_1A_5 \cos 36^\circ \cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_8}}{\overrightarrow{A_3P_8}} \\
+ \quad & \frac{\overline{A_4A_2} \times \sin\angle A_5A_2A_1}{2\overline{A_1A_2} \cos 36^\circ \cos 18^\circ} \times \frac{\overrightarrow{PP_{11}}}{\overrightarrow{A_4P_{11}}} \\
+ \quad & \frac{\overline{A_5A_3} \times \overline{A_2P} \sin\left(108^\circ - \angle PA_2A_1\right) \sin\angle A_5A_3A_2}{2\overline{A_3PA_1A_2} \cos 36^\circ \cos 18^\circ \sin\angle PA_3A_2} \times \frac{\overrightarrow{PP_{14}}}{\overrightarrow{A_5P_{14}}} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\overline{A_1A_5}\sin\angle A_1A_5A_4\cos 18^\circ}{\overline{A_5P}\times\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ\sin\angle PA_5A_4}\times\frac{\overrightarrow{PP_3}}{\overrightarrow{A_1P_3}}\times \\
& \left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_1P}\cos\left(108^\circ-\angle PA_2A_1\right)+\overline{A_1P}\sin\left(108^\circ-\angle PA_2A_1\right)\tan 18^\circ\right) \\
+\quad & \frac{\overline{A_1P}\times\overline{A_2A_1}\sin\left(108^\circ-\angle A_2A_1P\right)\sin\angle A_2A_1A_5}{\overline{A_1PA_1A_2}\sin\angle PA_1A_5\cos 18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_6}}{\overrightarrow{A_2P_6}} \\
+\quad & \frac{\overline{A_3A_2}\times\sin\angle A_3A_2A_1}{\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ}\times\frac{\overrightarrow{PP_9}}{\overrightarrow{A_3P_9}} \\
+\quad & \frac{\overline{A_4A_3}\times\overline{A_2P}\sin\left(108^\circ-\angle PA_2A_1\right)\sin\angle A_4A_3A_2}{\overline{A_3PA_1A_2}\cos 18^\circ\sin\angle PA_3A_2}\times\frac{\overrightarrow{PP_{12}}}{\overrightarrow{A_4P_{12}}} \\
+\quad & \frac{\overline{A_5A_4}\sin\angle A_5A_4A_3\cos 18^\circ}{\overline{A_4P}\times\overline{A_1A_2}\cos 18^\circ\sin\angle PA_4A_3}\times\frac{\overrightarrow{PP_{15}}}{\overrightarrow{A_5P_{15}}}\times \\
& \left(\overline{A_1A_2}-\overline{A_2P}\cos\left(108^\circ-\angle PA_2A_1\right)+\overline{A_2P}\sin\left(108^\circ-\angle PA_2A_1\right)\tan 18^\circ\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

(4) 將上述 (1) 、 (2) 與 (3) 中之三個等式相加即得十五個有向線段比值分別乘以適當的量之後，其和為定值 $5+2\sqrt{5}$

證明.
仿**定理 23** 之法即可得證原命題成立。 □

3 結論、討論與未來展望

本篇文章主要從**引理 1** 與**引理 3** 出發，找到它們在平面上三角形、平行四邊形與正多邊形及空間中四面體、平行六面體與正多面體的相應結果，且讓**引理 1** 與**引理 3** 中的點 P 可以從多邊形與多面體的內部移至外部，並將線段比值和替換成有向線段比值和，很幸運地，我們得到一些美妙的結果，並且我們亦將**引理 1** 推廣到任意凸、凹四邊形與五邊形中，只美中不足的是對於任意的凸、凹 N $(N\geq 6)$ 邊形與任意的凸、凹多面體仍然所知有限，盼望在不久的將來可以完成此一般化結論。

關於與本文相關的已知結果，經文獻查閱與網路搜尋，目前僅知有**引理 1** 與**引理 3** 兩個相關結論，並未在其他文獻見有相關的結果。

此外，由於任意四邊形不再保有**引理 1** 的定性性質，所以接下來我們也希望可以找出任意多邊形內具有這定性性質的所有 P 點所形成的軌跡圖形；更甚者，我們希望在未來可以對任意的凸、凹多邊形找到相對應的結果。

參考文獻

[1] 初等幾何研究，左銓如季素月 編著，九章出版社，1998。

[2] 平面幾何新路解題研究，張景中 著，九章出版社，2002。

[3] 中華民國第五十三屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱：『孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣』，作者：許喬婷，指導老師：鄭仕豐。

[4] 2014 年臺灣國際科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱：『孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣』，作者：許喬婷，指導老師：鄭仕豐。

[5] 幾何明珠，黃家禮編著，九章出版社，2000。