球面費馬點

國立花蓮高級中學 蔡宛廷
指導老師 林明璋

中文摘要

費馬點是一個相當有名的性質, 它的定義如下: 在平面上有一個三角形 ABC, 若從這個三角形同一平面上一點 P 到三角形的三個頂點 A, B, C 的距離之和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 比從同一平面上其它的點到三頂點距離和都小, 則這點就稱為「費馬點」. 費馬點還有一個特殊的性質: 如果三角形的三個內角皆小於 $2\pi/3$, 則此費馬點與三角形的任兩個頂點的夾角恰為 $2\pi/3$; 如果三角形有一個內角大於 $2\pi/3$, 則費馬點會在這個大於 $2\pi/3$ 的角的頂點上.

本研究進一步將此性質推廣至球面上. 由參考論文 The Fermat point of a spherical triangle, 去研究球面上的費馬點的位置與性質. 本研究過程如下:

1、 研究論文 The Fermat point of a spherical triangle

2、 補充論文未說明的部分

3、 利用該論文的方法類推至球面 $2k+1$ 邊形的費馬點, 可將球面多邊形費馬點所滿足的角度也求出, 如果其多邊形邊數為 $2k+1$, 其角度為 $2\pi/(2k+1)$.

截至目前為止, 在球面三角形及球面 $2k+1$ 邊形的費馬點的位置和性質, 皆獲得初步成果. 至於球面 $2k$ 邊形, 因存在對角線的關係, 現階段仍未能以簡明的方式表示出球面 $2k$ 邊形的費馬點.

Abstract

It has been well-known that, if $\triangle ABC$ is a plane triangle, then there exists a unique point P (known as the Fermat point of the triangle $\triangle ABC$) in the same plane such that it minimizes the quantity

$$\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}$$

for any point X in the plane. Moreover, if any of the vertices of $\triangle ABC$ holds an angle greater than or equal to $2\pi/3$; then P coincides with that vertex. Otherwise, P lies inside the triangle and satisfies the equiangular identity

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \frac{2\pi}{3}.$$

The purpose of this article is to see how we can extend the above results to the case of a spherical triangle. It is very pleasant, if not surprising, that very similar statements hold for spherical triangles that are not too large. In particular, we would like to do the following:

1. Study and understand the paper "*The Fermat Point of a Spherical Triangle*" by Gahlieh and Hajja thoroughly.
2. Fill in certain missing points that the paper did not mention.
3. As a generalization, we study the Fermat point of a spherical polygon. We can obtain some interesting result for spherical polygons with $2k+1$ edges. However, we cannot overcome the difficulty for spherical polygons with $2k$ edges.

1 簡介

1.1 研究動機

還記得在開學的第一堂專題課中, 老師上的是幾何. 為了喚起我們對數學的熱忱, 老師提出了好幾個歷史中的名題, 諸如: 拿破崙問題、維維安尼定理、Fagnano 問題……等, 這些古典幾何的趣題只用了簡單的理論便可完成, 可見其美妙之處.
因此, 想要在這次的論文中進一步探討這些幾何定理. 經過討論後, 選定「費馬點」為研究主題, 而原因之一便是費馬點的概念, 實際上很貼近日常生活. 但是若要將「費馬點」

直接套入生活, 卻會產生誤差, 因為我們生活於球面上, 三個點如果距離過大, 不能直接以直線論.
本研究針對球面上的費馬點作探討, 而參考論文 The Fermat point of a spherical triangle 中已經指出這個點的性質, 因此本研究則致力於補充論文未提及部分及推展至球面 $2k+1$ 邊形.

1.2 文獻探討

以下是關於文獻 The Fermat point of a spherical triangle 的探討.
為方便起見, 本文約定所討論的球之球心為 O, 半徑為一單位.

1.2.1 球面幾何相關定義

1. 弧:
在單位球面上取 A、B 兩點, 作通過 A、B 兩點的大圓, A、B 兩點將此大圓分為兩段弧, 本文定義 AB 弧為兩段弧中最小的一段, 表為 $\overset{\frown}{AB}$.

2. 球面上兩點距離:
在一單位球面上, 定義 $d(A,B)$ (球面上兩點距離)為 A、B 弧長, 也就是 $\angle AOB$, 即 $d(A,B)=\cos^{-1}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 是 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$).

3. 球面角:
設 A,B,C 是單位球面上相異三點, 並設過球面上 B 的切平面為 E, A,C 在 E 上的投影點為 A',C'. 定義球面角 ABC 即為 $\angle A'BC'$, 表為 $\measuredangle ABC$.

4. 球面三角形:
設 A,B,C 是單位球面上不共圓三點, 則定義球面三角形 A,B,C 為 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 在球面上包圍的區域. 並定義 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 為此球面三角形的三邊. A,B,C 為三頂點. $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$, $\measuredangle CAB$ 為此球面三角形的三內角.

5. 球面三角形費馬點定義:
若 X 點到 A,B,C 距離和最小也就是函數

$$f(X)=d(X,A)+d(X,B)+d(X,C)=\cos^{-1}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}+\cos^{-1}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{b}+\cos^{-1}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{c}$$

有最小值, 此 X 點就稱為球面三角形 ABC 的費馬點.

1.2.2 文獻及本文架構

本文於第二章針對球面三角形費瑪點作討論, 其中在 The Fermat point of a spherical triangle 一文中, 所討論之球面三角形必須符合兩個條件, 如下:

(一) 三邊 a,b,c 皆小於 $\pi/2$.

(二) 三個角 $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$, $\measuredangle CAB$ 皆小於 $2\pi/3$.

並利用 Lagrange Multiplier 求費馬點, 導出費馬點的性質.

在論文中, 我們發現在證明費馬點唯一性時, 論文的證明並不完備, 我們將於本文 2.1 節補全；接著, 在 2.2 節將證明費馬點不在三角形外部, 在 2.3 節將導出球面三角形費馬點的性質. 另外, 我們也將內角大於等於 $2\pi/3$ 的三角形費馬點找出來, 於本文 2.4 節討論；最後, 我們利用同樣的方法推廣至球面 $2k+1$ 邊形, 討論其費馬點的唯一性以及導出其性質, 將在本文第 3 章作討論.

2 球面三角形

在此章節中, 我們首先證明費馬點的唯一性, 接著證明費馬點不在球面三角形外部, 接下來證明在球面角小於 $2\pi/3$ 的球面三角形中費馬點不在邊與頂點上以及導出此三角形費馬點的性質. 最後證明當球面三角形有一點之球面角大於等於 $2\pi/3$ 時, 費馬點即為頂點.

2.1 球面三角形費馬點的唯一性

本章節中, 利用反證法, 假設存在兩相異費馬點來證明矛盾. 而在 The Fermat point of a spherical triangle 中, 只證相異費馬點與三頂點皆不共線的情況, 故在此將假設情況分成兩個部份, 分別證明.

(1) 兩相異費馬點與球面三角形三頂點皆不共線的情況(論文證明)

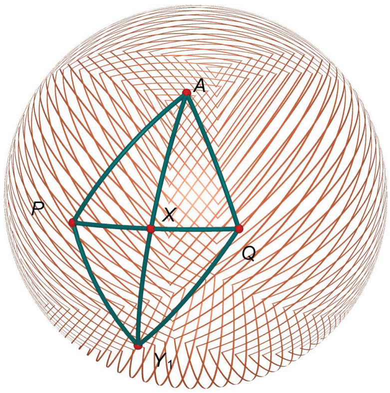

圖 1

假設球面上有一三角形 ABC, P 和 Q 為球面三角形 ABC 中兩相異費馬點, 且令 A,P,Q、B,P,Q、C,P,Q 三點均不共線, 因為 P 和 Q 皆為球面三角形 ABC 的費馬點, 所以

$$\widehat{PA}+\widehat{PB}+\widehat{PC}=\widehat{QA}+\widehat{QB}+\widehat{QC},$$

令其值為 k. 令 X 為 $\widehat{PQ}$ 中點, 延伸 $\widehat{AX}$ 至 Y_1, 使 $\widehat{AY_1}=2\widehat{AX}$, 如圖 1. 在此我們必須將球面三角形的邊長限制在 $\pi/2$ 以內, 如果不將邊長限定於 $\pi/2$ 以內, 則兩倍後所探討的劣弧不符我們的需求, 為了保證其唯一一點, 我們必須限制邊長在 $\pi/2$ 內.

因為 $\triangle AQX \cong \triangle Y_1PX(SAS)$, 所以 $\widehat{AQ}=\widehat{PY_1}$, 又由球面三角形 APY_1 知

$$\widehat{AP}+\widehat{PY_1}=\widehat{AP}+\widehat{AQ}>\widehat{AY_1}=2\widehat{AX},$$

利用同樣的方法可類推至 B,C 兩頂點, 同樣可推得

$$\widehat{BP}+\widehat{BQ}>\widehat{BY_2}=2\widehat{BX},\ \widehat{CP}+\widehat{CQ}>\widehat{CY_3}=2\widehat{CX}$$

所以 $k>\widehat{AX}+\widehat{BX}+\widehat{CX}$, 與費馬點的定義矛盾, 故假設錯誤.

所以費馬點僅只有一個.

(2) 兩相異費馬點與球面三角形其中一頂點共線的情況

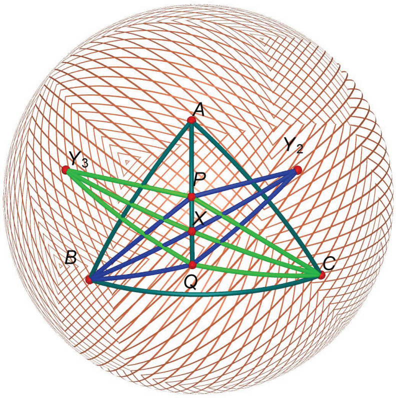

圖 2

假設球面上有一三角形 ABC, P 和 Q 為球面三角形 ABC 中兩相異費馬點. 不失一般性, 假設 A, P, Q 三點共線, 因為 P 和 Q 皆為球面三角形 ABC 的費馬點, 所以

$$\widehat{PA}+\widehat{PB}+\widehat{PC}=\widehat{QA}+\widehat{QB}+\widehat{QC},$$

令其值為 k.

又令 X 為 $\widehat{PQ}$ 中點, 所以 $\widehat{AP}+\widehat{AQ}=2\widehat{AX}$. 延伸 $\widehat{BX}$ 至 Y_2, 如圖 2, 使 $\widehat{BY_2}=2\widehat{BX}$. 因為 $\triangle BQX \cong \triangle Y_2PX(SAS)$, 所以 $\widehat{BQ}=\widehat{PY_2}$, 又由球面三角形 BPY_2 知

$$\widehat{BP}+\widehat{PY_2}=\widehat{BP}+\widehat{BQ}>\widehat{BY_2}=2\widehat{BX},$$

利用同樣的方法可類推至 C 點, 同樣可推得

$$\widehat{CP}+\widehat{CQ}>\widehat{CY_3}=2\widehat{CX},$$

所以 $k>\widehat{AX}+\widehat{BX}+\widehat{CX}$, 與費馬點的定義矛盾, 故假設錯誤.
所以 費馬點僅只有一個.

在接下的論文中, 球面三角形邊長都會限制於 $\pi/2$ 中, 以符合費馬點的唯一性.

2.2 費馬點不存在於球面三角形外部

在平面三角形中, 費馬點並不存在於三角形外, 在此章節中, 我們證明在球面上的三角形的費馬點不存在於球面三角形外部. 整理於定理 2.1.

定理 1. 已知一球面三角形 ABC, 則在三角形外部不存在任何一點 X, 使得

$$\widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XC} \text{ 最小.}$$

證明. 以下利用反證法. 假設球面三角形外部存在一點 X, 使得 $\widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XC}$ 最小.

不失一般性, 設 $\widehat{AB}$ 所處之大圓將球面分割成兩半球面, 而其中 X 點不與其他頂點共處同一半球面. 作 $\widehat{XA}$, $\widehat{XB}$, $\widehat{XC}$, 令 $\widehat{XC}$ 交 $\widehat{AB}$ 於 D, 在此可分成兩部分討論

(1) 當 $\widehat{XC}$ 交於 $\widehat{AB}$ 邊內時
   如圖 3, 令 $\widehat{XC}$ 交於 $\widehat{AB}$ 劣弧內於 D, 則

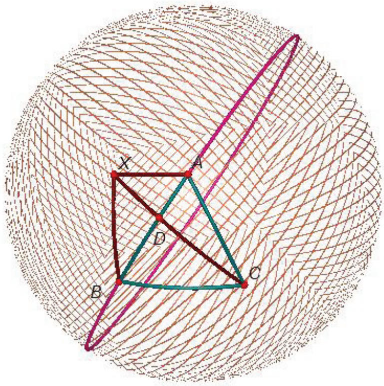

圖 3

$$\begin{aligned}\widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XC} &= \widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XD}+\widehat{DC}\\ &\geq \widehat{AB}+\widehat{XD}+\widehat{CD}\\ &> \widehat{DA}+\widehat{DB}+\widehat{DC},\end{aligned}$$

即 $\widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XC}>\widehat{DA}+\widehat{DB}+\widehat{DC}$, 假設錯誤.

(2) 當 $\widehat{XC}$ 交於 $\widehat{AB}$ 邊外時
如圖 4, 令 $\widehat{XC}$ 交於 $\widehat{AB}$ 劣弧內於 D, 則

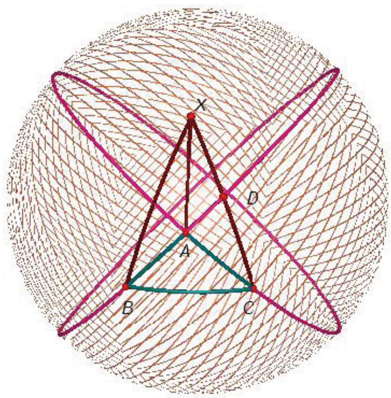

圖 4

$$\begin{aligned}\widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XC} &= \widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XD}+\widehat{DC}\geq \widehat{XA}+\widehat{BD}+\widehat{DC}\\ &= \widehat{XA}+\widehat{AB}+\widehat{AD}+\widehat{DC}>\widehat{XA}+\widehat{AB}+\widehat{AC}\\ &> \widehat{AB}+\widehat{AC},\end{aligned}$$

即 $\widehat{AB}+\widehat{AC}<\widehat{XA}+\widehat{XB}+\widehat{XC}$, 假設錯誤.

其餘種情況與上述之情況雷同, 綜合上述之狀況, 可得知球面三角形之費馬點必不存在於球面三角形外.

□

2.3 尋找球面三角形費馬點

在此章節中, 我們將去探討在球面角小於 $2\pi/3$ 時的球面三角形費馬點位置及性質.

2.3.1 球面角小於 $2\pi/3$ 時, 利用 Lagrange Multiplier 求最小值(論文證明)

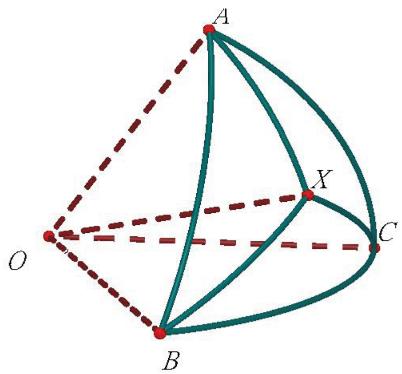

圖 5

如圖 5, 令球面上有一三角形 ABC, 令 $\angle BAC$、$\angle ABC$、$\angle ACB$ 皆不大於 $2\pi/3$ 且 $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ 皆不大於 $\pi/2$, 令球面上有一點 X, 設 $\alpha = d(X, A)$, $\beta = d(X, B)$, $\gamma = d(X, C)$, 則

$$f(X) = d(X, A) + d(X, B) + d(X, C) = \cos^{-1} \vec{x} \cdot \vec{a} + \cos^{-1} \vec{x} \cdot \vec{b} + \cos^{-1} \vec{x} \cdot \vec{c}.$$

令 $\vec{x} \neq \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 即 X 不在 A、B、C 三頂點上利用 Lagrange multiplier 將其微分, 可得

$$\frac{\vec{a}}{\sin\alpha} + \frac{\vec{b}}{\sin\beta} + \frac{\vec{c}}{\sin\gamma} = \lambda\vec{x} \tag{1}$$

再將兩邊分別和 $\vec{x}$ 與 $\vec{a}$ 作內積, 可得

$$\lambda = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \tag{2}$$

$$\lambda\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos c}{\sin\beta} + \frac{\cos b}{\sin\gamma} \tag{3}$$

將(2)式代入(3)式, 可得

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos c}{\sin\beta} + \frac{\cos b}{\sin\gamma},$$

化簡可得

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos c - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos b - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma} = 0,$$

同乘 $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ 後可得

$$1 + \frac{\cos c - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\cos b - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} = 0 \tag{4}$$

根據球面餘弦定理, (4)式可寫成

$$\cos\measuredangle AXB+\cos\measuredangle CXA=-1 \tag{5}$$

利用同樣方法可推得

$$\cos\measuredangle AXB+\cos\measuredangle BXC=-1 \tag{6}$$

$$\cos\measuredangle BXC+\cos\measuredangle CXA=-1 \tag{7}$$

兩式, 由(5)(6)(7)三式可得

$$\cos\measuredangle AXB=\cos\measuredangle BXC=\cos\measuredangle CXA=-\frac{1}{2}$$

在此可以確認除了頂點之外, 在球面上存在一點 P, 使得 $f(P)$ 有最小值, 且此點滿足 $\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle APC=2\pi/3$.

上述之 點可使得 $f(P)$ 有最小值, 但是不確定 P 點是否在球面三角形內部, 經由下述之引理 2.1 證明之.

引理 1. 已知一球面三角形 ABC, 且球面角皆小於 $2\pi/3$, 則在球面三角形內部存在一點 P, 滿足 $\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle APC=2\pi/3$.

證明. 以下利用反證法: 假設 P 點在外部, 且 P 點滿足 $\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle APC=2\pi/3$. 此 P 點位置可分兩部分討論.

(1) 當 P 與三角形其中一邊共弧, 如圖 6
不失一般性, 假設 P 點與 $\overset{\frown}{AB}$ 共弧時, $\measuredangle APB=0$, 矛盾.

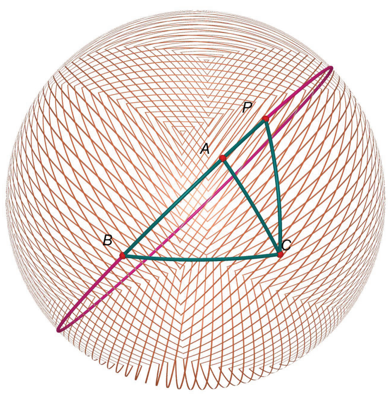

圖 6

(2) 不失一般性, 設 $\overset{\frown}{BC}$ 所處之大圓將球面分割成兩半球面, 而其中 P 點不與其他頂點共處同一半球面, 如圖 7
因為 P 點滿足 $\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle APC=2\pi/3$, 又球面三角形 BPC 三邊小於 π 時, 球面角小於 π, 則 $\pi>\measuredangle BPA+\measuredangle CPA=4\pi/3$, 矛盾.
又假設 P 點在邊上時, 不失一般性, 假設 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, 則 $\measuredangle APB=\pi$, 矛盾.
又因為利用 Lagrange Multiplier 時去除頂點的可能, 所以 P 點必在內部, 證畢.

□

利用引理 2.1 可得知可在球面三角形 ABC 內部找到一點 P, 滿足

$$\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle APC=2\pi/3.$$

接下來將討論三頂點之狀況.

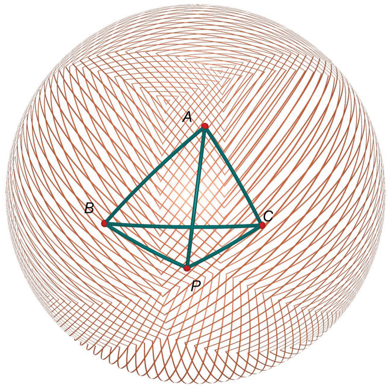

圖 7

2.3.2 球面角小於 $2\pi/3$ 時, 頂點不為其球面三角形的費馬點

在 2.3.1 節中, 利用 Lagrange Multiplier 方法在球面三角形內部找出 P 點, 使得 $f(P)$ 有最小值, 且 $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle APC = 2\pi/3$. 此節將證明球面三角形 ABC 任一頂點至另兩頂點之和大於 $\widehat{PA}+\widehat{PB}+\widehat{PC}$.

定理 2. 已知一球面三角形 ABC, 且三個角皆小於 $2\pi/3$, 利用 *Lagrange Multiplier* 方法在球面三角形內部找出 P 點, 使得 $f(P)$ 有最小值, 且 $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle APC = 2\pi/3$, 則球面三角形 ABC 任一頂點至另兩頂點之和大於 $\widehat{PA}+\widehat{PB}+\widehat{PC}$.

證明. 以下利用反證法, 不失一般性, 所討論的頂點為 A 點.
以 A 點為旋轉軸, 將球面三角形 APB 轉至球面三角形 $AP'B'$, 使得 $\widehat{P'B'}$ 與 $\widehat{PC}$ 共弧,

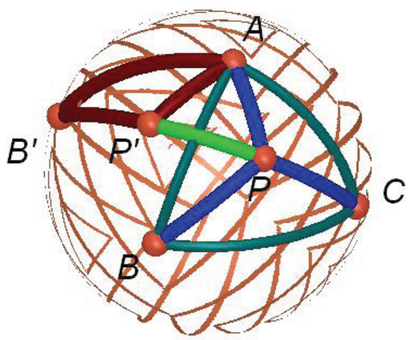

圖 8

如圖 8. 在球面三角形 $AB'C$中, $\widehat{AB'}+\widehat{AC}>\widehat{B'C}$, 又

$$\widehat{B'C}=\widehat{B'P'}+\widehat{PP'}+\widehat{PC}=\widehat{BP}+\widehat{PP'}+\widehat{PC}$$

在球面三角形 APP' 中, $\measuredangle AP'P = \measuredangle APP' = \dfrac{\pi}{3}$. 又球面三角形內角和大於 π, 即 $\measuredangle PAP' > \measuredangle PP'A$, 又因為球面三角形中大角對大邊, 所以

$$
\begin{aligned}
&\widehat{PP'} > \widehat{PA} \\
&\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AC} &=& \quad \widehat{AB'} + \widehat{AC} \\
&&>& \quad \widehat{B'C} = \widehat{B'P'} + \widehat{PP'} + \widehat{PC} \\
&&>& \quad \widehat{PA} + \widehat{PB} + \widehat{PC},
\end{aligned}
$$

其餘兩點也依此類推, 證畢.

由定理 2.1 及 2.2, 我們可以得到當球面三角形 ABC 球面角皆小於 $2\pi/3$ 時, 費馬點 P 在球面三角形 ABC 內部, 且

$$\measuredangle APB = \measuredangle APC = \measuredangle BPC = 2\pi/3.$$

□

2.3.3 球面角 $\geq 2\pi/3$ 的球面三角形費馬點位置

在本節, 我們要找出「三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$, 但有球面角 $\geq 2\pi/3$ 的球面三角形費馬點位置」, 將上述之球面三角形費馬點的限制(二)去除.

由定理 2.1, 我們得知費馬點不會在外部. 又在幾何明珠一書中, 提及在平面上如果三角形中有一頂點之內角 $\geq 2\pi/3$ 時, 費馬點即為此頂點. 我們猜想, 在球面三角形有一內角 $\geq 2\pi/3$ 時的費馬點位置也會是在此頂點上. 在此我們必須先證明利用 Lagrange Multiplier 所得到的點不存在球面三角形內部, 即在三角形內部不存在任何一點 T, 使得 $\measuredangle ATB = \measuredangle ATC = \measuredangle BTC = 2\pi/3$.
因為球面三角形內角和大於 π, 所以須確認有多少個角會大於 $\pi/2$, 整理成引理 2.2.

引理 2. 三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$ 的球面三角形, 至多只有一個球面角大於 $\pi/2$.

證明. 以下用反證法. 假設存在球面三角形 ABC 至少有二個角大於 $\pi/2$, 且三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$. 如圖 9, 不失一般性, 設 $\measuredangle ABC$ 和 $\measuredangle BCA$ 為鈍角. 延弧 b、弧 c 交於 D 點.

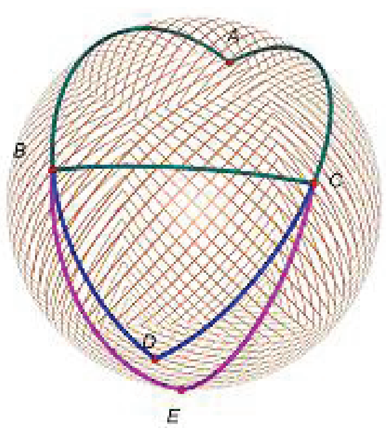

圖 9

因為弧 b、弧 c 皆為大圓, 而 A, D 為其交點, 故 A, D 對球心 O 互為對稱點.

又在球面三角形外做點 E 使得 $\measuredangle EBC = \measuredangle ECB = \pi/2$. 因為 $\measuredangle DBC, \measuredangle DCB$ 皆為鋭角, 故弧 b、弧 c 的交點 D 位於球面三角形 BCE 內. 所以 $\widehat{BD}$ 小於 $\widehat{BE}$; $\widehat{CD}$ 小於 $\widehat{CE}$, 即 $\widehat{BD}$, $\widehat{CD}$ 皆小於 $\pi/2$.

因此, c 與 $\overset{\frown}{BD}$, b 與 $\overset{\frown}{CD}$ 之和皆為 π, 所以

$$c > \pi - \pi/2 = \pi/2,\ \ b > \pi - \pi/2 = \pi/2,$$

與 a, b, c 皆小於 $\pi/2$ 矛盾, 證畢. $\square$

由引理 2.2 可知, 將討論的球面三角形 ABC 設為: 三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$, 且恰有一球面角 $\geq 2\pi/3$.

引理 3. 已知球面三角形 ABC, 且此三角形三邊皆小於 $\pi/2$, 且其中有一球面角 $\geq 2\pi/3$, 則在三角形內部不存在任何一點 P, 使得

$$\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 2\pi/3.$$

證明. 以下用反證法: 如圖 10. 不失一般性, 設

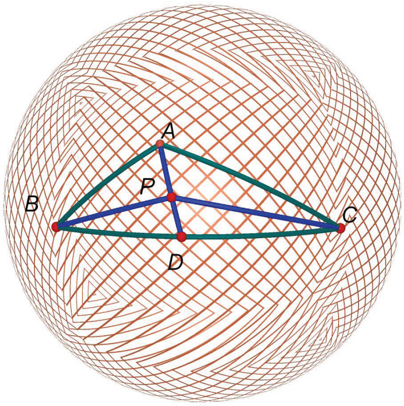

圖 10

$$\measuredangle BAC \geq 2\pi/3,\ \ \measuredangle BAP = \alpha,\ \ \measuredangle CAP = \beta,$$
$$\measuredangle BPD = \varphi_1,\ \ \measuredangle CPD = \varphi_2,\ \ \measuredangle PDC = \theta,$$

假設 點在球面三角形內部, 且滿足

$$\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 2\pi/3\ \ (\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3).$$

在球面三角形 ADC 中,

$$\frac{\sin\overset{\frown}{CD}}{\sin\beta} = \frac{\sin b}{\sin\theta}\ \Rightarrow \sin\overset{\frown}{CD} = \frac{\sin\beta\sin b}{\sin\theta} \tag{8}$$

在球面三角形 PDC 中,

$$\frac{\sin\overset{\frown}{CD}}{\sin\varphi_2} = \frac{\sin\overset{\frown}{CP}}{\sin\theta}\ \Rightarrow \sin\overset{\frown}{CD} = \frac{\sin\varphi_2\sin\overset{\frown}{CP}}{\sin\theta} \tag{9}$$

由(8)、(9)得

$$\sin\beta = \frac{\sin\overset{\frown}{CP}}{\sin b}\sin\varphi_2 < \sin\varphi_2.$$

(在球面三角形 APC 中, $\because$ 大角對大邊, $\therefore \pi/2 > b > \overset{\frown}{CP}$, $\therefore \dfrac{\sin\overset{\frown}{CP}}{\sin b} < 1$)

因為 $\sin\beta < \sin\varphi_2$, 又由引理 2.1 可知在球面三角形 APC 中, 只有 $\measuredangle CPA$ 為鈍角, 所以 $\pi/2 > \varphi_2 = \pi/3 > \beta$. 同理, $\varphi_1 > \alpha$, 所以 $\measuredangle BPC > \measuredangle BAC$, 矛盾, 故 P 點不可能在球面三角形內部. $\square$

由引理 2.2 和引理 2.3, 我們可以得到當球面三角形 ABC 中有一球面角 $\geq 2\pi/3$ 時, 利用 Lagrange Multiplier 所得之點 P 不在球面三角形內部, 但費馬點不在球面三角形外部, 故可得費馬點必在頂點上(不可微分點).

不失一般性, 設球面三角形 ABC 中, 三邊皆小於 $\pi/2$, 且 $\measuredangle CAB \geq 2\pi/3$, 則此點即為球面三角形 ABC 之費馬點. 整理如下.

定理 3. 三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$, 且 $\measuredangle CAB \geq 2\pi/3$ 的球面三角形 ABC, 其費馬點恰位於 A.

證明. 如圖 11, 設 Q 為球面三角形 ABC 內一點, 將球面三角形 BQA 繞 A 點旋轉, 使 $\wideparen{AB}$ 轉到 $\wideparen{CA}$ 所在大圓上, 得球面三角形 $B'Q'A$ (使 $\measuredangle B'AC = \pi$). 因為旋轉角 $\leq \pi/3$,

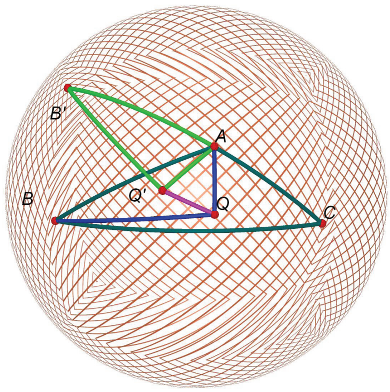

圖 11

又 $\wideparen{AQ}$ 等於 $\wideparen{AQ'}$. 因為球面三角形內角和大於 π, 所以 $\measuredangle AQQ' = \measuredangle AQ'Q > \pi/3$. 由球面三角形正弦定理可知

$$\frac{\sin \wideparen{QQ'}}{\sin \measuredangle QAQ'} = \frac{\sin \wideparen{AQ'}}{\sin \measuredangle AQQ'} \Rightarrow \wideparen{QA} > \wideparen{QQ'}$$

故

$$\begin{aligned} \wideparen{QA} + \wideparen{QB} + \wideparen{QC} &\geq \wideparen{QQ'} + \wideparen{Q'B}\wideparen{QC} \\ &\geq \wideparen{CB'} = \wideparen{CA} + \wideparen{AB'} \\ &= \wideparen{AB} + \wideparen{AC} \end{aligned}$$

又因為 $\measuredangle BAC$ 為最大角, 所以 $\wideparen{BC}$ 為最大邊, 即 $\wideparen{AB} + \wideparen{AC} < \wideparen{BA} + \wideparen{BC}$, $\wideparen{AB} + \wideparen{AC} < \wideparen{CA} + \wideparen{CB}$. 所以三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$, 且 $\measuredangle CAB \geq 2\pi/3$ 的球面三角形 ABC, 其球面費馬點恰位於 A, 得證. $\square$

在此章完成了:

(1)、 確定費馬點不在球面三角形 ABC 外部.

(2)、 當球面三角形三頂點內角皆小於 $2\pi/3$ 時, 則費馬點會在球面三角形內部, 且 $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle APC = 2\pi/3$.

(3)、 若球面三角形 ABC 有一頂點之內角 $\geq 2\pi/3$, 則此頂點即為費馬點.

3 球面 $2k+1$ 邊形

接下來, 我們將推廣至球面 $2k+1$ 邊形, 我們沿用三角形的方法. 首先, 證明費馬點唯一性, 接著證明費馬點不在球面 $2k+1$ 邊形外部, 最後, 導出球面 $2k+1$ 邊形費馬點的性質.

如同球面三角形, 我們也設定所有 $2k+1$ 邊形, 任意兩頂點之弧長皆小於 $\pi/2$, 我們以此 $2k+1$ 邊形之情況做討論.

3.1 球面 $2k+1$ 邊形費馬點的唯一性

在球面三角形費馬點唯一性之證明, 可類推至 $2k+1$ 邊形討論.

(1) 兩相異費馬點與球面 $2k+1$ 邊形任意頂點皆不共線的情況

假設球面上有一球面 $2k+1$ 邊形 $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$, P,Q 為球面 $2k+1$ 邊形的兩相

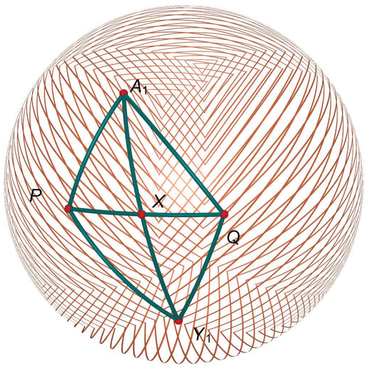

圖 12

異費馬點, 且任意一頂點與兩費馬點均不共線. 因為 P, Q 皆為球面 $2k+1$ 邊形的費馬點, 所以

$$\overset{\frown}{PA_1}+\overset{\frown}{PA_2}+\cdots+\overset{\frown}{PA}_{2k+1}=\overset{\frown}{QA_1}+\overset{\frown}{QA_2}+\cdots+\overset{\frown}{QA}_{2k+1},$$

令其值為 l.

令 X 為 $\overset{\frown}{PQ}$ 中點, 延伸 $\overset{\frown}{AX_1}$ 至 Y_1 使 $\overset{\frown}{AY_1}=2\overset{\frown}{A_1X}$, 如圖 12.

因為球面三角形 $A_1QX\cong$ 球面三角形 $Y_1PX(SAS)$, 所以 $\overset{\frown}{A_1Q}=\overset{\frown}{PY_1}$, 又由 $\triangle A_1PY_1$ 知

$$\overset{\frown}{A_1P}+\overset{\frown}{PY_1}=\overset{\frown}{A_1P}+\overset{\frown}{A_1Q}>\overset{\frown}{A_1Y_1}=2\overset{\frown}{A_1X},$$

同理可得

$$\overset{\frown}{A_2P}+\overset{\frown}{A_2Q}>2\overset{\frown}{A_2X},\ \ \overset{\frown}{A_3P}+\overset{\frown}{A_3Q}>2\overset{\frown}{A_3X},\ \ \cdots,\ \ \overset{\frown}{A_{2k+1}P}+\overset{\frown}{A_{2k+1}Q}>2\overset{\frown}{A_{2k+1}X},$$

將其全部相加, 整理可得

$$l>\overset{\frown}{A_1X}+\overset{\frown}{A_2X}+\cdots+\overset{\frown}{A_{2k+1}X},$$

與費馬點的定義矛盾, 故假設錯誤, 所以費馬點僅只有一個.

(2) 兩相異費馬點與球面 $2k+1$ 邊形其中一頂點共線的情況

假設球面上有一球面 $2k+1$ 邊形 $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$, P, Q 為在球面 $2k+1$ 邊形兩相

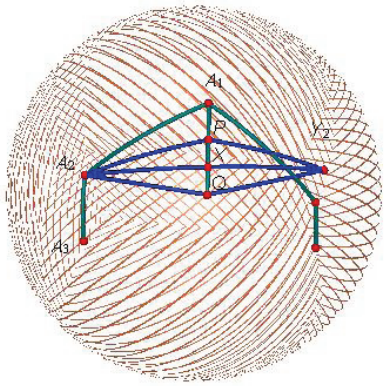

圖 13

異費馬點. 不失一般性, 假設 A, P, Q 三點共線, 因為 P 和 Q 皆為球面 $2k+1$ 邊形的費馬點, 所以

$$\overset{\frown}{PA_1}+\overset{\frown}{PA_2}+\cdots+\overset{\frown}{PA}_{2k+1}=\overset{\frown}{QA_1}+\overset{\frown}{QA_2}+\cdots+\overset{\frown}{QA}_{2k+1},$$

令其值為 l. 令 X 為 $\overset{\frown}{PQ}$ 中點, 所以 $\overset{\frown}{A_1P}+\overset{\frown}{A_1Q}=2\overset{\frown}{A_1X}$.

延伸 $\overset{\frown}{A_2X}$ 至 Y_1, 如圖 13, 使 $\overset{\frown}{A_2Y_2}=2\overset{\frown}{A_2X}$.
因為 $\triangle A_2QX\cong\triangle Y_2PX$ (SAS), 所以 $\overset{\frown}{A_2Q}=\overset{\frown}{PY_2}$, 又由球面三角形 A_2PY_2 知

$$\overset{\frown}{A_2P}+\overset{\frown}{PY_2}=\overset{\frown}{A_2P}+\overset{\frown}{A_2Q}>\overset{\frown}{A_2Y_2}=2\overset{\frown}{A_2X},$$

利用同樣的方法可類推至其他各頂點(除了 A_1), 同樣可推得

$$\overset{\frown}{A_3P}+\overset{\frown}{A_3Q}>2\overset{\frown}{A_3X},\cdots,\overset{\frown}{A_{2k+1}P}+\overset{\frown}{A_{2k+1}Q}>2\overset{\frown}{A_{2k+1}X},$$

所以 $l>\overset{\frown}{A_1X}+\overset{\frown}{A_2X}+\cdots+\overset{\frown}{A_{2k+1}X}$, 與費馬點的定義矛盾, 故假設錯誤, 所以費馬點僅只有一個.

3.2 費馬點不存在於球面 $2k+1$ 邊形外

在此章節中, 我們證明球面 $2k+1$ 邊形的費馬點不存在於球面 $2k+1$ 邊形外, 整理於定理3.1.

在此證明前, 需要一個引理, 整理於引理 3.1.

引理 4. 已知一球面三角形 ABC, 其內部存在任意一點 X, 則

$$\overset{\frown}{XB}+\overset{\frown}{XC}<\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}.$$

證明. 將 $\overset{\frown}{XB}$ 延伸交 $\overset{\frown}{AC}$ 於 D, 如圖 14.
在球面三角形 ABD 中, $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}>\overset{\frown}{BD}$, 又在球面三角形 XDC 中, $\overset{\frown}{XD}+\overset{\frown}{DC}>\overset{\frown}{XC}$, 所以

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC} &= \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DC}\\ &> \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BX}+\overset{\frown}{XD}+\overset{\frown}{DC}\\ &> \overset{\frown}{BX}+\overset{\frown}{XC},\end{aligned}$$

即 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{XB}+\overset{\frown}{XC}$, 得證. □

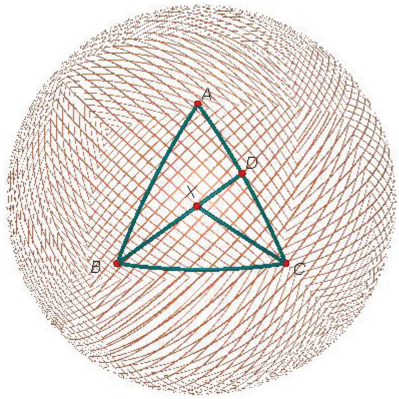

圖 14

定理 4. 已知一球面 $2k+1$ 邊形, 則在 $2k+1$ 邊形外部不存在任何一點 X, 使得 $\widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}+\cdots+\widehat{XA}_{2k+1}$ 最小.

證明. 以下利用反證法. 假設球面 $2k+1$ 邊形外部存在一點 X, 使得

$$\widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}+\cdots+\widehat{XA}_{2k+1} \text{ 最小.}$$

不失一般性, 設 $\widehat{A_1A_2}$ 所處之大圓將球面分割成兩半球面, 而其中 X 點不與其他頂點共處同一半球面. 作 $\widehat{XA_1}$, $\widehat{XA_1}$, $\cdots$, $\widehat{XA}_{2k+1}$, 令 $\widehat{XA_3}$ 交 $\widehat{A_1A_2}$ 於 B_3, $\widehat{XA_4}$ 交 $\widehat{A_1A_2}$ 於 B_4, $\cdots$, $\widehat{XA}_{2k+1}$ 交 $\widehat{A_1A_2}$ 於 B_{2k+1} 在外部可分成兩種情況討論

(1)、 假設 $\widehat{XA}_{k+2}$ 交於 $\widehat{A_1A_2}$ 邊長內時

如圖 15, 令 $\widehat{XA}_{k+2}$ 交於 $\widehat{A_1A_2}$ 劣弧內於 B_{k+2}, 則

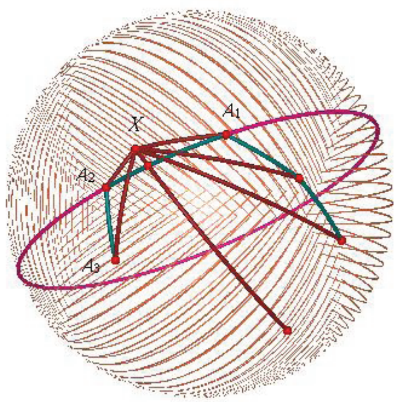

圖 15

$$
\begin{aligned}
& \widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}+\cdots+\widehat{XA}_{2k+1} \\
= & \left(\widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}\right)+\left(\widehat{XA_3}+\widehat{XA}_{2k+1}\right)+\left(\widehat{XA_4}+\widehat{XA}_{2k}\right) \\
& +\left(\widehat{XA_5}+\widehat{XA}_{2k-1}\right)+\cdots+\left(\widehat{XA}_{k+1}+\widehat{XA}_{k+3}\right)+\widehat{XA}_{k+2} \\
> & (\widehat{B_{k+2}A_1}+\widehat{B_{k+2}A_2})+\left(\widehat{B_{k+2}A_3}+\widehat{B_{k+2}A}_{2k+1}\right) \\
& +\left(\widehat{B_{k+2}A_4}+\widehat{B_{k+2}A}_{2k}\right)+\cdots+(\widehat{B_{k+2}A}_{k+1}+\widehat{B_{k+2}A}_{k+3}) \\
& +\widehat{B_{k+2}A}_{k+2},
\end{aligned}
$$

即

$$
\widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}+\cdots+\widehat{XA}_{2k+1}>\widehat{B_{k+2}A_1}+\widehat{B_{k+2}A_2}+\cdots+\widehat{B_{k+2}A}_{2k+1},
$$

故假設錯誤.

(2)、 當 $\widehat{XA}_{k+2}$ 交於 $\widehat{A_1A_2}$ 邊長外時
如圖 16, 則

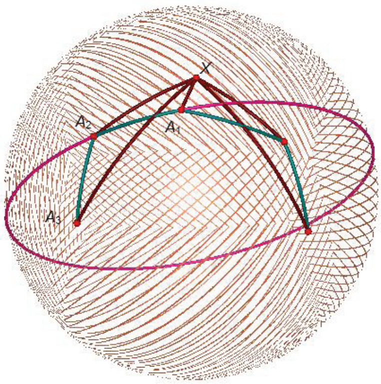

圖 16

$$
\begin{aligned}
& \widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}+\cdots+\widehat{XA}_{2k+1} \\
= & \widehat{XA_1}+\left(\widehat{XA_2}+\widehat{XA}_{2k+1}\right)+\left(\widehat{XA_3}+\widehat{XA}_{2k}\right) \\
& +\cdots+\left(\widehat{XA}_{k+1}+\widehat{XA}_{k+2}\right) \\
> & \widehat{XA_1}+\left(\widehat{A_1A_2}+\widehat{A_1A}_{2k+1}\right)+\left(\widehat{A_1A_3}+\widehat{A_1A}_{2k}\right) \\
& +\cdots+\left(\widehat{A_1A}_{k+1}+\widehat{A_1A}_{k+2}\right) \\
> & \widehat{A_1A_2}+\widehat{A_1A_3}+\cdots+\widehat{A_1A}_{2k+1},
\end{aligned}
$$

即

$$
\widehat{XA_1}+\widehat{XA_2}+\cdots+\widehat{XA}_{2k+1}>\widehat{A_1A_2}+\widehat{A_1A_3}+\cdots+\widehat{A_1A}_{2k+1},
$$

假設錯誤.

其餘種情況與上述之情況雷同, 綜合上述之狀況, 可得知球面 $2k+1$ 多邊形之費馬點必不存在於球面 $2k+1$ 邊形外. □

3.3 尋找球面 $2k+1$ 邊形費馬點

在此章節中, 我們將去探討球面 $2k+1$ 邊形的費馬點位置及性質.

3.3.1 利用 Lagrange Multiplier 求最小值

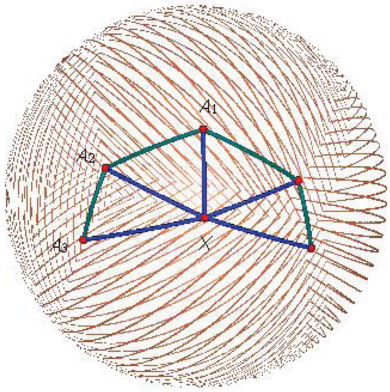

圖 17

如圖 17, 球面上有一 $2k+1$ 邊形, 令球面上一點 X, 設

$$\alpha_1 = d(X, A_1),\ \alpha_2 = d(X, A_2),\ \ldots,\ \alpha_{2k+1} = d(X, A_{2k+1}),$$

兩相鄰夾角為 $\measuredangle A_i X A_{i+1} = \theta, i \in \mathbb{N}, 0 < i < 2k+1$, 且 $\measuredangle A_{2k+1} X A_1 = \theta_{2k+1}$,

$$f(X) = d(X, A_1) + \cdots + d(X, A_{2k+1}) = \cos^{-1}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a_1} + \cdots + \cos^{-1}\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a_{2k+1}}.$$

令 $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_{2k+1}}$, 即 X 不在任何 $2k+1$ 邊形的頂點上. 利用 Lagrange Multiplier 將其微分, 可得

$$\frac{\overrightarrow{a_1}}{\sin\alpha_1} + \frac{\overrightarrow{a_2}}{\sin\alpha_2} + \cdots + \frac{\overrightarrow{a_{2k+1}}}{\sin\alpha_{2k+1}} = \lambda\overrightarrow{x} \tag{10}$$

再將兩邊同內積 $\overrightarrow{x}$ 和 $\overrightarrow{a_1}$, 可得

$$\lambda = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} + \cdots + \frac{\cos\alpha_{2k+1}}{\sin\alpha_{2k+1}} \tag{11}$$

$$\lambda\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\widehat{A_1A_2}}{\sin\alpha_2} + \frac{\cos\widehat{A_1A_3}}{\sin\alpha_3} + \cdots + \frac{\cos\widehat{A_1A_{2k+1}}}{\sin\alpha_{2k+1}} \tag{12}$$

將(11)式代入(12)式,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} + \cdots + \frac{\cos\alpha_{2k+1}}{\sin\alpha_{2k+1}}\right)\cos\alpha_1\\ =\ & \frac{1}{\sin\alpha_1} + \frac{\cos\widehat{A_1A_2}}{\sin\alpha_2} + \frac{\cos\widehat{A_1A_3}}{\sin\alpha_3} + \cdots + \frac{\cos\widehat{A_1A_{2k+1}}}{\sin\alpha_{2k+1}},\end{aligned}$$

化簡後可得

$$\frac{1-\cos^2\alpha_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\widehat{A_1A_2}-\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}+\frac{\widehat{A_1A_4}-\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{\sin\alpha_3}$$
$$+\cdots+\frac{\widehat{A_1A}_{2k+1}-\cos\alpha_1\cos\alpha_{2k+1}}{\sin\alpha_{2k+1}}=0,$$

同乘 $\dfrac{1}{\sin\alpha_1}$ 後可得

$$1+\frac{\cos\widehat{A_1A_2}-\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}+\frac{\cos\widehat{A_1A_4}-\cos\alpha_1\cos\alpha_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}$$
$$+\cdots+\frac{\cos\widehat{A_1A}_{2k+1}-\cos\alpha_1\cos\alpha_{2k+1}}{\sin\alpha_1\sin\alpha_{2k+1}}=0,$$

根據球面餘弦定理, 可得到

$$\cos\theta_1+\cos(\theta_1+\theta_2)+\cdots+\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2k})=-1$$

利用同樣的方法依此類推, 可得

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta_1+\cos(\theta_1+\theta_2)+\cdots+\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2k})=-1\\ \cos\theta_2+\cos(\theta_2+\theta_3)+\cdots+\cos(\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{2k+1})=-1\\ \vdots\\ \cos\theta_{2k+1}+\cos(\theta_{2k+1}+\theta_1)+\cdots+\cos(\theta_{2k+1}+\theta_1+\cdots+\theta_{2k-1})=-1\end{array}\right\} \quad (13)$$

(13)式為球面 $2k+1$ 邊形 $f(X)$ 最小值的角度限制, 但是不能確定 θ_1、θ_2、$\cdots$、θ_{2k}、θ_{2k+1} 的角度. 根據球面三角形的情況我們猜測

$$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_{2k}=\theta_{2k+1}=2\pi/(2k+1)$$

可滿足(13)式, 由引理 3.2 證明之.

引理 5. 如果 $\theta=2\pi/(2k+1)$, 則

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos2k\theta=0.$$

證明. 令 $\omega=\cos\theta+i\sin\theta$, 則

$$\omega^{2k+1}=1 \quad\Rightarrow\quad 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2k}=0,$$

即

$$(1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos2k\theta)+i(\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin2k\theta)=0,$$

因此實數部分

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos2k\theta=0.$$

所以

$$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_{2k}=2\pi/(2k+1),$$

又

$$\theta_{2k+1}=2\pi-\frac{2k(2\pi)}{2k+1}=\frac{2\pi}{2k+1},$$

得證. □

由引理 3.2 可得若 P 點滿足

$$\measuredangle A_1PA_2 = \cdots = \measuredangle A_{2k}PA_{2k+1} = \measuredangle A_{2k+1}PA_1 = \frac{2\pi}{2k+1} \tag{14}$$

時, P 點滿足(13)式.

使用 Lagrange Multiplier 時, 我們還有頂點未討論, 接下來我們將證明在某個條件下, 頂點不為球面 $2k+1$ 邊形的費馬點. 在此我們須一個名詞定義, 整理如定義 3.1.

定義 3.1. 已知一球面 $2k+1$ 邊形, 令 $i, m, n \in \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$, 且 $m \equiv i+k \pmod{2k+1}$, $n \equiv i+k+1 \pmod{2k+1}$, 則稱 $\measuredangle A_mA_iA_n$ 為頂點 A_i 之中間角.

3.3.2 當所有的中間角小於 $2\pi/3$ 時, 頂點不為其球面 $2k+1$ 邊形的費馬點

在此章節中, 我們要去證明當所有的中間角小於 $2\pi/3$ 時, 頂點不為其球面 $2k+1$ 邊形的費馬點.

定理 5. 已知一球面 $2k+1$ 邊形, 其任意兩頂點連線皆小於 $\pi/2$, 且各頂點的中間角皆小於 $2\pi/3$, 則頂點不為費馬點.

證明. 不失一般性, 假設 A_1 為費馬點, 作 $\widehat{A_1A_3}$, $\widehat{A_1A_4}$, $\cdots$、$\widehat{A_1A_{2k}}$, $\widehat{A_2A_{2k+1}}$, 再令 $\widehat{A_1A_3}$ 交 $\widehat{A_2A_{2k+1}}$ 於 B_3, $\widehat{A_1A_4}$ 交 $\widehat{A_2A_{2k+1}}$ 於 B_3, $\cdots$, $\widehat{A_1A_{2k}}$ 交 $\widehat{A_2A_{2k+1}}$ 於 B_{2k}, 如圖 18.

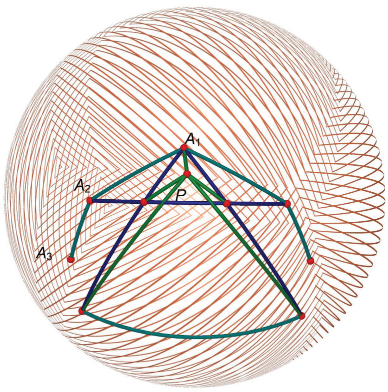

圖 18

設 P 為球面三角形 $B_{k+1}A_1B_{k+2}$ 費馬點, 連接 $\widehat{PA_1}$, $\widehat{PA_2}$, $\cdots$, $\widehat{PA}_{2k+1}$. 因為 P 為球面三角形 $B_{k+1}A_1B_{k+2}$ 之費馬點,

$$\widehat{A_1B}_{k+1} + \widehat{A_1B}_{k+2} > \widehat{PA_1} + \widehat{PB}_{k+1} + \widehat{PB}_{k+2}, \tag{15}$$

又在球面三角形 $PB_{k+1}A_{k+1}$, $PB_{k+2}A_{k+2}$ 中,

$$\widehat{PB}_{k+1} + \widehat{B_{k+1}A}_{k+1} > \widehat{PA}_{k+1} \tag{16}$$

$$\widehat{PB}_{k+2} + \widehat{B_{k+2}A}_{k+2} > \widehat{PA}_{k+2} \tag{17}$$

由(15)(16)(17)可得

$$\widehat{A_1A}_{k+1} + \widehat{A_1A}_{k+2} > \widehat{PA_1} + \widehat{PA}_{k+1} + \widehat{PA}_{k+2}.$$

又在球面三角形 $A_1A_2A_{2k+1}$ 中, 因為 P 必在內部, 由引理 3.1 可得

$$\overparen{A_1A_2}+\overparen{A_1A}_{2k+1}>\overparen{PA_2}+\overparen{PA}_{2k+1},$$

在球面三角形 $A_1A_3A_{2k}$ 中可知

$$\overparen{A_1A_3}+\overparen{A_1A}_{2k}>\overparen{PA_3}+\overparen{PA}_{2k},\ \cdots,$$

在球面三角形 $A_1A_kA_{k+3}$ 中, 同理可得

$$\overparen{A_1A_k}+\overparen{A_1A}_{k+3}>\overparen{PA_k}+\overparen{PA}_{k+3},$$

所以

$$\overparen{A_1A_2}+\overparen{A_1A_3}+\cdots+\overparen{A_1A}_{2k+1}>\overparen{PA_1}+\overparen{PA_2}+\cdots+\overparen{PA}_{2k+1},$$

得證. □

由上可得知費馬點必在球面 $2k+1$ 邊形內部, 且滿足(13)式, 但是否滿足(14)式, 我們將在下節討論.

3.3.3 球面上一點 P 滿足 $\measuredangle A_1PA_2=\cdots=\measuredangle A_{2k}PA_{2k+1}=\measuredangle A_{2k+1}PA_1=\dfrac{2\pi}{2k+1}$ 時, P 點是否即為球面 $2k+1$ 邊形之費馬點？

在 3.3.2 的條件下, 頂點不是球面 $2k+1$ 邊形的費馬點. 則費馬點必在球面 $2k+1$ 邊形內部, 且滿足(13)式, 但是是否滿足

$$\measuredangle A_1PA_2=\cdots=\measuredangle A_{2k}PA_{2k+1}=\measuredangle A_{2k+1}PA_1=\frac{2\pi}{2k+1}$$

以下我們來驗證之.

引理 6. 已知一球面 $2k+1$ 邊形, 且中間角小於 $2\pi/3$, 若存在一點 P 滿足*(14)*式, 則此 P 點會落在球面 $2k+1$ 邊形內部.

證明. 利用反證法: 假設 P 點在外部, 滿足

$$\measuredangle A_1PA_2=\cdots=\measuredangle A_{2k}PA_{2k+1}=\measuredangle A_{2k+1}PA_1=\frac{2\pi}{2k+1}.$$

此 P 點位置可分兩部分討論.

(1) 當 P 與三角形其中一邊共弧, 如圖 19.

不失一般性, 假設 P 點與 $\overparen{A_1A_2}$ 共弧時, $\measuredangle A_1PA_2=0$, 矛盾.

(2) 不失一般性, 設 $\overparen{A_{k+1}A}_{k+2}$ 所處之大圓將球面分割成兩半球面, 而其中 P 點不與其他頂點共處同一半球面, 如圖 20.

因為 P 點滿足

$$\measuredangle A_1PA_2=\cdots=\measuredangle A_{2k}PA_{2k+1}=\measuredangle A_{2k+1}PA_1=\frac{2\pi}{2k+1},$$

又球面三角形 $A_{k+1}PA_{k+2}$ 三邊小於 π 時, 球面角小於 π, 而

$$\begin{aligned}\measuredangle A_1PA_2+\measuredangle A_2PA_3+\cdots+\measuredangle A_kPA_{k+1}+\measuredangle A_{k+2}PA_{k+3}\\+\cdots+\measuredangle A_{2k}PA_{2k+1}=\measuredangle A_{2k+1}PA_1=\frac{2k(2\pi)}{2k+1}\end{aligned}$$

為球面三角形 $A_{k+1}PA_{k+2}$ 之一內角, 且其大於 π, 矛盾.

又假設 P 點在邊上時, 不失一般性, 假設 P 在 $\overparen{A_1A_2}$ 上, 則 $\measuredangle A_1PA_2=\pi$, 矛盾, 所以 P 點必在內部, 證畢.

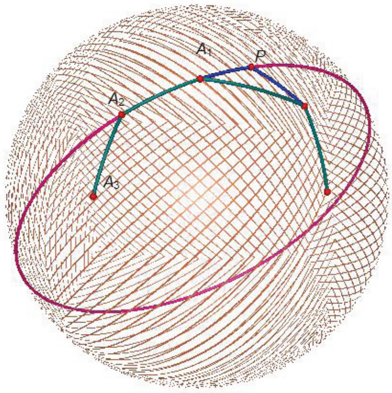

圖 19

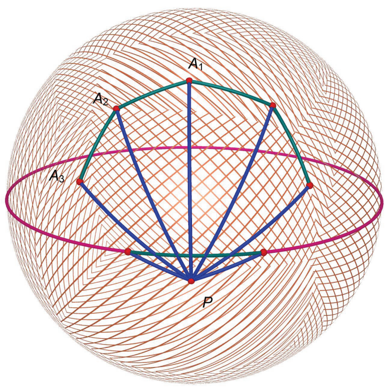

圖 20

□

由上可知, 上述之 P 點若存在, 則此 P 點必在球面 $2k+1$ 邊形內部, 但是是否存在 ? 我們將於下面討論.

引理 7. 已知球面 $2k+1$ 邊形, 任意兩頂點連線皆小於 $\pi/2$, 若其中有一頂點之中間角 $> \pi/2$, 則在球面 $2k+1$ 邊形內部不存在任何一點 P, 使得

$$\measuredangle A_1PA_2 = \cdots = \measuredangle A_{2k}PA_{2k+1} = \measuredangle A_{2k+1}PA_1 = \frac{2\pi}{2k+1}.$$

證明. 以下利用反證法. 設存在一點 P 滿足(14)式時, P 點在球面 $2k+1$ 邊形內部. 令頂點 A_1 之中間角 $\measuredangle A_{k+1}A_1A_{k+2} \geq \pi/2$, $\widehat{A_1A}_{k+1}$ 交 $\widehat{A_2A}_{2k+1}$ 於 B_{k+1}, $\widehat{A_1A}_{k+2}$ 交 $\widehat{A_2A}_{2k+1}$ 於 B_{k+2}. 在此分兩部分分別探討.

(1) 當 P 落在球面三角形 $A_1A_{k+1}A_{k+2}$ 內部, 則

$$\measuredangle A_{k+1}PA_{k+2} > \measuredangle A_{k+1}A_1A_{k+2} > \pi/2,$$

所以 $\dfrac{2\pi}{2k+1} > \dfrac{\pi}{2}$, 又 $k > 1$, 矛盾.

(2) 當 P 不在球面三角形 $A_1A_{k+1}A_{k+2}$ 內部, 則不失一般性, 如圖 21, 連接 $\widehat{PA_1}$, $\widehat{PA}_{2k+1}, \ldots, \widehat{PA}_{k+2}$.

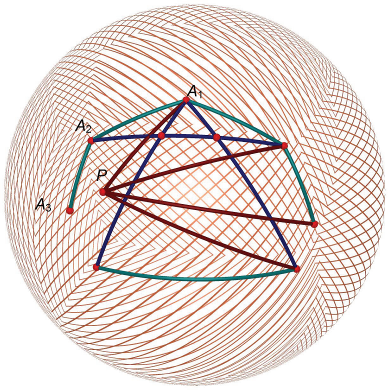

圖 21

在球面三角形 A_1PA_{2k+1} 中, $\measuredangle A_1PA_{2k+1} = \dfrac{2\pi}{2k+1}$、在球面三角形 $A_{2k+1}PA_{2k}$ 中, $\measuredangle A_{2k+1}PA_{2k} = \dfrac{2\pi}{2k+1}$、$\cdots$、在球面三角形 $A_{k+3}PA_{k+2}$ 中, $\measuredangle A_{k+3}PA_{k+2} = \dfrac{2\pi}{2k+1}$, 所以 $\measuredangle A_1PA_{k+2} = \dfrac{2k\pi}{2k+1}$, 又在球面三角形 A_1PA_{k+2} 中, 因為

$$\measuredangle PA_1A_{k+2} \geq \measuredangle A_1A_{k+1}A_{k+2} > \pi/2,$$

且球面三角形三邊皆小於 $\pi/2$, 由引理 2.1 可得

$$\pi/2 > \measuredangle A_1PA_{k+2} = \frac{2k\pi}{2k+1},$$

矛盾, 故在球面 $2k+1$ 邊形內部不存在任何一點 P, 使得

$$\measuredangle A_1PA_2 = \cdots = \measuredangle A_{2k}PA_{2k+1} = \measuredangle A_{2k+1}PA_1 = \frac{2\pi}{2k+1}.$$

□

由引理 3.3, 可知當中間角小於 $2\pi/3$ 時, 若存在 P 點滿足(14)式, 則 P 點必在球面 $2k+1$ 邊形內部；而引理 3.4 卻得當中間角大於 $\pi/2$ 時, 球面 $2k+1$ 邊形內部不存在一點 P 滿足(14)式, 故可知若球面 $2k+1$ 邊形中有一頂點之中間角介於 $\pi/2$ 和 $2\pi/3$ 之間時, 滿足(14)式之 P 點不存在. 但由定理 3.2 得知費馬點在球面 $2k+1$ 邊形內部, 故可知滿足(13)式的點並不唯一, 必須將所有滿足(13)式的點加以驗證後才能決定費馬點.

4 結論

4.1 結論

1、 確定球面多邊形(包含三角形)費馬點存在且唯一.

2、 確定球面三角形費馬點必不存在於球面三角形外.

3、 根據 The Fermat point of a spherical triangle 一文, 可以得知在球面三角形三邊 a, b, c 皆小於 $\pi/2$ 的前提下, 球面三角形的費馬點有唯一性, 可以將情況分為以下兩種:

(一) 當 $\measuredangle ABC, \measuredangle BCA, \measuredangle CAB$ 皆小於 $2\pi/3$, 則費馬點 P 位於球面三角形 ABC 內部, 且 $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle APC = 2\pi/3$.

(二) 當 $\measuredangle ABC, \measuredangle BCA, \measuredangle CAB$ 中有一角 $\geq 2\pi/3$ (僅能有一角) , 則費馬點即為此角之頂點.

4、 在球面三角形 ABC 內部一點 T, 則 $\measuredangle BAC$ 必小於 $\measuredangle BTC$.

5、 確定球面 $2k+1$ 邊形費馬點必不存在於球面 $2k+1$ 邊形外.

6、 若 $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{2k} = \theta_{2k+1} = 2\pi/(2k+1)$ 時, 方程組

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2) + \cdots + \cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2k}) = -1 \\ \cos\theta_2 + \cos(\theta_2+\theta_3) + \cdots + \cos(\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{2k+1}) = -1 \\ \vdots \\ \cos\theta_{2k+1} + \cos(\theta_{2k+1}+\theta_1) + \cdots + \cos(\theta_{2k+1}+\theta_1+\cdots+\theta_{2k-1}) = -1 \end{array}\right\} \text{成立}$$

7、 當球面 $2k+1$ 邊形所有頂點之中間角小於 $2\pi/3$ 時, 頂點不為費馬點.

8、 當球面 $2k+1$ 邊形所有頂點之中間角小於 $2\pi/3$ 時, 若存在 P 點滿足(14)式, 則 P 點必在球面 $2k+1$ 邊形內部.

9、 當球面 $2k+1$ 邊形有一頂點之中間角大於 $\pi/2$ 時, 則在球面 $2k+1$ 邊形內部不存在任何一點 P 滿足(14)式.

10、 由結論 8、9 可知若球面 $2k+1$ 邊形中所有頂點之中間角小於 $2\pi/3$, 且有一頂點之中間角大於 $\pi/2$ 時, 滿足(14)式之 P 點不存在.

11、 由結論 7、10 可知若球面 $2k+1$ 邊形中所有頂點之中間角小於 $2\pi/3$, 且有一頂點之中間角大於 $\pi/2$ 時, 費馬點會在球面 $2k+1$ 邊形內部, 但不滿足(14)式. 故得證滿足(13)式之點不唯一, 換句話說, 方程組非唯一解, 而費馬點必須將所有滿足(13)式之點一一驗證後才可得.

4.2 討論

目前球面 $2k$ 邊形因存在對角線, 且對角線不一定交於一點, 目前僅能得知如果 A_k 與 A_{n+k} 所構成的對角線如果全部交於一點的話, 此交點即為費馬點. 目前球面 $2k$ 邊形仍努力以更簡單的方法尋找此費馬點.

而在球面 $2k+1$ 邊形中, 還可以討論當有一頂點之中間角 $\geq 2\pi/3$ 及費馬點除了滿足(13)式以外是否還有其他性質, 都值得我們再研究.

參考文獻

[1] Khuloud Ghalieh and Mowaffaq Hajja; *The Fermat point of a spherical triangle?* The Mathematical Gazette, Vol.80, No.489, p.561-564,1996.

[2] Spherical Trigonometry, J.D.H. Donnay, published by Interscience Publishers.

[3] 項武義(民99),《基礎幾何學》, 五南出版社

[4] 黃家禮(民98),《幾何明珠》, 九章出版社