

等差點的奇幻漂流

台北市立建國高級中學 羅啓恒
指導老師 曾俊雄

Abstract

Given $\triangle ABC$, define point P which meets $|\overline{PA} - a| = |\overline{PB} - b| = |\overline{PC} - c|$ as “等差點”. While studying the existence, numbers, and graphing of these points, I found these question can be solved by using several conic sections which meet any two of them share only one focus, and point Q which meets $\overline{QA} + a = \overline{QB} + b = \overline{QC} + c$ is involved (I defined this point as “等和點”). Then I found some properties that certain lines related to several conic sections will share one point. By using these properties, we can prove some properties of “等差點”.

中文摘要

給定 $\triangle ABC$ ，滿足 $|\overline{PA} - a| = |\overline{PB} - b| = |\overline{PC} - c|$ 的點 P 稱為等差點。我從尺規作圖的角度出發，研究等差點的存在性、個數、性質。並提出了一種新的方法，將問題轉換成兩兩有單一共同焦點的數個圓錐曲線之間類根軸性質的討論，也發現滿足 $\overline{QA} + a = \overline{QB} + b = \overline{QC} + c$ 的等和點 Q 也可一併處理。從而推導出適當條件下多個圓錐曲線的類根軸共點並進而證明等差點之間連線的“四線共點”以及其他相關性質。

1 簡介

1.1 研究動機

給定 $\triangle ABC$ ，滿足 $|\overline{PA} - a| = |\overline{PB} - b| = |\overline{PC} - c|$ 的點 P 稱為等差點。在閱讀「三角形的“等差點”初探」這篇文章時，我對這定義深感興趣，所以便配合 geogebra 這套數學軟體作圖觀察，利用高中所學的圓錐曲線知識處理一些問題。

1.2 研究方法

搭配 Geogebra4.2 進行觀察、猜測、證明、延伸推廣。

1.3 符號與名詞定義

1. 在 $\triangle ABC$ 中，約定 a 、 b 、 c 為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊邊長

$$r_1 = s - a \quad r_2 = s - b \quad r_3 = s - c \quad s = \frac{a + b + c}{2}$$

- (1) J_a 、 J_b 、 J_c 為在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 邊的旁心

- (2) 等差點為滿足 $|\overline{PA} - a| = |\overline{PB} - b| = |\overline{PC} - c|$ 的所有點 P 。

- (3) 等和點為滿足 $\overline{QA} + a = \overline{QB} + b = \overline{QC} + c$ 的所有點 Q 。

2. $\odot P(r)$ ：以 P 點為圓心、半徑為 r 的圓，或縮寫為 $\odot P(r)$

3. 極線、極點：過圓錐曲線上的兩點 A 、 B 的切線，若相交於 P 點，那麼 P 點稱為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 關於該曲線的極點，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 稱為 P 點的極線。上面定義僅適用於 P 點在此圓錐曲線外部的情况。實際上， P 點在圓錐曲線內部的時候同樣可以定義極線，這時我們可以認為極線是過 P 點做此圓錐曲線的兩條虛切線的切點連線。

4. 類根軸：為後面討論方便，我們定義若直線 L 上任意一點做關於兩圓錐曲線的兩極線與 L 共點，則稱 L 為此二圓錐曲線的類根軸；而當兩圓錐曲線有兩個相異交點，其交點連線我們將它視為一條類根軸。

2 研究內容

2.1 等差點

2.1.1 參考文獻 [1]的作圖

觀察 $|\overline{PA} - a| = |\overline{PB} - b| = |\overline{PC} - c|$ ，可分為四種情形

1. $\overline{PA} - a = \overline{PB} - b = \overline{PC} - c$,
2. $a - \overline{PA} = \overline{PB} - b = \overline{PC} - c$,
3. $\overline{PA} - a = b - \overline{PB} = \overline{PC} - c$,
4. $\overline{PA} - a = \overline{PB} - b = c - \overline{PC}$.

作 $\odot A(r_3)$ 、 $\odot B(s)$ 、 $\odot C(r_1)$ 。再作 $\odot P$ 、 $\odot P'$ 與三圓相切，如圖 1，則

$$\overline{PA} - r_3 = s - \overline{PB} = \overline{PC} - r_1$$

$$\overline{PA} - r_3 + \frac{-a+b-c}{2} = s + \frac{-a+b-c}{2} - \overline{PB} = \overline{PC} - r_1 + \frac{-a+b-c}{2}$$

$$\overline{PA} - a = b - \overline{PB} = \overline{PC} - c$$

P 滿足 $\overline{PA} - a = b - \overline{PB} = \overline{PC} - c$ ，同樣的 P' 也滿足， P 、 P' 均為等差點。這組等差點滿足情形 3，相似的可以做出另外兩組等差點分別滿足情形 2、4。文中並沒有給出情形 1 的作法，僅確定在每邊的開區域內都有一等差點。

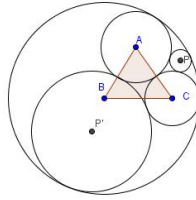


圖 1

2.1.2 新建構法

作 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 、 $\odot C(c)$ ，如圖 2，則 $|\overline{PX} - x|$ 即為 P 到 $\odot X$ 的最短距離。由等差點定義 $|\overline{PA} - a| = |\overline{PB} - b| = |\overline{PC} - c|$ 可知 P 點到三圓最短距離相等，可取適當半徑作 $\odot P$ 與三圓相切，所以等差點是與三圓均相切的圓的圓心。

但並非所有相切圓的圓心都是等差點，如圖 3。 $\odot Q$ 與三圓相切且將三圓包含於其內，但 $\overline{QA} + a = \overline{QB} + b = \overline{QC} + c$ ，不符等差點的定義，以下稱 Q 為等和點。由此得等差點、等和點的尺規作圖方法。

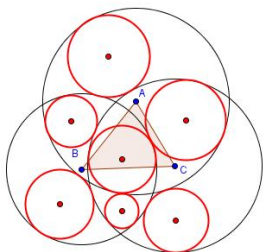


圖 2

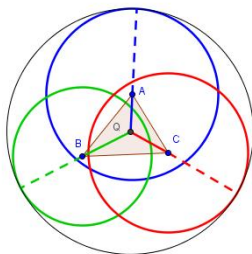


圖 3

2.1.3 等差點性質發現

在得到等差點的尺規作圖方法後，發現了以下性質：

1. 除了直角三角形外，皆可找到八圓與 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 、 $\odot C(c)$ 均相切。調整三角形的邊長比例，發現八圓中都有六圓心滿足等差點的定義、一圓心滿足等和點的定義，而最後一圓有三種情形，如圖 4、5、6。令 $a \geq b \geq c$ ，可求出圖 5 時三邊長滿足

$$\sqrt{\frac{1}{r_1}} + \sqrt{\frac{1}{r_2}} = \sqrt{\frac{1}{r_3}}, \text{ 由此得以下結論。}$$

令三邊長 $a \geq b \geq c$ ，則當 $\sqrt{\frac{1}{r_1}} \leq \sqrt{\frac{1}{r_2}} + \sqrt{\frac{1}{r_3}}$ 時有七個等差點、一個等和點， $\sqrt{\frac{1}{r_1}} >$

$\sqrt{\frac{1}{r_2}} + \sqrt{\frac{1}{r_3}}$ 時有六個等差點、兩個等和點。直角三角形四個等差點重合。

另外也發現滿足 2.1.1 中情形 2 4 的等差點都有兩個、滿足情形 1 的等差點與等和點的數量和也為二，所以以下將等和點並入第一種情形。

2. 依四種情形分組，每組等差點、等和點連線通過相應的旁心、內心。

3. 四組等差點連線及 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 、 $\odot C(c)$ 的三條根軸七線共點。

以下我利用圓錐曲線來處理，在 2.3 中證明。

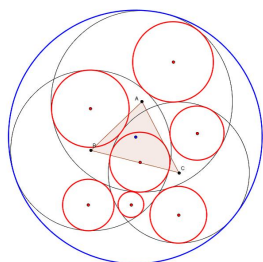


圖 4

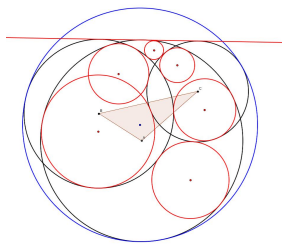


圖 5

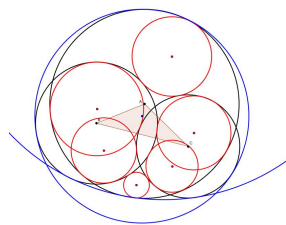


圖 6

2.2 類根軸的共點性質

2.2.1 等差點與圓錐曲線

由等差點的定義，可將其視為數個有一共同焦點的圓錐曲線的交點，如情形 2 即為 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a + b$ 、 $\Gamma_2: \overline{PA} + \overline{PC} = a + c$ 這兩個橢圓的兩個交點。所以每組等差點連線即為這些有一共同焦點的圓錐曲線的交點連線。以下便探討這些有一共同焦點的圓錐曲線的性質。

經過觀察後發現，三個兩兩有一共同焦點且相交的橢圓，他們的三條交點連線共點。接著計算這些有共同焦點的圓錐曲線的交點連線。

2.2.2 兩橢圓的交點連線

設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a$ 、 $\Gamma_2: \overline{PA} + \overline{PC} = b$ ， $a, b > 0$ 。以下約定 $A \neq B \neq C$ 、且所有圓錐曲線都不是退化的。

交點 $P(x, y)$ 滿足

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2 & \text{--- -- -- -- --} & \text{①} \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = (r-a)^2 & \text{--- -- -- -- --} & \text{②} \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 = (r-b)^2 & \text{--- -- -- -- --} & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{②} \times b - \text{③} \times a - \text{①} \times (b-a) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ & = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \end{aligned}$$

此即為交點連線的方程式。由此可確定交點連線過 $\odot C(b)$ 、 $\odot A(0)$ 、 $\odot B(a)$ 三圓的根心，可改寫成

$$\begin{aligned} & a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 + ab] \\ & = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 + ab] \end{aligned}$$

由此也可確定交點連線過 $\odot C(0)$ 、 $\odot A(\sqrt{ab})$ 、 $\odot B(0)$ 三圓的根心。所以也找到已知焦點、兩長軸，共單一焦點的兩個橢圓交點連線的尺規作圖方法。當 a 遠大於 b 時，兩橢圓沒有交點，但仍可求出 L ，接著我便探討此時 L 的幾何意義。

2.2.3 類根軸

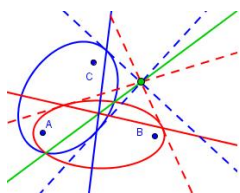


圖 7

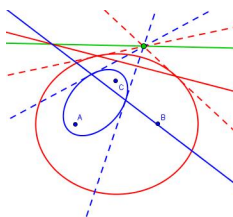


圖 8

定理 1. 兩圓錐曲線的交點連線 L 滿足 L 上任一點作關於兩圓錐曲線的兩極線 L_1 、 L_2 ， L 、 L_1 、 L_2 共點，如圖 7、8。

證明. 分為實交點、虛交點連線這兩種情形，先證實交點連線。

設曲線方程式

$$\Gamma_i: a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + e_i y + f_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

再設二實交點為 $A(\alpha, \beta)$ 、 $B(\gamma, \delta)$ 。交點連線為

$$L: (\beta - \delta)(x - \alpha) - (\alpha - \gamma)(y - \beta) = 0$$

因為交點關於 Γ_i 的極線即為 Γ_i 過交點的切線，兩條極線與 L 共點。極線方程式為

$$L_{Ai}: x(2a_i\alpha + c_i\beta + d_i) + y(c_i\alpha + 2b_i\beta + e_i) + d_i\alpha + e_i\beta + 2f_i = 0$$

$$L_{Bi}: x(2a_i\gamma + c_i\delta + d_i) + y(c_i\gamma + 2b_i\delta + e_i) + d_i\gamma + e_i\delta + 2f_i = 0$$

且滿足

$$\begin{cases} k_A \times L_{A1} + l_A \times L_{A2} = L & - - - - - \quad \textcircled{1} \\ k_B \times L_{B1} + l_B \times L_{B2} = L & - - - - - \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

其中 k_A 、 k_B 、 l_A 、 l_B 為常數。①、② 中分別代入 (γ, δ) 、 (α, β) ，得

$$\begin{cases} k_A [\gamma(2a_1\alpha + c_1\beta + d_1) + \delta(c_1\alpha + 2b_1\beta + e_1) + d_1\alpha + e_1\beta + 2f_1] \\ + l_A [\gamma(2a_2\alpha + c_2\beta + d_2) + \delta(c_2\alpha + 2b_2\beta + e_2) + d_2\alpha + e_2\beta + 2f_2] = 0 - - - - \quad \textcircled{3} \\ k_B [\gamma(2a_1\gamma + c_1\delta + d_1) + \beta(c_1\gamma + 2b_1\delta + e_1) + d_1\gamma + e_1\delta + 2f_1] \\ + l_B [\alpha(2a_2\gamma + c_2\delta + d_2) + \beta(c_2\gamma + 2b_2\delta + e_2) + d_2\gamma + e_2\delta + 2f_2] = 0 - - - - \quad \textcircled{4} \end{cases}$$

觀察發現，③ 式中 k_A 項的係數整理後與 ④ 式中 k_B 項係數相同，而 l_A 、 l_B 亦同，所以 $k_A : k_B = l_A : l_B$ ，令 $k_A = mk_B$ ， $l_A = ml_B$ 。

設 L 上任意一點 $P(\alpha + t(\alpha - \gamma), \beta + t(\beta - \delta))$ ，兩極線為

$$\begin{aligned} L_{Pi} : \quad & x \{ 2a_i [\alpha + t(\alpha - \gamma)] + c_i [\beta + t(\beta - \delta)] + d_i \} \\ & + y \{ c_i [\alpha + t(\alpha - \gamma)] + 2b_i [\beta + t(\beta - \delta)] + e_i \} \\ & + d_i [\alpha + t(\alpha - \gamma)] + e_i [\beta + t(\beta - \delta)] + 2f_i = 0 \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} & k_A \times L_{P1} + l_A \times L_{P2} \\ & = k_A \times [(t+1) \times L_{A1} - t \times L_{B1}] + l_A \times [(t+1) \times L_{A2} - t \times L_{B2}] \\ & = (t+1) \times (k_A \times L_{A1} + l_A \times L_{A2}) - t \times (mk_B \times L_{B1} + ml_B \times L_{B2}) \\ & = (t+1 - tm)L \end{aligned}$$

得證三線共點。接下來證明虛交點連線。

設兩曲線方程式

$$\Gamma_i : a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + e_i y + f_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

虛交點為 $A(a + \alpha i, b + \beta i)$ 、 $B(a - \alpha i, b - \beta i)$ ， $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。

L 為通過 A 、 B 的實係數一次方程式，方程式為

$$L : \beta(x - a) = \alpha(y - b)$$

作複係數的極線方程式 L_{Ai} 、 L_{Bi} ($i = 1, 2$)

$$L_{Ai} : x[2a_i(a + \alpha i) + c_i(b + \beta i) + d_i] + y[c_i(a + \alpha i) + 2b_i(b + \beta i) + e_i] + d_i(a + \alpha i) + e_i(b + \beta i) + 2f_i = 0$$

$$L_{Bi} : x[2a_i(a - \alpha i) + c_i(b - \beta i) + d_i] + y[c_i(a - \alpha i) + 2b_i(b - \beta i) + e_i] + d_i(a - \alpha i) + e_i(b - \beta i) + 2f_i = 0$$

L_{Ai} 、 L_{Bi} 滿足

$$\begin{cases} k_A \times L_{A1} + l_A \times L_{A2} = L & - - - \quad \textcircled{1} \\ k_B \times L_{B1} + l_B \times L_{B2} = L & - - - \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

與上面相似的可令 $k_A = mk_B$ ， $l_A = ml_B$ 。

設 L 上任一點 $P(a + t\alpha, b + t\beta)$ ，兩極線為

$$L_{Pi} : x[2a_i(a + t\alpha) + c_i(b + t\beta) + d_i] + y[c_i(a + t\alpha) + 2b_i(b + t\beta) + e_i] + d_i(a + t\alpha) + e_i(b + t\beta) + 2f_i = 0$$

解下列聯立方程式

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ p - q = -ti \end{cases}$$

則

$$\begin{aligned}
& k_A \times L_{P1} + l_A \times L_{P2} \\
&= k_A \times [p \times L_{A1} + q \times L_{B1}] + l_A \times [p \times L_{A2} - q \times L_{B2}] \\
&= p \times (k_A \times L_{A1} + l_A \times L_{A2}) + q \times (mk_B \times L_{B1} + ml_B \times L_{B2}) \\
&= (p + qm)L
\end{aligned}$$

得證三線共點。

由於和圓的根軸性質相似，便定義對於任意圓錐曲線 Γ_1 、 Γ_2 ，若 L 上任一點作關於 Γ_1 、 Γ_2 的兩極線與 L 共點，則稱 L 為 Γ_1 、 Γ_2 的類根軸。由此可將 2.2.1 的發現推廣。 $\square$

2.2.4 一橢圓、一雙曲線的類根軸

設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ， $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PA} - \overline{PC}| = b$ 。考慮 $\overline{PA} - \overline{PC} = b$ 這一支與 Γ_1 的交點，滿足 $\overline{PB} + \overline{PC} = a - b$ ，所以該交點連線方程式與 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a$ 和 $\Gamma_3: \overline{PB} + \overline{PC} = a - b$ 的交點連線相同。而另外一支上的交點連線則與 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a$ 、 $\Gamma'_3: \overline{PB} + \overline{PC} = a + b$ 的交點連線相同。

整理 Γ_1 、 Γ_3 的交點連線方程式後得 L

$$a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2]$$

方程式與 Γ_1 、 Γ_2 均為橢圓、 a 、 b 分別為兩長軸時一樣。

整理 Γ_1 、 Γ'_3 的交點連線方程式後得 L'

$$a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] + b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] = 0$$

由方程式可知 L' 過 $\odot C(b)$ 、 $\odot A(0)$ 、 $\odot B(a)$ 的根心，可改寫為

$$a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - ab] + b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - ab] = 0$$

由方程式可知 L' 過 $\odot C(\sqrt{ab})$ 、 $\odot A(0)$ 、 $\odot B(\sqrt{ab})$ 的根心。

L 、 L' 均為 Γ_1 、 Γ_2 的類根軸。

2.2.5 橢圓、雙曲線之間的類根軸

由 2.2.4 中 L 的方程式和 Γ_1 、 Γ_2 均為橢圓時一樣，猜測 L' 在 Γ_1 、 Γ_2 均為橢圓或均為雙曲線時也是 Γ_1 、 Γ_2 的類根軸。

定理 2. $\Gamma_1: |\overline{PA} \pm \overline{PB}| = a$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PA} \pm \overline{PC}| = b$ 、 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 則

$$\begin{aligned}
L: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\
& \quad = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \\
L': & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\
& \quad = -b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2]
\end{aligned}$$

均為 Γ_1 、 Γ_2 的類根軸

證明. 以均為橢圓為例，均為雙曲線時可用相似的方法證明。

設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a$ 、 $\Gamma_2: \overline{PA} + \overline{PC} = b$

將 Γ_1 、 Γ_2 展開後可得

$$\begin{aligned}
\Gamma_1: & [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2]^2 = 4a^2[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] \\
\Gamma_2: & [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2]^2 = 4b^2[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]
\end{aligned}$$

$$\Gamma_1 \times b^2 - \Gamma_2 \times a^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & b^2[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2]^2 \\ & - a^2[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2]^2 = 0 \end{aligned}$$

左式即為 $L \times L'$ ，所以 L 、 L' 為 Γ_1 、 Γ_2 的實交點或虛交點連線。再由 2.2.3 的證明得 L 、 L' 均為 Γ_1 、 Γ_2 的類根軸。□

由上面提到的， Γ_1 、 Γ_2 均為橢圓時 L' 亦為 Γ_1 、 Γ_2 的類根軸，可推得定理 3。

定理 3. 恰有一共同焦點的橢圓最多只有兩個實交點。

證明. 延用定理 2 證明中的符號，考慮 L' 和 Γ_1 的交點，滿足

$$\begin{cases} a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ = -b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \quad \text{---} \quad \text{①} \\ \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = a \quad \text{---} \quad \text{②} \end{cases}$$

② 代入 ① $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ & = -b \left[a \left(\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \right) - a^2 \right] \end{aligned}$$

再代入一次，消去 $\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$ ，得

$$(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2 = 2b \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \right)$$

可化簡為

$$\left(\sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + b \right)^2$$

所以 L' 和 Γ_1 的交點滿足 $\overline{PA} - \overline{PC} = b$ 或 $\overline{PA} + \overline{PC} = -b$ ，後者不合。又已知此交點也滿足 $\overline{PA} + \overline{PC} = b$ ，與假設矛盾，所以 L' 為虛交點連線、共有一焦點的橢圓最多只有兩個實交點。

接著證明 2.2.3 中提到的發現推廣。以下稱 L 為第一類根軸、 L' 為第二類根軸。□

2.2.6 共點性質

定理 4. 三個兩兩共一焦點的橢圓或雙曲線，三組類根軸為 L_1 、 L'_1 、 L_2 、 L'_2 、 L_3 、 L'_3 。則 $L_1L_2L_3$ 共點、 $L_1L'_2L'_3$ 共點、 $L'_1L_2L'_3$ 共點、 $L'_1L'_2L_3$ 共點，如圖 9、10、11、12。

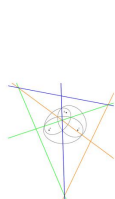


圖 9

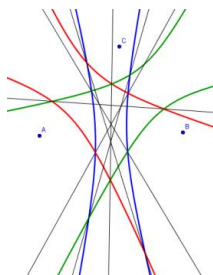


圖 10

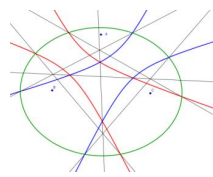


圖 11

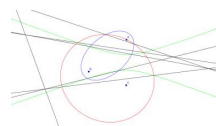


圖 12

證明．先證 $L_1L_2L_3$ 共點

$$\begin{aligned}
L_1: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\
& \quad = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \\
L_2: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_2)^2 - (y-y_2)^2 - c^2] \\
& \quad = c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (x-x_2)^2 - (y-y_2)^2 - a^2] \\
L_3: & \quad b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_3)^2 - (y-y_3)^2 - c^2] \\
& \quad = c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (x-x_3)^2 - (y-y_3)^2 - b^2]
\end{aligned}$$

可將 L_1 化為以下形式

$$\begin{aligned}
L_1: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - bc] - [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] \\
& \quad = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - ac] - [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab]
\end{aligned}$$

相似的也可將 L_2 、 L_3 化為以下形式

$$\begin{aligned}
L_2: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - bc] - [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - ac] \\
& \quad = c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - ac] \\
L_3: & \quad b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - ac] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - bc] \\
& \quad = c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - bc]
\end{aligned}$$

考慮三圓、三根軸

$$\begin{aligned}
C_A: & \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = ab \\
C_B: & \quad (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = ac \\
C_C: & \quad (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 = bc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{AB}: & \quad [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - ac] = 0 \\
L_{BC}: & \quad [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - ac] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - bc] = 0 \\
L_{AC}: & \quad [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - bc] = 0
\end{aligned}$$

由直線束可知 $L_1L_{AB}L_{AC}$ 共點， $L_2L_{AB}L_{BC}$ 共點， $L_3L_{BC}L_{AC}$ 共點。又 $L_{AB}L_{BC}L_{AC}$ 三線均過三圓的根心，所以 $L_1L_2L_3$ 共點於三圓的根心。

接著證 $L_1L'_2L'_3$ 共點，一樣先轉換 $L_1L'_2L'_3$ 的形式

$$\begin{aligned}
L_1: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + bc] - [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] \\
& \quad = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + ac] - [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] \\
L'_2: & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + bc] - [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + ac] \\
& \quad = c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + ac] \\
L'_3: & \quad b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + ac] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + bc] \\
& \quad = c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + bc]
\end{aligned}$$

考慮三圓、三根軸，其中 C'_B 、 C'_C 為虛圓

$$\begin{aligned}
C_A: & \quad (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = ab \\
C'_B: & \quad (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = -ac \\
C'_C: & \quad (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 = -bc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{AB'}: & \quad [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + ac] = 0 \\
L_{B'C'}: & \quad [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + ac] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + bc] = 0 \\
L_{AC'}: & \quad [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - ab] - [(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + bc] = 0
\end{aligned}$$

由直線束可證 $L_1L_2L_3$ 共點於此三圓的根心。相似的可證 $L'_1L_2L'_3$ 共點、 $L'_1L'_2L_3$ 共點。 $\square$

在證明 $L_1L_2L_3$ 共點的過程中，得到以下定理

定理 5. $\Gamma_1: |\overline{PA} \pm \overline{PB}| = a$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PA} \pm \overline{PC}| = b$ 、 $\Gamma_3: |\overline{PB} \pm \overline{PC}| = c$ ，則 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 的三條第一類根軸共點於 $\odot A(\sqrt{ab})$ 、 $\odot B(\sqrt{ac})$ 、 $\odot C(\sqrt{bc})$ 的根心。

2.2.7 共單一焦點的橢圓、雙曲線

以上是討論三個兩兩共不同焦點的橢圓和雙曲線的共點性質，以下是共同一焦點的三個橢圓或雙曲線的共點性質。

定理 6. 三圓錐曲線 $\Gamma_1: |\overline{PA} \pm \overline{PB}| = a$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PA} \pm \overline{PC}| = b$ 、 $\Gamma_3: |\overline{PA} \pm \overline{PD}| = c$ ，三組類根軸為 L_1 、 L'_1 、 L_2 、 L'_2 、 L_3 、 L'_3 。 $L_1L_2L_3$ 共點、 $L_1L'_2L'_3$ 共點、 $L'_1L_2L'_3$ 共點，如圖 13、14。

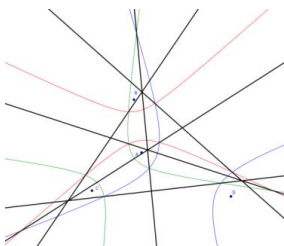


圖 13

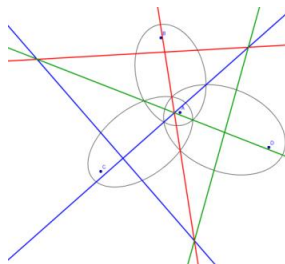


圖 14

證明. 先證 $L_1L_2L_3$ 共點。

$A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $D(x_4, y_4)$

$$\begin{aligned} L_1: & a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ & = b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \\ L_2: & c[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ & = b[(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - c^2] \\ L_3: & a[(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - c^2] \\ & = c[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \end{aligned}$$

觀察得

$$c \times L_1 - a \times L_2 = b \times L_3$$

得證三線共點。

$$\begin{aligned} L'_1: & a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ & = -b[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \\ L'_2: & c[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - b^2] \\ & = -b[(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - c^2] \\ L'_3: & a[(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - c^2] \\ & = -c[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \end{aligned}$$

觀察得

$$\begin{aligned} a \times L'_2 - b \times L'_3 &= c \times L_1 \\ c \times L'_1 - a \times L'_2 &= b \times L_3 \\ c \times L'_1 - b \times L'_3 &= a \times L_2 \end{aligned}$$

得證三線共點。

□

2.2.8 四個橢圓或雙曲線

增加到四個橢圓或雙曲線，經過觀察，得到定理 7。

定理 7. 平面上任意四點 A 、 B 、 C 、 D 。 $\Gamma_1 : |\overline{PA} \pm \overline{PB}| = a$ 、 $\Gamma_2 : |\overline{PB} \pm \overline{PC}| = b$ 、 $\Gamma_3 : |\overline{PC} \pm \overline{PD}| = c$ 、 $\Gamma_4 : |\overline{PA} \pm \overline{PD}| = d$ 。當且僅當 $a+c=b+d$ 時， $\Gamma_1\Gamma_2$ 、 $\Gamma_2\Gamma_3$ 、 $\Gamma_3\Gamma_4$ 、 $\Gamma_1\Gamma_4$ 的第一類根軸共點，如圖 15、16。

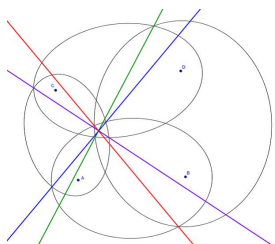


圖 15

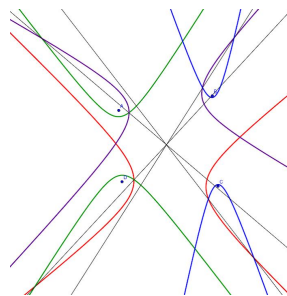


圖 16

證明. 先證充分性。

作 $\Gamma_1\Gamma_2$ 、 $\Gamma_2\Gamma_3$ 、 $\Gamma_3\Gamma_4$ 、 $\Gamma_1\Gamma_4$ 的第一類根軸

$$\begin{aligned} L_1 : & \quad a[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_2)^2 - (y-y_2)^2 - b^2] \\ & \quad - b[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (x-x_2)^2 - (y-y_2)^2 - a^2] = 0 \\ L_2 : & \quad b[(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 - (x-x_3)^2 - (y-y_3)^2 - c^2] \\ & \quad - c[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_3)^2 - (y-y_3)^2 - b^2] = 0 \\ L_3 : & \quad c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (x-x_4)^2 - (y-y_4)^2 - d^2] \\ & \quad - d[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_4)^2 - (y-y_4)^2 - c^2] = 0 \\ L_4 : & \quad d[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - a^2] \\ & \quad - a[(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - d^2] = 0 \end{aligned}$$

$(-c) \times L_1 + (-c+d) \times L_2$ 整理後得

$$\begin{aligned} & +bc[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (x-x_4)^2 - (y-y_4)^2 - d^2] \\ & -bd[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_4)^2 - (y-y_4)^2 - c^2] \\ & +c(a-b+c-d)[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (x-x_3)^2 - (y-y_3)^2 - b(a-c+d)] \\ & = 0 \end{aligned}$$

若 $a+c=b+d$ ，則可再化簡為

$$\begin{aligned} & c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (x-x_4)^2 - (y-y_4)^2 - d^2] \\ & -d[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (x-x_4)^2 - (y-y_4)^2 - c^2] = 0 \end{aligned}$$

即為 L_3 ，可得等式 $(-c) \times L_1 + (-c + d) \times L_2 = b \times L_3$ ，三線共點。

相似的可得 $(d - a) \times L_1 + (-a) \times L_2 = b \times L_4$ ，得證四線共點。

接下來證必要性。

已知 $\Gamma_1: |\overline{PA} \pm \overline{PB}| = a$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PB} \pm \overline{PC}| = b$ 、 $\Gamma_3: |\overline{PC} \pm \overline{PD}| = c$ 。令 $\Gamma_1\Gamma_2$ 、 $\Gamma_2\Gamma_3$ 的兩第一類根軸 L_1 、 L_2 交於 $P(x_0, y_0)$ 。設 $\Gamma_4: |\overline{PA} \pm \overline{PD}| = n$ ，考慮 $\Gamma_1\Gamma_4$ 、 $\Gamma_3\Gamma_4$ 的兩類根軸 L_3 、 L_4

$$\begin{cases} L_3: & c[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (x - x_4)^2 - (y - y_4)^2 - n^2] \\ & - n[(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (x - x_4)^2 - (y - y_4)^2 - c^2] = 0 \\ L_4: & n[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 - a^2] \\ & - a[(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 - n^2] = 0 \end{cases}$$

L_3 、 L_4 過 $P(x_0, y_0)$ ，將 P 代入兩式，得以下兩一元二次方程式

$$\begin{cases} cn^2 + n[(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 - (x_0 - x_4)^2 - (y_0 - y_4)^2 - c^2] \\ - c[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 - (x_0 - x_4)^2 - (y_0 - y_4)^2] = 0 \\ an^2 + n[(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 - (x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2 - a^2] \\ - a[(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2 - (x_0 - x_1)^2 - (y_0 - y_1)^2] = 0 \end{cases}$$

由兩式的 n^2 項與常數項係數比不同，可知兩式的解不完全相同，而唯一的共同解為 $n = a + c - b$ 。得證四線共點時，滿足 $a + c = b + d$ 。□

2.3 等差點性質證明

以下針對等差點以及等和點的各項性質(參見 2.1.3 小節)提出證明。證明的方式係將等差點所滿足的方程式分成四類(參見 2.1.1 小節情形 1 4)，等和點則併入第一類。

2.3.1 等差點、等和點個數

定理 8. 令三邊長 $a \geq b \geq c$ ，則當 $\sqrt{\frac{1}{r_1}} \leq \sqrt{\frac{1}{r_2}} + \sqrt{\frac{1}{r_3}}$ 時有七個等差點、一個等和點， $\sqrt{\frac{1}{r_1}} > \sqrt{\frac{1}{r_2}} + \sqrt{\frac{1}{r_3}}$ 時有六個等差點、兩個等和點。直角三角形四個等差點重合。

證明. 1. 情形 2、3、4 各有兩個等差點

以情形 2 為例。情形 2 的等差點為 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a + b$ 、 $\Gamma_2: \overline{PA} + \overline{PC} = a + c$ 這兩個橢圓的交點。由 Γ_1 通過 Γ_2 的焦點 C 、 Γ_2 通過 Γ_1 的焦點 B ，可知這兩個橢圓有實交點。又這兩個橢圓有共同焦點 A ，由定理 3 可知最多有兩個實交點。所以符合情形 2 的等差點恰有兩個，同理可證情形 3、4 也恰有兩個等差點。

2. 情形 1

先證雙曲線和與其漸近線平行的直線恰有一交點。

設兩不平行直線 $L_1: L = 0$ 、 $L_2: L' = 0$ 。 Γ 為以 L_1 、 L_2 為漸近線的雙曲線，方程式為 $L \times L' = 1$ 。考慮一與其中一條漸近線平行的直線 $L_3: L = a(a \neq 0)$ ，則 L_3 與 Γ 的交點滿足

$$\begin{cases} L_3: L = a(a \neq 0) \\ \Gamma: L \times L' = 1 \end{cases}$$

可換為

$$\begin{cases} L = a \\ L' = \frac{1}{a} \end{cases}$$

由 L_1 、 L_2 不平行，恰有一解。

以下令 $a \geq b \geq c$ 。情形 1 為 $\Gamma_1: |\overline{PA} - \overline{PB}| = a - b$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PA} - \overline{PC}| = a - c$ 這兩個雙曲線的其中幾個交點。等差點為 $\overline{PA} - \overline{PB} = a - b$ 、 $\overline{PA} - \overline{PC} = a - c$ 這兩支的交點。等和點為 $\overline{PA} - \overline{PB} = b - a$ 、 $\overline{PA} - \overline{PC} = c - a$ 這兩支的交點，等和點所在的這兩支分別通過 C 、 B 。接著由兩雙曲線的相交情形判斷等差點、等和點的個數。

作 Γ_1 的兩漸近線，分為四條以 A 、 B 中點為起點的射線，令靠近 $\overline{PA} - \overline{PB} = b - a$ 這一支的兩射線所組成的函數圖形為 f_{BA} 、兩射線中通過三角形內部的為 L_{B1} 、射線與 $\overline{AB}$ 所夾的銳角為 α 。再作以這一支的頂點為起點，方向與 f_{BA} 的兩條射線方向相同的兩射線，並令這兩條射線組成的函數圖形為 g_{BA} 。由於 g_{BA} 的兩條射線與漸近線平行，所以 g_{BA} 只與這一支相交於頂點。相同的對於 $\overline{PA} - \overline{PC} = c - a$ 可作 f_{CA} 、 L_{C1} 、 g_{CA} ，其射線與 $\overline{AC}$ 所夾的銳角為 β 。令 f_{BA} 與 g_{CA} 、 f_{CA} 的交點為 M 、 N ， g_{BA} 與 f_{CA} 、 g_{CA} 得交點為 O 、 P 。接著從 M 到 N 沿 f_{BA} 作折線段(或直線段) MN ，從 N 到 O 沿 f_{CA} 作折線段 NO ，從 O 到 P 沿 g_{BA} 作折線段 OP ，從 P 到 M 沿 g_{CA} 作折線段 PM 。由於 f_{BA} 、 g_{BA} 將 $\overline{PA} - \overline{PB} = b - a$ 夾在中間，所以 $\overline{PA} - \overline{PB} = b - a$ 與由上述四條折線段所組成的多邊形只交於 NO 、 PM (或再加上 g_{BA} 的折點)，而 $\overline{PA} - \overline{PC} = c - a$ 與多邊形只交於 MN 、 OP ，於是可知這兩支至少有一交點，此交點為等和點。圖 17 為都是直線段的情形，圖 18 為 MN 、 NO 為折線段的情形。

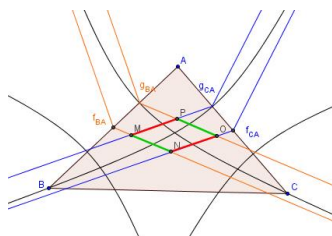


圖 17

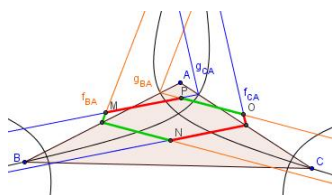


圖 18

由上述可知，若 f_{BA} 與 g_{CA} 、 f_{CA} 均有交點、 g_{BA} 與 f_{CA} 、 g_{CA} 均有交點則可確定兩支有一交點。接著與上面相似的令另外兩條靠近 $\overline{PA} - \overline{PB} = a - b$ 這一支的兩射線組成的函數圖形為 f_{AB} 、令以這一支頂點為起點，方向與 f_{AB} 兩條射線方向相同的兩射線組成的函數圖形為 g_{AB} 。對於 $\overline{PA} - \overline{PC} = a - c$ 也作 f_{AC} 、 g_{AC} ，並令 Γ_1 兩條漸近線中不包含 L_{B1} 的為 L_B 、 Γ_2 兩條漸近線中不包含 L_{C1} 的為 L_C 。

作 L 通過 A 、 B 中點與 A 、 C 中點，並將平面以 L 分為兩個半平面。接著分為四種情形，情形一是 L_B 、 L_C 的交點與 A 在同一半平面，情形二是 L_B 、 L_C 的交點與 B 、 C 在同一半平面，情形三是 L_B 、 L_C 平行，情形四是 L_B 、 L_C 、 L 共點。

情形四時，必有一直線與 L 重和。假設 L_B 與 L 重和，則有 $\alpha + \angle C = 180^\circ$ ，因 $\alpha < 90^\circ$ 所以 $\angle C > 90^\circ$ ， $c > a$ ，與假設矛盾。所以 L_B 、 L_C 、 L 不共點。

接著看其他三種情形如圖 19、20、21。將情形三中雙曲線的交點視為在無窮遠的等差點，則這三種情形的等差點、等和點個數(不包括上面提到的等和點)分別為 $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 0)$ ， $\alpha + \beta$ 的值與 $\angle A$ 的值大小關係分別為小於、大於、等於。

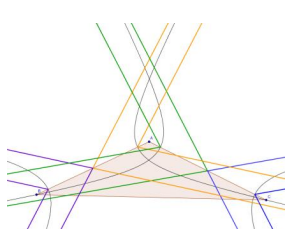


圖 19

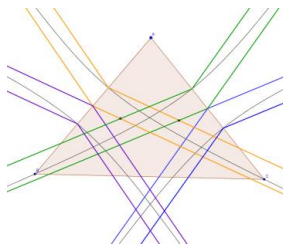


圖 20

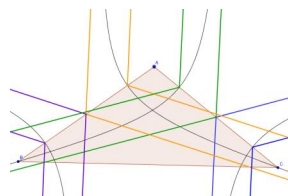


圖 21

接著計算 $\alpha + \beta < \angle A$ 的條件。由 $\alpha + \beta < 180^\circ$, $\angle A < 180^\circ$ 所以若 $\alpha + \beta < \angle A$ 則 $\cos(\alpha + \beta) - \cos A > 0$ 。

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - (a-c)^2}}{b} \\ \cos \alpha = \frac{a-c}{b} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \beta = \frac{\sqrt{c^2 - (a-b)^2}}{c} \\ \cos \beta = \frac{a-b}{c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) - \cos A \\ &= \frac{(a-b)(a-c)}{bc} - \frac{\sqrt{b^2 - (a-c)^2} \sqrt{c^2 - (a-b)^2}}{bc} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{1}{2bc} [3a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ac - 8r_1 \sqrt{r_2 r_3}] \\ &= \frac{1}{2bc} [(a-b)^2 + (a-c)^2 - (b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 8r_1 \sqrt{r_2 r_3}] \\ &= \frac{1}{2bc} [-4r_1 r_2 - 4r_1 r_3 + 4r_2 r_3 - 8r_1 \sqrt{r_2 r_3}] \\ &= \frac{2}{bc} [\sqrt{r_2 r_3}^2 - (\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3})^2] \\ &= \frac{2}{bc} [\sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3}] [\sqrt{r_2 r_3} - \sqrt{r_1 r_2} - \sqrt{r_1 r_3}] \\ &= \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{bc} [\sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3}] \left[\sqrt{\frac{1}{r_1}} - \sqrt{\frac{1}{r_3}} - \sqrt{\frac{1}{r_2}} \right] \end{aligned}$$

所以當 $\sqrt{\frac{1}{r_1}} - \sqrt{\frac{1}{r_3}} - \sqrt{\frac{1}{r_2}} > 0$ 時有兩個等和點， $\sqrt{\frac{1}{r_1}} - \sqrt{\frac{1}{r_3}} - \sqrt{\frac{1}{r_2}} \leq 0$ 時有一個等差點、一個等和點。

直角三角形時，作矩形 $ABCD$ ， D 點滿足情形 1、2、3、4，四個等差點重和。 $\square$

2.3.2 每組等差點連線通過對應的旁心、內心

定理 9. 依四種情形分組，每組等差點、等和點連線通過相應的旁心、內心。

證明. 1. 第 2、3、4 組連線，分別通過三個旁心

第二組等差點連線為 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a + b$ 、 $\Gamma_2: \overline{PA} + \overline{PC} = a + c$ 的第一類根軸。

設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，並作 $\odot A(s)$ 。將 $\odot A(s)$ 視為兩焦點都在 A 、長軸為 $2s$ 的橢圓，計算 $\odot A$ 與 Γ_1 的第一類根軸 L_1 ，化簡整理得

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r_3)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - s^2$$

L_1 為 $\odot A(s)$ 、 $\odot B(r_3)$ 的根軸。

相似的可得 $\odot A$ 與 Γ_2 的第一類根軸 L_2 為 $\odot A(s)$ 、 $\odot C(r_2)$ 的根軸。

由於 $\odot A$ 、 Γ_1 、 Γ_2 可視為三個有一共同焦點在 A 的三個橢圓，所以三條第一類根軸共點，等差點連線通過 L_1 、 L_2 的交點。再由 $\odot A(s)$ 、 $\odot B(r_3)$ 、 $\odot C(r_2)$ 三圓的根心即為邊 A 外的旁心，得證第二組等差點連線通過邊 A 外的旁心。相似的可證第三、四組亦通過對應的旁心。

2. 第一組連線通過內心

第一組連線為 $\Gamma_1: |\overline{PA} - \overline{PB}| = a - b$ 、 $\Gamma_2: |\overline{PA} - \overline{PC}| = a - c$ 的第一類根軸。

設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，並作 $\odot A(r_1)$ 。將 $\odot A(r_1)$ 視為兩焦點都在 A 、長軸為 $2r_1$ 的橢圓，計算 $\odot A$ 與 Γ_1 的第二類根軸 L'_1 ，化簡整理得

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r_2)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2$$

可知 L'_1 即為 $\odot A(r_1)$ 、 $\odot B(r_2)$ 的根軸。

相似的可得 $\odot A$ 與 Γ_2 的第二類根軸 L'_2 為 $\odot A(r_1)$ 、 $\odot C(r_3)$ 的根軸。

由於 $\odot A$ 、 Γ_1 、 Γ_2 可視為三個有一共同焦點在 A 的一個橢圓、兩個雙曲線，所以 Γ_1 、 Γ_2

的第一類根軸與 $\odot A$ 、 Γ_1 以及 $\odot A$ 、 Γ_2 的兩條第二類軸共點，第一組連線通過 L'_1 、 L'_2 的交點。再由 $\odot A(r_1)$ 、 $\odot B(r_2)$ 、 $\odot C(r_3)$ 三圓的根心即為內心，得證第一組連線通過內心。

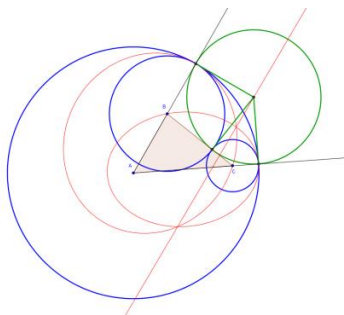


圖 22

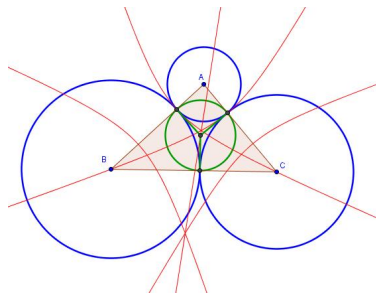


圖 23

□

2.3.3 七線共點

定理 10. 四組等差點連線及 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 、 $\odot C(c)$ 的三條根軸七線共點。

證明. 先證四組等差點、等和點連線共點。由等差點、等和點為數個兩兩有共同焦點的圓錐曲線的交點，四線共點即為定理 4 的特例。設共點於 P 。

接著證 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 、 $\odot C(c)$ 的三條根軸均過 P 。可知 P 為 $\Gamma_1: \overline{PA} + \overline{PB} = a + b$ 、 $\Gamma_2: \overline{PA} + \overline{PC} = a + c$ 、 $\Gamma_3: \overline{PB} + \overline{PC} = b + c$ 三個橢圓之間的三條第一類根軸的交點。作 $\odot A(a)$ ，並將其視為兩焦點都在 A 、長軸為 $2a$ 的橢圓。計算 $\odot A$ 、 Γ_1 的第一類根軸 L_1 ，化簡整理得

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - c^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - a^2$$

L_1 亦為 $\odot A(a)$ 、 $\odot C(c)$ 的根軸。

相似的可得 $\odot A$ 、 Γ_2 的第一類根軸 L_2 為 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 的根軸。

由於 $\odot A$ 與 Γ_3 的長軸和等於 Γ_1 和 Γ_2 的長軸和，由定理 7 可知 $\odot A$ 、 Γ_1 以及 $\odot A$ 、 Γ_2 的第一類根軸均過 P ，即 L_1 、 L_2 過 P ， P 為 $\odot A(a)$ 、 $\odot B(b)$ 、 $\odot C(c)$ 的根心。得證三條根軸均過 P 。

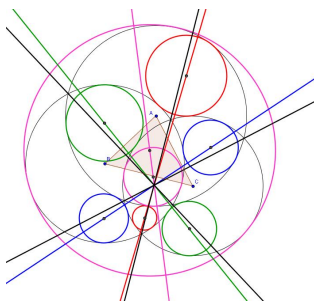


圖 24

□

參考文獻

- [1] 黃華松, 黃光文, 王志勇, 三角形的“等差點”初探, 中國初等數學研究, 第1輯, p.57-61, 2009.
- [2] 廖偉恩, 以國中幾何角度看圓錐曲線, 第三屆丘成桐數學獎, 2012.
- [3] 汪曉勤, 張小明, 圓之吻 阿波羅尼斯問題的歷史
http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d302/30204.pdf