讓我們來看「面」「向」－向量與多邊形的面積關係

臺北市立第一女子高級中學 陳育婷
指導老師 楊健民

1 簡介

1.1 研究動機

上高中以後才學習到「向量」這個新名詞，它讓我用不同的角度思考數學；對於其應用之廣泛以及能證明多個定理感到驚奇；此外它與幾何學也有極大的關係，例如在高二時學到用向量分割出三角形的面積比，恰好是點 P 到對頂點向量的係數比：

設點 P 在 $\triangle ABC$ 的內部且 $m,\ n,\ k>0$，
若 $m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，則 $\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=m:n:k.$
證明：設 $\overrightarrow{PA'}=m\overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{PB'}=n\overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{PC'}=k\overrightarrow{PC}$，

$$\begin{aligned}
&\therefore \overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\vec{0}\Rightarrow P \text{ 為 } \triangle\, A'B'C' \text{ 之重心}\\
&\Rightarrow \triangle PB'C'=\triangle PC'A'=\triangle PA'B'\\
&\because |\overrightarrow{PA'}|=m|\overrightarrow{PA}|,\ |\overrightarrow{PB'}|=n|\overrightarrow{PB}|,\ |\overrightarrow{PC'}|=k|\overrightarrow{PC}|\\
&\therefore \triangle\, PB'C'=nk\triangle\, PBC,\ \ \triangle PC'A'=km\triangle\, PCA,\ \ \triangle PA'B'=mn\triangle\, PAB,\\
&\Rightarrow nk\triangle\, PBC=km\triangle\, PCA=mn\triangle\, PAB\\
&\Rightarrow \triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=m:n:k
\end{aligned}$$

讓我想到是否能將此推廣到正四邊形、甚至是正 n 邊形都會有某種規律，於是我開始進行這項研究。

1.2 研究目的

我們猜想正 n 邊形的分割三角形的面積比都可以以向量之係數表示，而且分割三角形的面積比是以內部一點到對面頂點的向量係數表示。若我們能推出規律，並用一項公式概括到正 n 邊形的分割三角形的面積比，將能運用此結果快速求出分割三角形的面積比。

1.3 研究結果

我們一開始先參考了三角形的證明方法。因為重心性質只適用於三角形，所以我們從不同的角度及方法切入，得到了分割三角形的面積比。

定理 1. (存在唯一性) 若 $A_1A_2\cdots A_n$ 為平面上之正 n 邊形，若 $k_1,\ k_2,\cdots,k_n$ 為給定 n 個實數，且 $k_1+k_2+\cdots+k_n\neq 0$，則存在唯一的點 P，滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}=\vec{0}$。
推論 1. (定理 2 之延伸定理) 設正方形 $ABCD$，有一點 P 滿足

$$(-dt+cs+(1-t-s)a)\overrightarrow{PA}+(dt-cs+(1-t-s)b)\overrightarrow{PB}+(-dt+(1-t)c)\overrightarrow{PC}+(-cs+(1-s)d)\overrightarrow{PD}=\vec{0},\ t,\ s\in\mathbb{R},$$

則 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDA=|c+d|:|d+a|:|a+b|:|b+c|.$

推論 2. (定理 3 之延伸定理) 設正六邊形 $ABCDEF$，有一點 P 滿足

$$[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)a+(d+2e+2f)t_1+(c-2e-3f)t_2+2(c+d-f)t_3+(2c+3d+2e)t_4]\overrightarrow{PA}$$
$$+[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)b+(2d+3e+2f)t_1-2(c-e-f)t_2-2(3c+2d-f)t_3-(2c+2d+e)t_4]\overrightarrow{PB}$$
$$+[(1-t_1)c-(2d+2e+f)t_1]\overrightarrow{PC}+[(1-2t_2)d-(c+2e+f)t_2]\overrightarrow{PD}+[(1-2t_3)e-(c+2d+f)t_3]\overrightarrow{PE}$$
$$+[(1-t_4)f-(c+2d+2e)t_4]\overrightarrow{PF}=\vec{0}, \text{其中 } t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\in\mathbb{R},$$

則
$$\begin{aligned}&\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFA\\&=|c+2d+2e+f|:|d+2e+2f+a|:|e+2f+2a+b|:|f+2a+2b+c|:|a+2b+2c+d|\\&\quad:|b+2c+2d+e|.\end{aligned}$$

推論 3. (定理 5 之延伸定理(1)) 設正 $2n$ 邊形 $A_0A_1\cdots A_{2n-1}$，有一點 P 滿足

$$\left\{2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[2n\cos k\theta+(a-1)\cos k\theta-a+1]\,t_k}{n}\right\}\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots$$
$$+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n-1}}+\overrightarrow{PA_n}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-2})\overrightarrow{PA_{n+2}}+\cdots$$
$$+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n-1}}=\vec{0}, \text{其中 } t_1,\ t_2,\cdots,t_{n-1}\in\mathbb{R}$$

則 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比可表示為 $(2n+a-1)\cos\dfrac{\theta}{2}-(a-1)\cos\dfrac{2k+1}{2}\theta,\ \theta=\dfrac{\pi}{n}$

推論 4. (定理 5 之延伸定理(2)) 設正 $2n+1$ 邊形 $A_0A_1\cdots A_{2n}$，有一點 P 滿足

$$\Rightarrow\quad\left[2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(4n\cos k\theta+2a\cos k\theta-2a+2)t_k}{2n+1}\right]\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots$$
$$+(1-t_n)\overrightarrow{PA_n}+(1-t_n)\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+2}}+\cdots$$
$$+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n}}=\vec{0},\ t_1,\ t_2,\cdots,t_n\in\mathbb{R},\ \theta=\frac{2\pi}{2n+1},$$

則 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比可表示為 $(2n+a)\cos\dfrac{\theta}{2}-(a-1)\cos\dfrac{2k+1}{2}\theta,\ \theta=\dfrac{2\pi}{2n+1}$.

定理 12. 邊數大於或等於 5 的正多邊形中，除了正六邊形外，不存在有全相異之係數 $k_1,\ k_2,\cdots,k_n$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+k_3\overrightarrow{PA_3}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}=\vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。

2 研究內容

2.1 名詞定義及預備知識

1. $\overrightarrow{OA_0}=(1,0)$ 表示從原點出發沿正 x 軸行進的單位向量。
2. $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比：表 $\triangle PA_0A_1:\triangle PA_1A_2:\triangle PA_2A_3:\cdots:\triangle PA_{n-1}A_0$。
3. 設 $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$，則

   $\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3|.$

4. 本篇研究所討論之正 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，P 點滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}=\vec{0}$，此時皆排除 $k_1=k_2=\cdots=k_n$ 之情形，因為此時點 P 在原點，$\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比恆為 1。

2.2 向量與正多邊形分割三角形的面積關係之探討

2.2.1 P 點之存在唯一性

定理 1 (存在唯一性)**.** 若 $A_1A_2\cdots A_n$ 為平面上之正 n 邊形，若 $k_1,\ k_2,\cdots,k_n$ 為給定 n 個實數，且 $k_1+k_2+cdots+k_n\neq 0$，則存在唯一的點 P，滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}=\vec{0}$.

證明.

1. 先證明存在性. 因為

$$\begin{aligned}
&k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+k_3\overrightarrow{PA_3}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}\\
&=k_1\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP}\right)+k_2\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP}\right)+k_3\left(\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OP}\right)+\cdots+k_n\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP}\right)\\
&=k_1\overrightarrow{OA_1}+k_2\overrightarrow{OA_2}+k_3\overrightarrow{OA_3}+\cdots+k_n\overrightarrow{OA_n}-(k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n)\overrightarrow{OP}
\end{aligned}$$

因此我們只要取 P 點滿足 $\overrightarrow{OP}$，則

$$k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}=\vec{0},$$

因此 P 點存在。

2. 再證明唯一性. 假設存在 $P,\ Q$ 兩點使得 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{PA_n}=k_1\overrightarrow{QA_1}+k_2\overrightarrow{QA_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{QA_n}=\vec{0}$ 則

$$k_1\left(\overrightarrow{PA_1}-\overrightarrow{QA_1}\right)+k_2\left(\overrightarrow{PA_2}-\overrightarrow{QA_2}\right)+\cdots+k_n\left(\overrightarrow{PA_n}-\overrightarrow{QA_n}\right)=\vec{0},$$

$$k_1\overrightarrow{PQ}+k_2\overrightarrow{PQ}+\cdots+k_n\overrightarrow{PQ}=\vec{[0]}\Rightarrow(k_1+k_2+\cdots+k_n)\overrightarrow{PQ}=\vec{0}.$$

但是 $k_1+k_2+\cdots+k_n\neq 0$，所以 $\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$，亦即 $P=Q$。 □

2.2.2 正方形、正六邊形、正八邊形之分割三角形的面積比之探討

定理 2 (正方形之面積比)**.** 設正方形 $ABCD$，且點 P 滿足 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}=\vec{0}$，$a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ 且 $a+b+c+d\neq 0$，則 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDA=|c+d|:|d+a|:|a+b|:|b+c|$。

證明. 不失一般性，我們可以將正方形之四個頂點定在 $A(0,1),\ B(0,0),\ C(1,0),\ D(1,1)$, 因為 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}=\vec{0}$, 所以 $a(-x,1-y)+b(-x,-y)+c(1-x,-y)+d(1-x,1-y)=(0,0)$. 因此 $x=\dfrac{c+d}{a+b+c+d},\ y=\dfrac{a+d}{a+b+c+d}$

$$\begin{aligned}
&\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDA\\
&=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&0&x&0\\1&0&y&1\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0&1&x&0\\0&0&y&0\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1&1&x&1\\0&1&y&0\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1&0&x&1\\1&1&y&1\end{matrix}\right\|\\
&=|x|:|y|:|1-x|:|1-y|=|c+d|:|d+a|:|a+b|:|b+c|.
\end{aligned}$$

□

定理 3 (正六邊之面積比)**.** 設正六邊形 $ABCDEF$，且點 P 滿足 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0},\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\in\mathbb{R}$ 且 $a+b+c+d+e+f\neq 0$，則

$$\begin{aligned}
&\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFA\\
&=|c+2d+2e+f|:|d+2e+2f+a|:|e+2f+2a+b|:|f+2a+2b+c|:|a+2b+2c+d|:|b+2c+2d+e|
\end{aligned}$$

證明. 不失一般性 我們可以將正六邊形之六個頂點定在 $A(1,-\sqrt{3}),\ B(0,0),\ C(1,\sqrt{3}),\ D(3,\sqrt{3}),\ E(4,0),\ F(3,-\sqrt{3})$

因為 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$,

推得 $a(1-x,-\sqrt{3}-y)+b(-x,-y)+c(1-x,\sqrt{3}-y)+d(3-x,\sqrt{3}-y)+e(4-x,-y)+f(3-$

$x, -\sqrt{3}-y)=(0,0)$. 以及 $x=\dfrac{a+c+3d+4e+3f}{a+b+c+d+e+f}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}(-a+c+d-f)}{a+b+c+d+e+f}$.
所以 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFA$
$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0 & 1 & x & 0\\ 0 & -\sqrt{3} & y & 0\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0 & x & 1 & 0\\ 0 & y & \sqrt{3} & 0\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & x & 3 & 1\\ \sqrt{3} & y & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & 3 & x & 4\\ 0 & \sqrt{3} & y & 0\end{matrix}\right\|$
$:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & x & 3 & 4\\ 0 & y & -\sqrt{3} & 0\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 3 & x & 1\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & y & -\sqrt{3}\end{matrix}\right\|$
$=|\sqrt{3}x+y|:|\sqrt{3}x-y|:|2\sqrt{3}-2y|:|-\sqrt{3}x-y+4\sqrt{3}|:|-\sqrt{3}x+y+4\sqrt{3}|:|2y+2\sqrt{3}|$
$=|c+2d+2e+f|:|d+2e+2f+a|:|e+2f+2a+b|:|f+2a+2b+c|$
$:|a+2b+2c+d|:|b+2c+2d+e|$. □

定理 4 (正八邊之面積比). 設正八邊形 $ABCDEFGH$，且點 P 滿足 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}+g\overrightarrow{PG}+h\overrightarrow{PH}=\vec{0}$, $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\in\mathbb{R}$ 且 $a+b+c+d+e+f+g+h\neq 0$，則

$$\begin{aligned}&\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFG:\triangle PGH:\triangle PHA\\ &=|c+(1+\sqrt{2})d+(2+\sqrt{2})e+(2+\sqrt{2})f+(1+\sqrt{2})g+h|\\ &\quad:|d+(1+\sqrt{2})e+(2+\sqrt{2})f+(2+\sqrt{2})g+(1+\sqrt{2})h+a|\\ &\quad:|e+(1+\sqrt{2})f+(2+\sqrt{2})g+(2+\sqrt{2})h+(1+\sqrt{2})a+b|\\ &\quad:|f+(1+\sqrt{2})g+(2+\sqrt{2})h+(2+\sqrt{2})a+(1+\sqrt{2})b+c|\\ &\quad:|g+(1+\sqrt{2})h+(2+\sqrt{2})a+(2+\sqrt{2})b+(1+\sqrt{2})c+d|\\ &\quad:|h+(1+\sqrt{2})a+(2+\sqrt{2})b+(2+\sqrt{2})c+(1+\sqrt{2})d+e|\\ &\quad:|a+(1+\sqrt{2})b+(2+\sqrt{2})c+(2+\sqrt{2})d+(1+\sqrt{2})e+f|\\ &\quad:|b+(1+\sqrt{2})c+(2+\sqrt{2})d+(2+\sqrt{2})e+(1+\sqrt{2})f+g|.\end{aligned}$$

證明. 不失一般性,我們可以將正八邊形之八個頂點定在 $A(1,-1)$, $B(1+\sqrt{2},-1)$, $C(2+\sqrt{2},0)$, $D(2+\sqrt{2},\sqrt{2})$, $E(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, $F(1,1+\sqrt{2})$, $G(0,\sqrt{2})$, $H(0,0)$
因為 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}+g\overrightarrow{PG}+h\overrightarrow{PH}=\vec{0}$,
推得 $a(1-x,-1-y)+b(1+\sqrt{2}-x,-1-y)+c(2+\sqrt{2}-x,-y)+d(2+\sqrt{2}-x,\sqrt{2}-y)$
$+e(1+\sqrt{2}-x,1+\sqrt{2}-y)+f(1-x,1+\sqrt{2}-y)+g(-x,\sqrt{2}-y)+h(-x,-y)=(0,0)$,
以及 $x=\dfrac{a+(1+\sqrt{2})b+(2+\sqrt{2})c+(2+\sqrt{2})d+(1+\sqrt{2})e+f}{a+b+c+d+e+f+g+h}$
$y=\dfrac{-a-b+\sqrt{2}d+(1+\sqrt{2})e+(1+\sqrt{2})f+\sqrt{2}g}{a+b+c+d+e+f+g+h}$.
所以 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFG:\triangle PGH:\triangle PHA$
$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 1+\sqrt{2} & x & 1\\ -1 & -1 & y & -1\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & x & 1+\sqrt{2}\\ -1 & 0 & y & -1\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & x & 2+\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & y & 0\end{matrix}\right\|$
$:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & x & 2+\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & y & \sqrt{2}\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1+\sqrt{2} & 1 & x & 1+\sqrt{2}\\ 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & y & 1+\sqrt{2}\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0 & 1 & x & 0\\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & y & \sqrt{2}\end{matrix}\right\|$
$:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0 & x & 0 & 0\\ 0 & y & \sqrt{2} & 0\end{matrix}\right\|:\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}0 & 1 & x & 0\\ 0 & -1 & y & 0\end{matrix}\right\|$
$=|\sqrt{2}+\sqrt{2}y|:|-x+y+2+\sqrt{2}|:|-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+2|:|-x-y+2\sqrt{2}+2|:|-\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}|$
$:|x-y+\sqrt{2}|:|\sqrt{2}x|:|x+y|$
$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFG:\triangle PGH:\triangle PHA$
$=|c+(1+\sqrt{2})d+(2+\sqrt{2})e+(2+\sqrt{2})f+(1+\sqrt{2})g+h|$
$:|d+(1+\sqrt{2})e+(2+\sqrt{2})f+(2+\sqrt{2})g+(1+\sqrt{2})h+a|$
$:|e+(1+\sqrt{2})f+(2+\sqrt{2})g+(2+\sqrt{2})h+(1+\sqrt{2})a+b|$
$:|f+(1+\sqrt{2})g+(2+\sqrt{2})h+(2+\sqrt{2})a+(1+\sqrt{2})b+c|$

$:|g+(1+\sqrt{2})h+(2+\sqrt{2})a+(2+\sqrt{2})b+(1+\sqrt{2})c+d|$
$:|h+(1+\sqrt{2})a+(2+\sqrt{2})b+(2+\sqrt{2})c+(1+\sqrt{2})d+e|$
$:|a+(1+\sqrt{2})b+(2+\sqrt{2})c+(2+\sqrt{2})d+(1+\sqrt{2})e+f|$
$:|b+(1+\sqrt{2})c+(2+\sqrt{2})d+(2+\sqrt{2})e+(1+\sqrt{2})f+g|$ □

2.2.3 正 n 邊形之分割三角形的面積比之探討

我們發現上述的方法難以繼續推廣到正 n 邊形，因此我們轉而研究首項向量係數為任意正實數 $a(a>0)$ 其餘係數皆固定為 1，並利用向量轉換的方式，以另一種方法求得面積比。

定理 5 (特別係數的正 n 邊形之面積比)**.** 設 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$ 為平面上之正多邊形，若 P 點滿足 $a\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_{n-1}}=\vec{0},\ a\neq 1-n,$ 則 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比可表示為 $(n+a-1)\cos\frac{\theta}{2}-(a-1)\cos\frac{2k+1}{2}\theta,\ \theta=\frac{2\pi}{n}$

證明. 因為 $a\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PA_3}+\cdots+\overrightarrow{PA_{n-1}}=\vec{0},$
所以 $a(\overrightarrow{OA_0}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP})+\cdots+(\overrightarrow{OA_{n-1}}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}.$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{a\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}}{n+a-1}$$

又因為 $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}=\vec{0},$
$a\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}=(a-1)\overrightarrow{OA_0}=(a-1,0),$
所以 $P\left(\frac{a-1}{n+a-1},0\right)$

$$\begin{aligned}\triangle PA_kA_{k+1} &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{a-1}{n+a-1} & \cos k\theta & \cos(k+1)\theta & \frac{a-1}{n+a-1}\\ 0 & \sin k\theta & \sin(k+1)\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a-1}{n+a-1}\sin k\theta+\sin(k+1)\theta\cos k\theta-\cos(k+1)\theta\sin k\theta-\frac{a-1}{n+a-1}\sin(k+1)\theta\right]\\ &= \frac{1}{2}\left\{\sin\theta-\frac{a-1}{n+a-1}[\sin(k+1)\theta-\sin k\theta]\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{a-1}{n+a-1}\times 2\cos\frac{2k+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right\}\\ &= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{n+a-1}\left[(n+a-1)\cos\frac{\theta}{2}-(a-1)\cos\frac{2k+1}{2}\theta\right].\end{aligned}$$

因為 $\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{n+a-1}$ 為定值，所以 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比為 $(n+a-1)\cos\frac{\theta}{2}-(a-1)\cos\frac{2k+1}{2}\theta.$ □

2.2.4 由存在唯一性定理(定理 1)可知，給定係數後，P 點的選取是唯一的，且面積比亦隨之固定；我們接著想問的是，不同的係數是否會對應到同一個 P 點？

定理 6. 設正方形 $ABCD$，已知點 P 滿足 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}=\vec{0}$，$a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ 且 $a+b+c+d\neq 0$，則 P 點亦滿足

$$[-dt+cs+(1-t-s)a]\overrightarrow{PA}+[dt-cs+(1-t-s)b]\overrightarrow{PB}+[-dt+(1-t)c]\overrightarrow{PC}+[-cs+(1-s)d]\overrightarrow{PD}=\vec{0},\ t,\ s\in\mathbb{R}.$$

證明.

(1) 因為 A, B 為正方形兩頂點，所以 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 不平行
令 $\overrightarrow{PC} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB}$，
因為 $a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + (c-1)\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + (c-1)\overrightarrow{PC} + \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow (a+\alpha)\overrightarrow{PA} + (b+\beta)\overrightarrow{PB} + (c-1)\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
因為 P 點給定 所以面積比不變

$$\begin{aligned}\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCD : \triangle PDA &= |c+d| : |d+a| : |a+b| : |b+c| \\ &= |c+d-1| : |d+a+\alpha| : |a+b+\alpha+\beta| : |b+c+\beta-1|\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{c+d-1}{c+d} = \dfrac{d+a+\alpha}{d+a} = \dfrac{a+b+\alpha+\beta}{a+b} = \dfrac{b+c+\beta-1}{b+c} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{a+d}{c+d},\ \beta = \dfrac{d-b}{c+d}$,
$\overrightarrow{PC} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = -\dfrac{a+d}{c+d}\overrightarrow{PA} + \dfrac{d-b}{c+d}\overrightarrow{PB}$
所以 $(c+d)\overrightarrow{PC} = -(a+d)\overrightarrow{PA} + (d-b)\overrightarrow{PB}$
$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + [c-(c+d)t]\overrightarrow{PC} + (c+d)t\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + [c-(c+d)t]\overrightarrow{PC} + t[-(a+d)\overrightarrow{PA} + (d-b)\overrightarrow{PB}] + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow [a-t(a+d)]\overrightarrow{PA} + [b+t(d-b)]\overrightarrow{PB} + [c-(c+d)t]\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow [-dt+(1-t)a]\overrightarrow{PA} + [dt+(1-t)b]\overrightarrow{PB} + [-dt+(1-t)c]\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$

(2) 同理 $(c+d)\overrightarrow{PD} = (c-a)\overrightarrow{PA} - (b+c)\overrightarrow{PB}$
$\Rightarrow [cs+(1-s)a]\overrightarrow{PA} + [-cs+(1-s)b]\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + [-cs+(1-s)d]\overrightarrow{PD} = \vec{0}$

(3) 由(1)(2)可知
$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + [c-(c+d)t]\overrightarrow{PC} + (c+d)t\overrightarrow{PC} + [d-(c+d)s]\overrightarrow{PD} + (c+d)s\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + [c-(c+d)t]\overrightarrow{PC} + t[-(a+d)\overrightarrow{PA} + (d-b)\overrightarrow{PB}] + [d-(c+d)s]\overrightarrow{PD} +$
$s[(c-a)\overrightarrow{PA} - (b+c)\overrightarrow{PB}] = \vec{0} \Rightarrow [a-t(a+d)+s(c-a)]\overrightarrow{PA} + [b+(d-b)t-s(b+c)]\overrightarrow{PB} +$
$[c-(c+d)t]\overrightarrow{PC} + [d-(c+d)s]\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
$\Rightarrow [-dt+cs+(1-t-s)a]\overrightarrow{PA} + [dt-cs+(1-t-s)b]\overrightarrow{PB} + [-dt+(1-t)c]\overrightarrow{PC}$
$+ [-cs+(1-s)d]\overrightarrow{PD} = \vec{0}$. □

推論 1 (定理2之延伸定理)**.** 設正方形 $ABCD$，有一點 P 滿足

$$[-dt+cs+(1-t-s)a]\overrightarrow{PA}+[dt-cs+(1-t-s)b]\overrightarrow{PB}+[-dt+(1-t)c]\overrightarrow{PC}+[-cs+(1-s)d]\overrightarrow{PD} = \vec{0},\ t,\ s \in \mathbb{R}.$$

則 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCD : \triangle PDA = |c+d| : |d+a| : |a+b| : |b+c|$.

證明. 由定理 6 得知，點 P 同時滿足 $a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$ 與 $[-dt+cs+(1-t-s)a]\overrightarrow{PA} + [dt-cs+(1-t-s)b]\overrightarrow{PB} + [-dt+(1-t)c]\overrightarrow{PC} + [-cs+(1-s)d]\overrightarrow{PD} = \vec{0}$
由定理 1(存在唯一性)可知滿足 $a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} + d\overrightarrow{PD} = \vec{0}$ 之 P 點是唯一存在的，
因為 P 點給定 所以面積比不變
$\Rightarrow \triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCD : \triangle PDA = |c+d| : |d+a| : |a+b| : |b+c|$.
我們也可利用定理 2 來驗證推論 1 之結果：
由定理 2 得知，正方形 $ABCD$，有一點 P 滿足 $[-dt+cs+(1-t-s)a]\overrightarrow{PA} + [dt-cs+(1-t-s)b]\overrightarrow{PB} + [-dt+(1-t)c]\overrightarrow{PC} + [-cs+(1-s)d]\overrightarrow{PD} = \vec{0},\ t,\ s \in \mathbb{R}$ 則
$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCD : \triangle PDA$
$= |[-dt+(1-t)c] + [-cs+(1-s)d]| : |[-cs+(1-s)d] + [-dt+cs+(1-t-s)a]|$
$: |[-dt+cs+(1-t-s)a] + [dt-cs+(1-t-s)b]| : |[dt-cs+(1-t-s)b] + [-dt+(1-t)c]|$
$= |[(1-s-t)d + (1-s-t)c]| : |(1-s-t)d + (1-s-t)a| : |(1-s-t)a + (1-s-t)b|$

$: |(1-s-t)b+(1-s-t)c|$
$= |c+d| : |d+a| : |a+b| : |b+c|.$ □

定理 7. 設正六邊形 $ABCDEF$，已知點 P 滿足 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$, $a,\ b,\ c,\ d,\ e, f, \in \mathbb{R}$ 且 $a+b+c+d+e+f \neq 0$，則 P 點亦滿足

$$\begin{aligned}&[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)a-(d+2e+2f)t_1+(c-2e-3f)t_2+2(c+d-f)t_3+(2c+3d+2e)t_4]\overrightarrow{PA}\\&+[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)b+(2d+3e+2f)t_1-2(c-e-f)t_2-(3c+2d-f)t_3-(2c+2d+e)t_4]\overrightarrow{PB}\\&+[(1-t_1)c-(2d+2e+f)t_1]\overrightarrow{PC}+[(1-2t_2)d-(c+2e+f)t_2]\overrightarrow{PD}\\&+[(1-2t_3)e-(c+2d+f)t_3]\overrightarrow{PE}+[(1-t_4)f-(c+2d+2e)t_4]\overrightarrow{PF}=\vec{0},\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

證明.

(1) 令 $\overrightarrow{PC}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}$
因為 $a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+(c-1)\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+(c-1)\overrightarrow{PC}+\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow (a+\alpha)\overrightarrow{PA}+(b+\beta)\overrightarrow{PB}+(c-1)\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
因為 P 點給定 所以面積比不變

$$\begin{aligned}\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PFA &= |c+2d+2e+f|:|a+d+2e+2f|:|b+2c+2d+e|\\&= |c-1+2d+2e+f|:|a+\alpha+d+2e+2f|:|b+\beta+2c-2+2d+e|\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{c-1+2d+2e+f}{c+2d+2e+f}=\dfrac{a+\alpha+d+2e+2f}{a+d+2e+2f}=\dfrac{b+\beta+2c-2+2d+e}{b+2c+2d+e}$
$\Rightarrow \dfrac{-1}{c+2d+2e+f}=\dfrac{\alpha}{a+d+2e+2f}=\dfrac{\beta-2}{b+2c+2d+e}$
$\Rightarrow \alpha=-\dfrac{a+d+2e+2f}{c+2d+2e+f},\ \beta=-\dfrac{b-2d-3e-2f}{c+2d+2e+f}$
$\overrightarrow{PC}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}=-\dfrac{a+d+2e+2f}{c+2d+2e+f}\overrightarrow{PA}-\dfrac{b-2d-3e-2f}{c+2d+2e+f}\overrightarrow{PB}$
得 $(c+2d+2e+f)\overrightarrow{PC}=-(a+d+2e+2f)\overrightarrow{PA}-(b-2d-3e-2f)\overrightarrow{PB}$
$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+[c-(c+2d+2e+f)t]\overrightarrow{PC}+(c+2d+2e+f)t\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+[c-(c+2d+2e+f)t]\overrightarrow{PC}-t(a+d+2e+2f)\overrightarrow{PA}-t(b-2d-3e-2f)\overrightarrow{PB}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow [a-t(a+d+2e+2f)]\overrightarrow{PA}+[b-t(b-2d-3e-2f)]\overrightarrow{PB}+[c-(c+2d+2e+f)t]\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$
$\Rightarrow [-(d+2e+2f)t+(1-t)a]\overrightarrow{PA}+[(2d+3e+2f)t+(1-t)b]\overrightarrow{PB}+[-(2d+2e+f)t+(1-t)c]\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$

(2) 同理

$$\begin{aligned}(c+2d+2e+f)\overrightarrow{PD}&=-(2a-c+2e+3f)\overrightarrow{PA}-(2b+2c-2e-2f)\overrightarrow{PB}\\(c+2d+2e+f)\overrightarrow{PD}&=-(2a-2c-2d+2f)\overrightarrow{PA}-(2b+3c+2d-f)\overrightarrow{PB}\\(c+2d+2e+f)\overrightarrow{PF}&=-(a-2c-3d-2e)\overrightarrow{PA}-(b+2c+2d+e)\overrightarrow{PB}\end{aligned}$$

(3) 由(1)(2)可知

$$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}+d\overrightarrow{PD}+e\overrightarrow{PE}+f\overrightarrow{PF}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+[c-(c+2d+2e+f)t_1]\overrightarrow{PC}+(c+2d+2e+f)t_1\overrightarrow{PC}$$
$$+[d-(c+2d+2e+f)t_2]\overrightarrow{PD}+(c+2d+2e+f)t_2\overrightarrow{PD}+[e-(c+2d+2e+f)t_3]\overrightarrow{PE}$$
$$+(c+2d+2e+f)t_3\overrightarrow{PE}+[f-(c+2d+2e+f)t_4]\overrightarrow{PF}$$
$$+(c+2d+2e+f)t_4\overrightarrow{PF}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow [a-(a+d+2e+2f)t_1-(2a-c+2e+3f)t_2-(2a-2c-2d+2f)t_3-(a-2c-3d-2e)t_4]\overrightarrow{PA}$$
$$+[b-(b-2d-3e-2f)t_1-(2b+2c-2e-2f)t_2-(2b+3c+2d-f)t_3-(b+2c+2d+e)t_4]\overrightarrow{PB}$$
$$+[c-(c+2d+2e+f)t_1]\overrightarrow{PC}+[d-(c+2d+2e+f)t_2]\overrightarrow{PD}+[e-(c+2d+2e+f)t_3]\overrightarrow{PE}$$
$$+[f-(c+2d+2e+f)t_4]\overrightarrow{PF}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow [(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)a-(d+2e+2f)t_1+(c-2e-3f)t_2+2(c+d-f)t_3+(2c+3d+2e)t_4]\overrightarrow{PA}$$
$$+[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)b+(2d+3e+2f)t_1-2(c-e-f)t_2-(3c+2d-f)t_3-(2c+2d+e)t_4]\overrightarrow{PB}$$
$$+[(1-t_1)c-(2d+2e+f)t_1]\overrightarrow{PC}+[(1-2t_2)d-(c+2e+f)t_2]\overrightarrow{PD}+[(1-2t_3)e-(c+2d+f)t_3]\overrightarrow{PE}$$
$$+[(1-t_4)f-(c+2d+2e)t_4]\overrightarrow{PF}=\vec{0} \qquad \square$$

推論 2 (定理 3 之延伸定理). 設正六邊形 $ABCDEF$，有一點 P 滿足

$$[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)a-(d+2e+2f)t_1+(c-2e-3f)t_2+2(c+d-f)t_3+(2c+3d+2e)t_4]\overrightarrow{PA}$$
$$+[(1-t_1-2t_2-2t_3-t_4)b+(2d+3e+2f)t_1-2(c-e-f)t_2-(3c+2d-f)t_3-(2c+2d+e)t_4]\overrightarrow{PB}$$
$$+[(1-t_1)c-(2d+2e+f)t_1]\overrightarrow{PC}+[(1-2t_2)d-(c+2e+f)t_2]\overrightarrow{PD}+[(1-2t_3)e-(c+2d+f)t_3]\overrightarrow{PE}$$
$$+[(1-t_4)f-(c+2d+2e)t_4]\overrightarrow{PF}=\vec{0},\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\in\mathbb{R},$$

則

$$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDE:\triangle PEF:\triangle PFA$$
$$=|c+2d+2e+f|:|d+2e+2f+a|:|e+2f+2a+b|:|f+2a+2b+c|:|a+2b+2c+d|:|b+2c+2d+e|$$

在一般的正 $2n$ 邊形中，若首項向量係數 a 為任意給定實數，其餘係數皆為 1 時，我們有以下的一般形態：

定理 8. 設 $A_0A_1\cdots A_{2n-1}$ 為平面上之正 $2n$ 邊形，若 P 點滿足 $a\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_{2n-1}}=\vec{0}$, $a>0$, 則 P 點亦滿足

$$\left\{2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[2n\cos k\theta+(a-1)\cos k\theta-a+1]t_k}{n}\right\}\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots$$
$$+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n-1}}+\overrightarrow{PA_n}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-2})\overrightarrow{PA_{n+2}}$$
$$+\cdots+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n-1}}=\vec{0},\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1}\in\mathbb{R},\ \theta=\frac{\pi}{n}.$$

證明.

(1) 因為 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{2n-1}}=2\cos\theta\overrightarrow{OA_0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_{2n-1}}=2\cos\theta(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_0})$

$\Rightarrow \overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_{2n-1}}=2\cos\theta(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_0})-2\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_{2n-1}}=2\cos\theta(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_0})-2\overrightarrow{OP}$

$$=2\cos\theta\left(\frac{a-1}{2n}\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_0}\right)-\frac{a-1}{n}\overrightarrow{PA_0}=\frac{2n\cos\theta+(a-1)\cos\theta-a+1}{n}\overrightarrow{PA_0}$$

(2) 同理可知

$$\overrightarrow{PA_k}+\overrightarrow{PA_{2n-k}}=\frac{2n\cos k\theta+(a-1)\cos k\theta-a+1}{n}\overrightarrow{PA_0},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

(3)

$$\begin{aligned}
&a\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_{2n-1}}=\vec{0}\\
&\Rightarrow\left\{2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[2n\cos k\theta+(a-1)\cos k\theta-a+1]t_k}{n}\right\}\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}\\
&+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n-1}}+\overrightarrow{PA_n}\\
&+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-2})\overrightarrow{PA_{n+2}}+\cdots+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n-1}}=\vec{0}.
\end{aligned}$$

□

推論 3 (定理 5 之延伸定理(1))**.** 設正 $2n$ 邊形 $A_0A_1\cdots A_{2n-1}$，有一點 P 滿足

$$\begin{aligned}
&\left\{2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{[2n\cos k\theta+(a-1)\cos k\theta-a+1]t_k}{n}\right\}\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots\\
&+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n-1}}+\overrightarrow{PA_n}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-2})\overrightarrow{PA_{n+2}}\\
&+\cdots+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n-1}}=\vec{0},\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n-1}\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

則 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比可表示為 $(2n+a-1)\cos\frac{\theta}{2}-(a-1)\cos\frac{2k+1}{2}\theta,\ \theta=\frac{\pi}{n}.$

定理 9. 設 $A_0A_1\cdots A_{2n}$ 為平面上之正 $2n$+1 邊形，若 P 點滿足 $a\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_1}+\cdots+\overrightarrow{PA_{2n}}=\vec{0}$, $a>0$，則 P 點亦滿足

$$\begin{aligned}
&\left[2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(4n\cos k\theta+2a\cos k\theta-2a+2)t_k}{2n+1}\right]\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots\\
&+(1-t_n)\overrightarrow{PA_n}+(1-t_n)\overrightarrow{PA_n}+(1-t_n)\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+2}}\\
&+\cdots+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n}}=\vec{0},\ \theta=\frac{2\pi}{2n+1}.
\end{aligned}$$

證明. (1) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{2n}}=2\cos\theta\overrightarrow{OA_0}$
$\Rightarrow\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_{2n}}=2\cos\theta(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_0})$
$\Rightarrow\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_{2n}}=2\cos\theta(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_0})-2\overrightarrow{OP}$
因為 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a-1}{2n+a-1},0\right)=\frac{a-1}{2n+a-1}\overrightarrow{OA_0}$, 所以 $\overrightarrow{PA_0}=\overrightarrow{OA_0}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_0}-\frac{a-1}{2n+a-1}\overrightarrow{OA_0}=\frac{2n}{2n+a-1}\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OP}=\frac{a-1}{2n+a-1}\overrightarrow{OA_0}=\frac{a-1}{2n}\overrightarrow{PA_0}$
因為 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a-1}{2n+a},0\right)=\frac{a-1}{2n+a}\overrightarrow{OA_0}$, 所以 $\overrightarrow{PA_0}=\overrightarrow{OA_0}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_0}-\frac{a-1}{2n+a}\overrightarrow{OA_0}=\frac{2n+1}{2n+a}\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OP}=\frac{a-1}{2n+a}\overrightarrow{OA_0}=\frac{a-1}{2n+1}\overrightarrow{PA_0}$, $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_{2n}}=2\cos\theta(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_0})-2\overrightarrow{OP}=2\cos\theta\left(\frac{a-1}{2n+1}\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_0}\right)-\frac{2a-2}{2n+1}\overrightarrow{PA_0}=\frac{4n\cos\theta+2a\cos\theta-2a+2}{2n+1}\overrightarrow{PA_0}.$

(2) 同理可知

$$\overrightarrow{PA_k}+\overrightarrow{PA_{2n+1-k}}=\frac{4n\cos k\theta+2a\cos k\theta-2a+2}{2n+1}\overrightarrow{PA_0},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

(3) $a\overrightarrow{PA_0}+\overrightarrow{PA_1}+cdots+\overrightarrow{PA_{2n}}=\vec{0}$

$$\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(4n\cos k\theta+2a\cos k\theta-2a+2)t_k}{2n+1}\right)\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots$$
$$+(1-t_n)\overrightarrow{PA_n}+(1-t_n)\overrightarrow{PA_n}+(1-t_n)\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+2}}$$
$$+\cdots+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n}}=\vec{0}$$

□

推論 4 (定理 5 之延伸定理(2)). 設正 $2n+1$ 邊形 $A_0A_1\cdots A_{2n}$，有一點 P 滿足

$$\left[2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(4n\cos k\theta+2a\cos k\theta-2a+2)t_k}{2n+1}\right]\overrightarrow{PA_0}+(1-t_1)\overrightarrow{PA_1}+(1-t_2)\overrightarrow{PA_2}+\cdots$$
$$+(1-t_n)\overrightarrow{PA_n}+(1-t_n)\overrightarrow{PA_{n+1}}+(1-t_{n-1})\overrightarrow{PA_{n+2}}$$
$$+\cdots+(1-t_1)\overrightarrow{PA_{2n}}=\vec{0},\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\in\mathbb{R},$$

則 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 的面積比可表示為 $(2n+a)\cos\frac{\theta}{2}-(a-1)\cos\frac{2k+1}{2}\theta,\ \theta=\frac{2\pi}{2n+1}.$

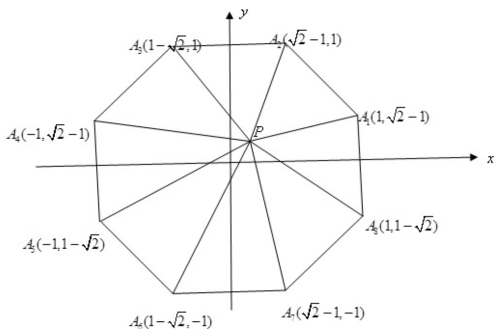
2.3 面積為整數比之討論

2.3.1 正八邊形分割三角形的面積比

由定理 2 與定理 3，我們發現正方形與正六邊形只要給定係數皆為有理數則分割三角形的面積比為整數比。但正八邊形就不一定，那是否存在一組不全相等的實數係數，使得正八邊形分割三角形的面積比為整數比呢？我們發現那是不可能的，以下加以證明它的不存在性.

定理 10. 設正八邊形 $A_1A_2\cdots A_8$，則不存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_8\in\mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_8\overrightarrow{PA_8}=\vec{0}$，但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。

證明. 假設存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_8\in\mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1}+k_2\overrightarrow{PA_2}+\cdots+k_8\overrightarrow{PA_8}=\vec{0}$ 且 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。不失一般性，我們可以將此正八邊形之八個頂點定在 $A_1(1,\sqrt{2}-1)$, $A_2(\sqrt{2}-1,1)$, $A_3(1-\sqrt{2},1)$, $A_4(-1,\sqrt{2}-1)$, $A_5(-1,1-\sqrt{2})$, $A_6(1-\sqrt{2},-1)$, $A_7(\sqrt{2}-1,-1)$, $A_8(1,1-\sqrt{2})$



因為 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 具有相同的底邊，因此 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比等於各高之比，令 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之高為 h_k，所以 $h_8+h_4=h_2+h_6=2$，又 $h_8:h_4$ 與 $h_2:h_6$ 之比值皆為正有理數，得 $h_8=q_1h_4, h_2=q_2h_6, q_1, q_2\in\mathbb{Q}$ 且 $q_1, q_2>0$，故 $q_1h_4+h_4=q_2h_6+h_6=2\Rightarrow h_4=\frac{2}{1+q_1}\in\mathbb{Q}$, $h_6=\frac{2}{1+q_2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow h_8,\ h_4,\ h_2,\ h_6$ 皆為有理數，因此可令 $P(m,n)$, m, n 為有理數，直線 A_1A_2 之方程式為 $x+y=\sqrt{2}$，$h_1=\frac{|m+n-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=\left|\frac{\sqrt{2}(m+n)}{2}-1\right|$ 為無理數(矛盾)，因

此不存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_8 \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_8\overrightarrow{PA_8} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。 □

2.3.2 正 $n(n \geq 5$ 且 $n \neq 6)$ 邊形分割三角形的面積比

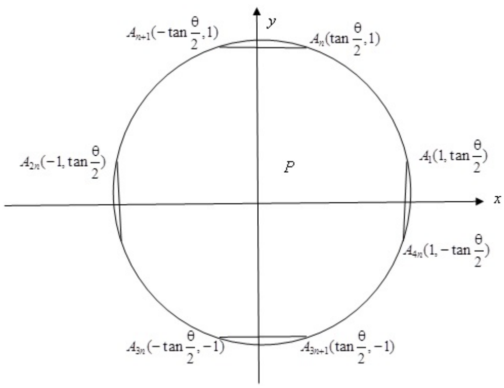
由定理 10，我們發現正八邊形不存在一組不全相等的實數係數，使得正八邊形分割三角形的面積比為整數比。那其他的正 n 邊形呢？我們發現除了正三角形、正方形，正六邊形之外，其他的正 n 邊形都不存在一組不全相等的實數係數，使得正 n 邊形分割三角形的面積比為整數比，以下加以證明它的不存在性. 要證明此結果之前，我們需用到以下的定理。

定理 11. 令 $\alpha = \dfrac{m}{n}\cdot 360°,\ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$，若 $\cos\alpha$ 是有理數，則 $\cos\alpha \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$。*(參考文獻 [4])*

由定理 11 可知，當 $\theta = \dfrac{360°}{n}(n \in \mathbb{N})$ 時，$\cos\theta \in \mathbb{Q}$，只有 $n = 1, 2, 3, 4, 6$ 成立；$\sin\theta \in \mathbb{Q}$，只有 $n = 1, 2, 4, 12$ 成立。

引理 1. 設正 $4n$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{4n},\ n \geq 2$，則不存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{4n} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{4n}\overrightarrow{PA_{4n}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kP_{k+1}$ 之面積比為正整數比。

證明. 假設存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{4n} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{4n}\overrightarrow{PA_{4n}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kP_{k+1}$ 之面積比為正整數比，不失一般性，我們可以將此正 $4n$ 邊形之 $4n$ 個頂點定在 $A_k\left(r\cos\dfrac{2k-1}{2}\theta, r\sin\dfrac{2k-1}{2}\theta\right),\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 4n,\ \theta = \dfrac{\pi}{2n},\ r = \sec\dfrac{\theta}{2}$,
所以 $A_1\left(1, \tan\dfrac{\theta}{2}\right),\ A_n\left(\tan\dfrac{\theta}{2}, 1\right),\ A_{n+1}\left(-\tan\dfrac{\theta}{2}, 1\right),\ \cdots,\ A_{3n+1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}, -1\right),\ A_{4n}\left(1, -\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$,



因為 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 具有相同的底邊，因此 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比等於各高之比，令 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之高為 h_k，所以 $h_{4n} + h_{2n} = h_n + h_{3n} = 2$， 又 $h_{4n} : h_{2n}$ 與 $h_n : h_{3n}$ 之比值皆為正有理數 $\Rightarrow$ $h_{4n},\ h_{2n},\ h_n,\ h_{3n}$ 皆為有理數，因此可令 $P(m, l),\ m,\ l$ 為有理數且 $m^2 + l^2 \neq 0$，

$$\overleftrightarrow{A_1A_2} : y - \tan\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\tan\theta}(x-1)，\overleftrightarrow{A_{4n-1}A_{4n}} : y + \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan\theta}(x-1)，$$

$$h_1 = d(P, \overleftrightarrow{A_1A_2}) = \frac{\left|m - 1 + \tan\theta\left(l - \tan\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = |m\cos\theta + l\sin\theta - 1|$$

$$h_{4n-1} = d(P, \overleftrightarrow{A_{4n-1}A_{4n}}) = \frac{\left|m - 1 - \tan\theta\left(l + \tan\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = |m\cos\theta - l\sin\theta - 1|，$$

令 $q_1 = m\cos\theta + l\sin\theta - 1$，$q_{4n-1} = m\cos\theta - l\sin\theta - 1$，所以 $q_1,\ q_{4n-1} \in \mathbb{Q}$，得 $q_1 - q_{4n-1} = 2l\sin\theta \in \mathbb{Q}$ 且 $q_1 + q_{4n-1} = 2m\cos\theta - 2 \in \mathbb{Q}$，亦即 $\sin\theta = \dfrac{q_1 - q_{4n-1}}{2l} \in \mathbb{Q}$ 且 $\cos\theta = \dfrac{q_1 + q_{4n-1} + 2}{2m} \in \mathbb{Q}$

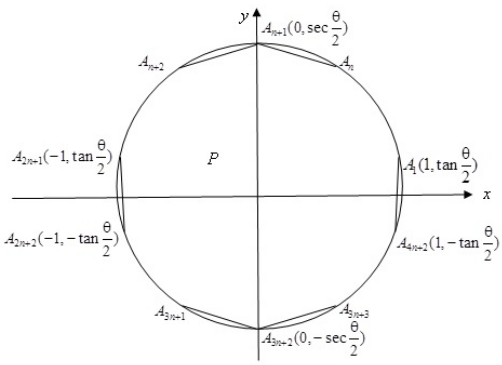
由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾，因此不存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{4n} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{4n}\overrightarrow{PA_{4n}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。 □

引理 2. 設正 $4n+2$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{4n+2},\ n \geq 2$，則不存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{4n+2} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{4n+2}\overrightarrow{PA_{4n+2}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。

證明. 假設存在 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{4n+2} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{4n+2}\overrightarrow{PA_{4n+2}} = \vec{0}$ 且 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比，不失一般性，我們可以將此正 $4n+2$ 邊形之 $4n+2$ 個頂點定在 $A_k\left(r\cos\dfrac{2k-1}{2}\theta, r\sin\dfrac{2k-1}{2}\theta\right),\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 4n+2,\ \theta = \dfrac{\pi}{2n+1},\ r = \sec\dfrac{\theta}{2}$,

所以 $A_1\left(1, \tan\dfrac{\theta}{2}\right), A_{n+1}\left(0, \sec\dfrac{\theta}{2}\right), A_{2n+1}\left(-1, \tan\dfrac{\theta}{2}\right), A_{2n+2}\left(-1, -\tan\dfrac{\theta}{2}\right), A_{3n+2}\left(0, -\sec\dfrac{\theta}{2}\right),$ $A_{4n+2}\left(1, -\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$

因為 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 具有相同的底邊，因此 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比等於各高之比，令 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之高為 h_k，所以 $h_{4n+2} + h_{2n+1} = 2$，又 $h_{4n+2} : h_{2n+1}$ 之比值為正有理數，所以 h_{4n+2}, h_{2n+1} 皆為有理數，因此可令 $P(m,t),\ m \in \mathbb{Q}$ 且 $t \in \mathbb{R}$，



(1) $m \neq 0$ 時，$\overleftrightarrow{A_nA_{n+1}} : y - \sec\dfrac{\theta}{2} = -x\tan\dfrac{\theta}{2}$，$\overleftrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} : y - \sec\dfrac{\theta}{2} = x\tan\dfrac{\theta}{2}$，

$h_n = d(P, \overleftrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \dfrac{\left|m\tan\frac{\theta}{2} + t - \sec\frac{\theta}{2}\right|}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}} = \left|m\sin\dfrac{\theta}{2} + t\cos\dfrac{\theta}{2} - 1\right|$，$h_{n+1} = \left|m\sin\dfrac{\theta}{2} - t\cos\dfrac{\theta}{2} + 1\right|$，

令 $q_n = m\sin\dfrac{\theta}{2} + t\cos\dfrac{\theta}{2} - 1$，$q_{n+1} = m\sin\dfrac{\theta}{2} - t\cos\dfrac{\theta}{2} + 1$

所以 $q_n,\ q_{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow q_n + q_{n+1} = 2m\sin\dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{q_n + q_{n+1}}{2m} \in \mathbb{Q}$

由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾，

(2) $m = 0$ 時，$P(0,t),\ t \neq 0,\ \overleftrightarrow{A_1A_2} : y - \tan\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{1}{\tan\theta}(x-1)$

$h_1 = d(P, \overleftrightarrow{A_1A_2}) = \dfrac{\left|-1 + \tan\theta\left(t - \tan\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = |t\sin\theta - 1|$，$h_n = d(P, \overleftrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \left|t\cos\dfrac{\theta}{2} - 1\right|$，

令 $q_1 = t\sin\theta - 1$，$q_n = t\cos\dfrac{\theta}{2} - 1$，(因為 $t \neq 0$ 所以 $h_n \neq 1 \Rightarrow q_n \neq \pm 1$)

故 $q_1,\ q_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{q_1+1}{q_n+1} = 2\sin\dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$

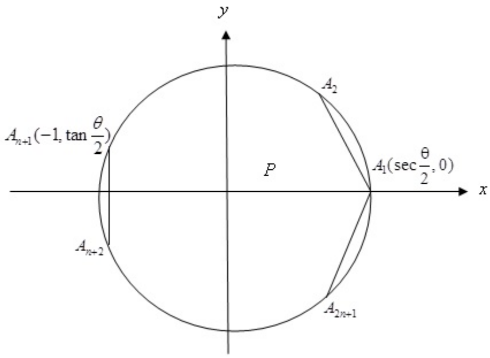
由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾。

由(1)(2)得知，當 $n \geq 2$ 時，不存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{4n+2} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{4n+2}\overrightarrow{PA_{4n+2}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。 □

引理 3. 設正 $2n+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2n+1}$, $n \geq 2$，則不存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{2n+1} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{2n+1}\overrightarrow{PA_{2n+1}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。

證明. 假設存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{2n+1} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{2n+1}\overrightarrow{PA_{2n+1}} = \vec{0}$ 且 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比，我們將此正 $2n+1$ 邊形之 $2n+1$ 個頂點定在 $A_k(r\cos(k-1)\theta, r\sin(k-1)\theta)$, $k = 1, 2, \cdots, 2n+1$, $\theta = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, $r = \sec\dfrac{\theta}{2}$，所以 $A_1\left(\sec\dfrac{\theta}{2}, 0\right)$, $A_{n+1}\left(-1, \tan\dfrac{\theta}{2}\right)$

設 $P(t,l)$, $t, l \in \mathbb{R}$ 且 $t^2+l^2 \neq 0$，因為 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 具有相同的底邊，因此 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比等於各高之比，令 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之高為 h_k



$$\overleftrightarrow{A_1A_2} : y = -\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\left(x - \sec\frac{\theta}{2}\right),\ \overleftrightarrow{A_{2n+1}A_1} : -y = -\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\left(x - \sec\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\overleftrightarrow{A_nA_{n+1}} : y - \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan\theta}(x+1),\ \overleftrightarrow{A_{n+2}A_{n+3}} : -y - \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan\theta}(x+1),$$

$$h_1 = d(P, \overleftrightarrow{A_1A_2}) = \frac{\left|t - \sec\frac{\theta}{2} + l\tan\frac{\theta}{2}\right|}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}} = \left|t\cos\frac{\theta}{2} - 1 + l\sin\frac{\theta}{2}\right|,$$

$$h_{2n+1} = \left|t\cos\frac{\theta}{2} - 1 - l\sin\frac{\theta}{2}\right|,$$

$$h_n = d(P, \overleftrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \frac{\left|t + 1 - \tan\theta\left(l - \tan\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = |t\cos\theta - l\sin\theta + 1|,$$

$$h_{n+2} = d(P, \overleftrightarrow{A_{n+2}A_{n+3}}) = |t\cos\theta + l\sin\theta + 1|,$$

令 $q_1 = t\cos\dfrac{\theta}{2} - 1 + l\sin\dfrac{\theta}{2}$, $q_{2n+1} = t\cos\dfrac{\theta}{2} - 1 - l\sin\dfrac{\theta}{2}$, $q_n = t\cos\theta - l\sin\theta + 1$, $q_{n+2} = t\cos\theta + l\sin\theta + 1$,

(1) $P(t,l)$, $t \in \mathbb{Q}$ $l \in \mathbb{R}$ 且 $t^2 + l^2 \neq 0$ 因為 $h_{n+1} = d(P, \overleftrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}) = |t+1| \in \mathbb{Q}$ 所以 $q_1, q_{2n+1}, q_n, q_{n+2} \in \mathbb{Q}$，

(1.1) 當 $P(t,0)$, $t \in \mathbb{Q}$ 且 $t \neq 0$ 時，$q_n = t\cos\theta + 1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{q_n - 1}{t} \in \mathbb{Q}$，

由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾。

(1.2) 當 $P(t,l)$, $t \in \mathbb{Q}$, $l \in \mathbb{R}$ 且 $l \neq 0$ 時，

因為 q_1, $q_{2n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{q_1 - q_{2n+1}}{2} = l \sin \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$ (*)

因為 q_n, $q_{n+2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{q_{n+2} - q_n}{2} = l \sin \theta \in \mathbb{Q}$ (**)

由(*)與(**)得到 $\dfrac{l \sin \theta}{l \sin \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$，

由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾。

(2) 設 $P(t,l)$, $t \notin \mathbb{Q}$, $l \in \mathbb{R}$ 且 $t^2 + l^2 \neq 0$，因為 $h_{n+1} = d(P, \overleftrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}) = |t+1| \notin \mathbb{Q}$，令 $q_{n+1} = t + 1 = rq'_{n+1}$, $r \notin \mathbb{Q}$ 且 $q'_{n+1} = \dfrac{t+1}{r} \in \mathbb{Q}$，所以 $q_1 = t \cos \dfrac{\theta}{2} - 1 + l \sin \dfrac{\theta}{2} = rq'_1$, $q_{2n+1} = t \cos \dfrac{\theta}{2} - 1 - l \sin \dfrac{\theta}{2} = rq'_{2n+1}$, $q_n = t \cos \theta - l \sin \theta + 1 = rq'_n$, $q_{n+2} = t \cos \theta + l \sin \theta + 1 = rq'_{n+2}$, q'_1, q'_{2n+1}, q'_n, $q'_{n+2} \in \mathbb{Q}$，

故 $q'_1 = \dfrac{q_1}{r} = \dfrac{t}{r} \cos \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{r} + \dfrac{l}{r} \sin \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$, $q'_{2n+1} = \dfrac{q_{2n+1}}{r} = \dfrac{t}{r} \cos \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{r} - \dfrac{l}{r} \sin \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$,

$q'_n = \dfrac{q_n}{r} = \dfrac{t}{r} \cos \theta - \dfrac{l}{r} \sin \theta + \dfrac{1}{r} \in \mathbb{Q}$, $q'_{n+2} = \dfrac{q_{n+2}}{r} = \dfrac{t}{r} \cos \theta + \dfrac{l}{r} \sin \theta + \dfrac{1}{r} \in \mathbb{Q}$,

(2.1) 當 $P(t,0)$, $t \notin \mathbb{Q}$ 時，$q'_{n+1} + q'_1 = \dfrac{t}{r}\left(1 + \cos \dfrac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{Q}$ 且 $q'_{n+1} - q'_n = \dfrac{t}{r}(1 - \cos \theta) \in \mathbb{Q}$，所以 $\dfrac{q'_{n+1} + q'_1}{q'_{n+1} - q'_n} = \dfrac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \theta} = \dfrac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \dfrac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{2\left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{1}{2\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \cos \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$，

由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾。

(2.2) 當 $P(t,l)$, $t \in \mathbb{Q}$, $l \in \mathbb{R}$ 且 $l \neq 0$ 時，

因為 q'_1, $q'_{2n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{q'_1 - q'_{2n+1}}{2} = \dfrac{l}{r} \sin \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$ (*)

又因為 q'_n, $q'_{n+2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{q'_{n+2} - q'_n}{2} = \dfrac{l}{r} \sin \theta \in \mathbb{Q}$ (**)

由(*)與(**)得到 $\dfrac{\frac{l}{r} \sin \theta}{\frac{l}{r} \sin \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{Q}$，

由定理 11 得知，當 $n \geq 2$ 時，此結果矛盾。

由(1)(2)得知，當 $n \geq 2$ 時，不存在 k_1, k_2, $\cdots$, $k_{2n+1} \in \mathbb{R}$ 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_{2n+1}\overrightarrow{PA_{2n+1}} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比。 □

由引理 1、引理 2 與引理 3 可得以下定理 12：

定理 12. 邊數大於或等於 *5* 的正多邊形中，除了正六邊形外，不存在有全相異之係數 k_1, k_2, $\cdots$, k_n 滿足 $k_1\overrightarrow{PA_1} + k_2\overrightarrow{PA_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{PA_n} = \vec{0}$ 但 $\triangle PA_kA_{k+1}$ 之面積比為正整數比.

2.4 未來展望

經過觀察，我們發現所分割的三角形面積比似乎必定包含除了兩夾邊以外的向量係數，並且似乎與角度有關。然而我們仍然無法準確的說明兩者之間的關係.希望未來能拓展範圍，求出正 n 邊形中每項向量係數皆為未知數的分割三角形面積公式，亦或推廣到任意四邊形、六邊形，甚至任意 n 邊形之分割三角形的面積比.

參考文獻

[1] 許志農, 普通高級中學數學3, 新北市, 龍騰文化事業股份有限公司, 2012.

[2] 許志農, 普通高級中學數學4, 新北市, 龍騰文化事業股份有限公司, 2012.

[3] 許志農, 普通高級中學選修數學甲(上), 新北市, 龍騰文化事業股份有限公司, 2013.

[4] J. Jahnel, When is the (co)sine of a rational angle equal to a rational number? http://www.uni-math.gwdg.de/jahnel/linkstopaperse.html