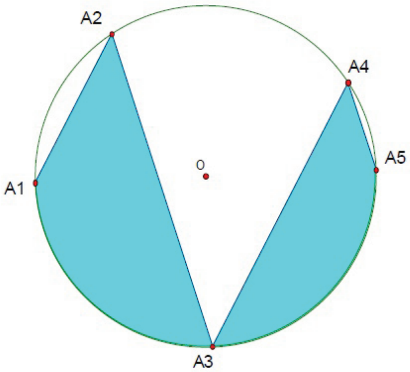
圓內接鋸齒形的相關研究

國立臺灣師範大學附屬高級中學 蘇哲寬
指導老師 洪允東

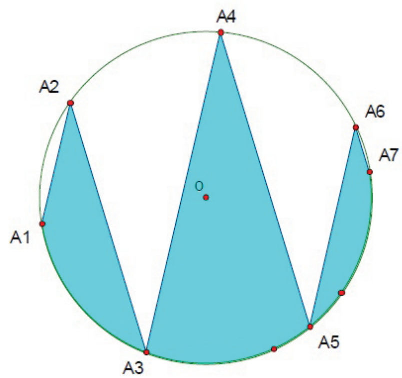
1 簡介

1.1 摘要

在一圓內放入鋸齒形(zigzag), 使其所有折線段的端點皆在圓周上, 則稱滿足以上條件的鋸齒形為「圓內接鋸齒形」. 圓內接鋸齒形在鋸齒角度皆為 $\pi/4$ (圖一)或皆為 $\pi/6$ (圖二)時, 鋸齒形上半部面積和(圖白色部分)與鋸齒形下半部面積和(圖藍色部分)相等.



圖一



圖二

而我將此結果推廣至: 圓內接鋸齒形在鋸齒角度皆為 π/n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ 時, 鋸齒形上半部面積和與鋸齒形下半部面積和的關係, 並研究鋸齒角度皆為 π/n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ 時, 由左至右輪流取弦時, 其弦長和的關係.

1.2 研究動機

之前作披薩定理的研究時, 曾在 Mad Maths 網站 (http://mathafou.free.fr/ pbg_en/sol128.html) 查到相關的 zigzag 問題, 雖然僅有一頁, 且僅限鋸齒角度皆為 $\pi/4$ 與皆為 $\pi/6$ 兩種情形, 但兩者證明方法迴異, 於是我想接著研究當鋸齒角度為其他角度時面積和是否有某些特殊性質. 我也發現當鋸齒角度皆為 $\pi/3$ 或皆為 $\pi/5$ 時, 由左到右輪流取弦, 其弦長和相等. 這與當時披薩定理有相似之處, 老師也希望我對 zigzag 問題作更深入的探討與推廣.

1.3 研究流程

先研究圓內接鋸齒形在鋸齒角度皆為某特定角時, 鋸齒形上半部面積和與鋸齒形下半部面積和的關係, 及輪流取弦時其弦長和的關係. 並希望能推廣至當鋸齒角度皆為任意實數 x $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 時鋸齒形上半部面積和與鋸齒形下半部面積和的關係, 及輪流取弦時其弦長和的關係.

1.4　研究結果

一、 若圓內接鋸齒形的鋸齒角度為 $\frac{\pi}{2n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 時, 則鋸齒形上半部面積和與鋸齒形下半部面積和相等.

二、 若圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時:

1、 若 n 為奇數, 則包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積和大.

2、 若 n 為偶數, 則包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積和小.

三、 若圓內接鋸齒形鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時, 則由左到右輪流取弦, 兩組弦長和相等.

四、 當鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 時, 由左到右輪流取弦,

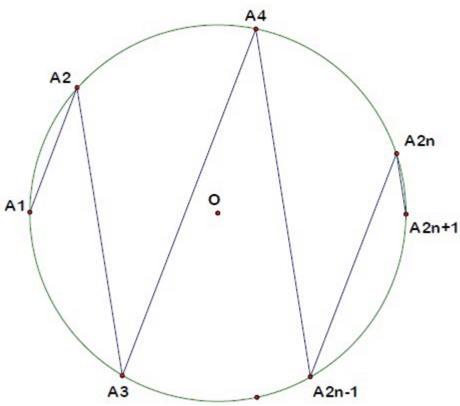
1、 若 n 為奇數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大.

2、 若 n 為偶數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小.

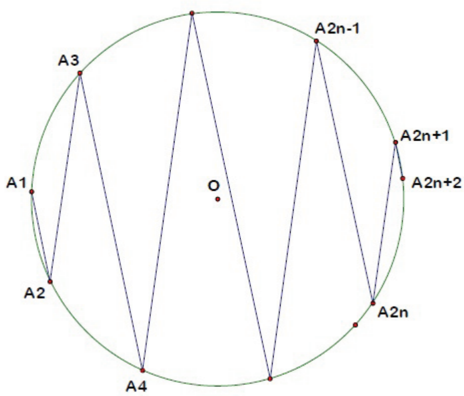
2　研究內容

名詞定義:

- 鋸齒形: 連續折線段中, 任三相鄰折線段所形成的兩交角皆為內錯角關係, 稱此連續折線段為鋸齒形(zigzag), 以 $Z(A_1A_2\cdots A_n)$ 表示折線段的端點依序為 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的鋸齒形.
- 鋸齒角度: 鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_n)$ 中, 任兩相鄰折線段的交角 $\angle A_iA_{i+1}A_{i+2} = \theta_i$ 稱為鋸齒角度.
- 圓內接鋸齒形: 鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_n)$ 在圓內且端點 A_i $(1 \leq i \leq n)$ 皆在圓周上的鋸齒形.



圖三：鋸齒角度為皆為 $\frac{\pi}{2n}$

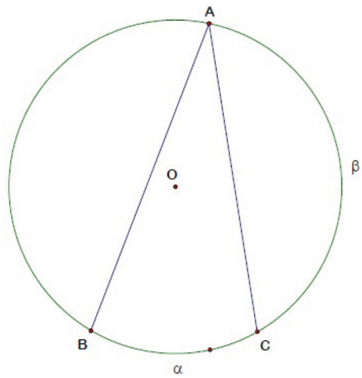


圖四：鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n+1}$

如圖三, 鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ 時: 圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots\ A_{2n+1})$, 因每一個鋸齒角度所對應到的弧角皆為 $\dfrac{\pi}{n}$, 而圓弧將被分割成 $2n+1$ 段, 定義 $\widehat{A_1A_2}$ 為 θ $\left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{n}\right)$, $\widehat{A_{2n}A_{2n+1}}$ 為 $\dfrac{\pi}{n}-\theta$, $\widehat{A_kA_{k+2}}$ $(k=1,2,\cdots,2n-1)$ 皆為 $\dfrac{\pi}{n}$.

如圖四, 鋸齒角度為 $\dfrac{\pi}{2n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$ 時: 圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots\ A_{2n+2})$, 因每一個鋸齒角度所對應到的弧角皆為 $\dfrac{2\pi}{2n+1}$, 而圓弧將被分割成 $2n+2$ 段, 定義 $\widehat{A_1A_2}$ 為 θ $\left(0\leq\theta\leq\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$, $\widehat{A_{2n+1}A_{2n+2}}$ 為 $\dfrac{2\pi}{2n+1}-\theta$, $\widehat{A_kA_{k+2}}$ $(k=1,2,\cdots,2n)$ 皆為 $\dfrac{2\pi}{2n+1}$.

引理 1. 設 A, B, C 為半徑 R 的圓上任意相異三點, $\widehat{BC}=\alpha$, $\widehat{AC}=\beta$, 圓上 A 點與弧 BC 所形成的圖形面積定義為 (ABC), 則
$(ABC)=\dfrac{R^2}{2}\left[\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)\right]$.



圖五

證明.

$$\begin{aligned}(ABC) &= (\text{弓形}ACB)(\text{弓形}AC)\\ &= \left[\frac{R^2}{2}(\alpha+\beta)-\frac{R^2}{2}\sin(\alpha+\beta)\right]-\left(\frac{R^2}{2}\beta-\frac{R^2}{2}\sin\beta\right)\\ &= \frac{R^2}{2}(\alpha+\beta)-\frac{R^2}{2}\beta+\frac{R^2}{2}\sin\beta-\frac{R^2}{2}\sin(\alpha+\beta)\\ &= \frac{R^2}{2}[\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)]\end{aligned}$$

□

引理 2. 設 $\theta\in\mathbb{R}$, $\theta>0$, $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, 則

$$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{m}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{m}\right)+\cdots++\sin\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)=0$$

證明. 設 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$, $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$, 則

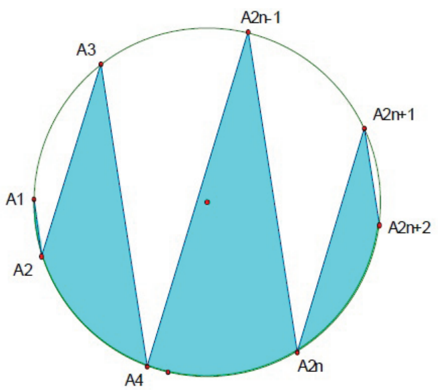
$$\begin{aligned}&\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{m}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{m}\right)+\cdots++\sin\left(\theta+\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\\ =\ &\mathrm{Im}[\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\cdots+\alpha\omega^{m-1}]\\ =\ &\mathrm{Im}\left[\frac{\alpha(1-\omega^m)}{1-\omega}\right]\\ =\ &\mathrm{Im}\left[\frac{\alpha(1-1)}{1-\omega}\right]=0\end{aligned}$$

□

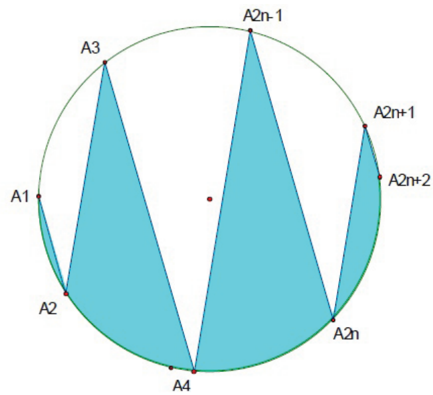
引理 3. 圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$, 在鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n+1}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ 時, 設 $\widehat{A_1A_2}=\theta$,

(1) 若 n 奇數時, 從弓形 A_1A_2 開始輪流取區塊, 則當 $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n+1}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群包含圓心*(圖六)*, 當 $\theta=\dfrac{\pi}{2n+1}$ 時, 圓心在弦 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上, 當 $\dfrac{\pi}{2n+1}<\theta\leq\dfrac{2\pi}{2n+1}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群不包含圓心*(圖七)*.

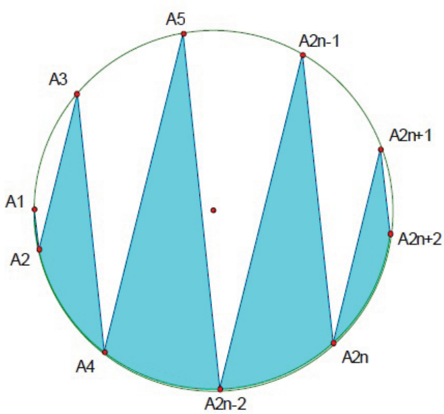
(2) 若 n 偶數時, 從弓形 A_1A_2 開始輪流取區塊, 則當 $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n+1}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群不包含圓心*(圖八)*, 當 $\theta=\dfrac{\pi}{2n+1}$ 時, 圓心在弦 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上, 當 $\dfrac{\pi}{2n+1}<\theta\leq\dfrac{2\pi}{2n+1}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群包含圓心*(圖九)*.



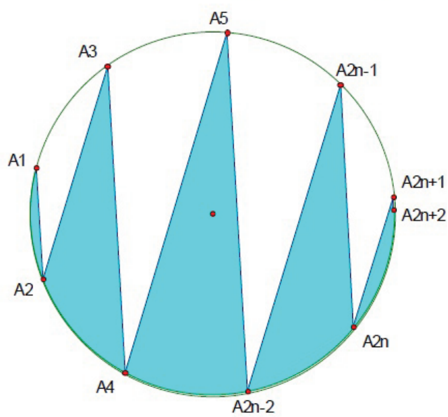
圖六：n 為奇數，$0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n+1}$



圖七：n 為奇數，$\dfrac{\pi}{2n+1}<\theta\leq\dfrac{2\pi}{2n+1}$



圖八：n 為偶數，$0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n+1}$



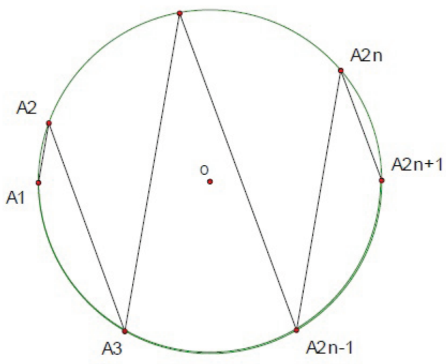
圖九：n 為偶數，$\dfrac{\pi}{2n+1}<\theta\leq\dfrac{2\pi}{2n+1}$

證明. 略. □

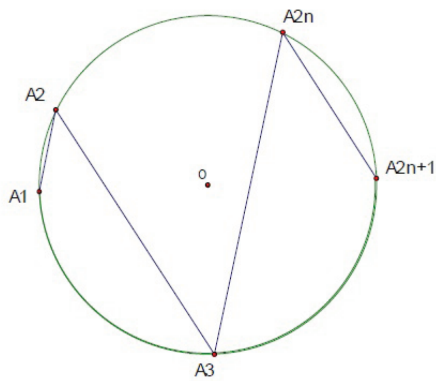
引理 4. 圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+1})$, 在鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ 時, 設 $\widehat{A_1A_2}=\theta$,

(1) 若 n 奇數時, 從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則當 $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n}$ 時, 該弦組不包含靠圓心最近的弦, 當 $\theta=\dfrac{\pi}{2n}$ 時, 圓心至兩組弦的最近距離相等, 當 $\dfrac{\pi}{2n}<\theta\leq\dfrac{\pi}{n}$ 時, 該弦組包含靠圓心最近唯一的弦. *(如圖十)*

(2) 若 n 偶數時, 從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則當 $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n}$ 時, 該弦組包含靠圓心最近唯一的弦, 當 $\theta=\dfrac{\pi}{2n}$ 時, 圓心至兩組弦的最近距離相等, 當 $\dfrac{\pi}{2n}<\theta\leq\dfrac{\pi}{n}$ 時, 該弦組不包含靠圓心最近的弦. *(如圖十一)*



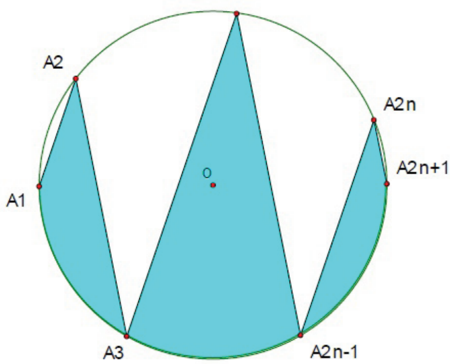
圖十：n 為奇數，$0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n}$



圖十一：n 為偶數，$0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2n}$

證明. 略 □

定理 1. 若圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+1})$ 的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ 時, 則鋸齒形上半部面積和*(*白色部分*)*與鋸齒形下半部面積和*(*藍色部分*)*相等.



圖十二

證明. (方法一)

令 $\widehat{A_1A_2}=\theta,\ 0\le\theta<\dfrac{\pi}{n}$, 則由圖十二知鋸齒形上半部面積和及下半部面積和其中有一為

$$(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n-1})+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}),$$

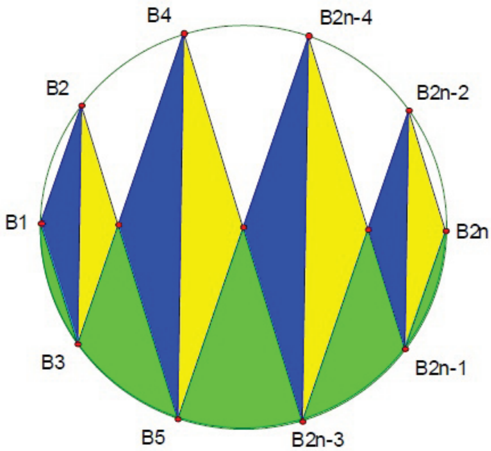
又因上半部面積和加上下半部面積和為圓面積, 故只要證明

$$(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-3}A_{2n-2}A_{2n-1})+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})=\frac{\pi R^2}{2}$$

即可(設 R 為圓半徑).

(方法二)

在鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n}$ $(n\in\mathbb{N}, n\ge 2)$ 時, 將 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ 的圓内接鋸齒形 $Z(B_1B_2\cdots B_{2n})$ 下半部區塊群(藍色部分)與 $\theta=0$ 的圓内接鋸齒形 $Z(B_1'B_2'\cdots B_{2n}')$ 下半部區塊群(黃色部分)作疊合, 得圖十三(綠色為重疊部分).



圖十三

僅保留重疊部分(綠色部分), 並將 $0<\theta<\dfrac{\pi}{n}$ 的圓内接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+1})$ 下方頂點與圓内接鋸齒形 $Z(B_1B_2\cdots B_{2n})$ 下方頂點對齊(即 $A_{2k-1}=B_{2k-1},\ k=1,2,\cdots,n$, $A_{2n+1}=B_{2n}$), 得圖十四.

則

$$\widehat{B_2A_4}=\widehat{B_4A_6}=\cdots=\widehat{B_{2n-2}A_{2n}}=\widehat{A_1A_2}=\theta$$

因為 $\widehat{A_{2k}A_{2k+4}}=\dfrac{2\pi}{n}$, 又因圖十四知與 $\overline{B_1B_2}$ 平行的直線和與 $\overline{B_1B_3}$ 平行的直線, 其銳交角皆為 $\dfrac{\pi}{n}$. 所以過 A_{2k} 作與 B_1B_3 平行的直線和過 A_{2k+4} 作與 $\overline{B_1B_2}$ 平行的直線相交於圓周上, 其中 $k=1,2,\cdots,n-2$. 故可設過 A_{2k} 與 $\overline{B_1B_3}$ 平行的線與過 A_{2k+4} 與 $\overline{B_1B_2}$ 平行的線交圓周於 C_{k+1}, 其中 $k=1,2,\cdots,n-2$, 特別地, $\overline{A_{2n-2}C_n}\parallel\overline{B_1B_3}$, $\overline{A_4C_1}\parallel\overline{B_1B_2}$

又因 $\overline{A_{2k}C_{k+1}}$ 與 $\overline{A_{2k+2}C_k}$ 的交角為 $\dfrac{\pi}{n}$ 且 $\widehat{A_{2k}A_{2k+2}}=\dfrac{\pi}{n}$, 其中 $k=1,2,\cdots,n-1$

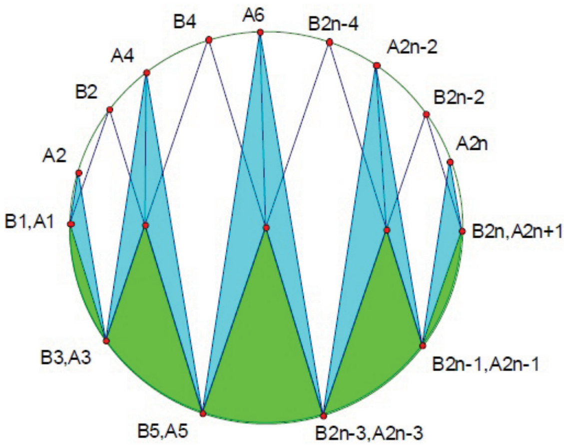
所以

$$\widehat{C_kC_{k+1}}=\frac{\pi}{n}=\widehat{A_{2k}A_{2k+2}},\ 其中\ k=1,2,\cdots,n-1$$

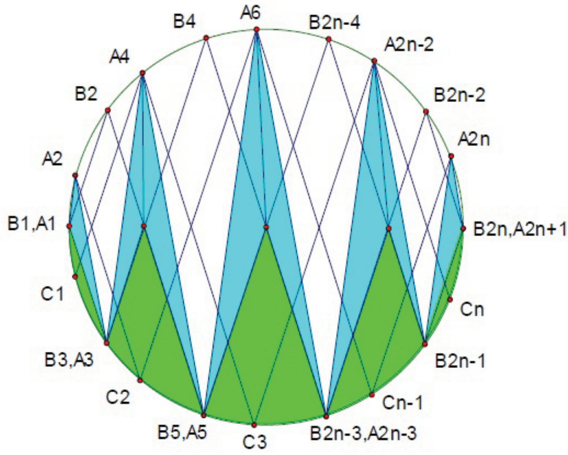
又因

$$\widehat{A_1C_k}=\widehat{A_1A_{2k-1}}+\widehat{A_{2k-1}C_k}=\widehat{A_1A_{2k-1}}+\widehat{B_{2k-1}C_k}=\frac{(k-1)\pi}{n}+\theta=\widehat{A_1A_{2k}},$$

$$其中\ k=1,2,\cdots,n-1.$$

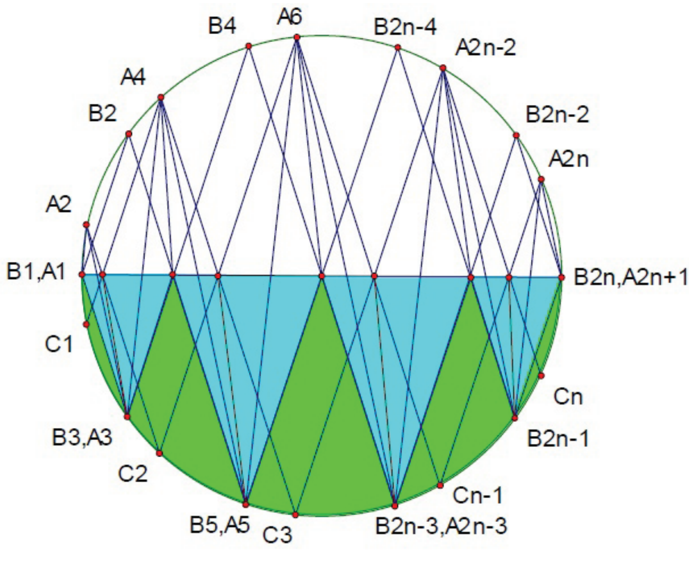


圖十四



圖十五

所以 $\overline{A_{2k}C_{k+1}}$ 與 $\overline{A_{2k+2}C_k}$ 的交點都在直徑 $\overline{A_1A_{2n+1}}$ 上, 其中 $k = 1, 2, \cdots, n-1$
將三角形(藍色部分)的頂點 A_{2k} 沿 $\overline{A_{2k}C_{k+1}}$ 與 $\overline{A_{2k}C_{k-1}}$ 作平行底邊(藍綠部分交界處)的移動, 由於 $\overline{A_{2k}C_{k+1}}$ 與 $\overline{A_{2k+2}C_k}$ 的交點都在直徑 $\overline{A_1A_{2n+1}}$ 上, 最後將形成一半圓. (如圖十六) □



圖十六

定理 2. 若圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$ 的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時*:*

1、 若 n 為奇數, 則包含圓心部分的區塊群面積和*(*藍色部分*)*比未包含圓心部分*(*白色部分*)*的區塊群面積和大*.(*圖六*)*

2、 若 n 為偶數, 則包含圓心部分的區塊群面積和*(*藍色部分*)*比未包含圓心部分*(*白色部分*)*的區塊群面積和小*.(*圖八*)*

證明. 令 $\widehat{A_1A_2}=\theta$, $0\le\theta<\dfrac{2\pi}{2n+1}$, 則包含弓形 A_1A_2 部分的面積和為

$$
\begin{aligned}
&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\
=\ &\frac{R^2}{2}\left\{\left(\frac{2n\pi}{2n+1}+\theta\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)+\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)-\cdots+\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

(由引理 1, 以下同)
不包含弓形 A_1A_2 部分的面積和為

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})+(\text{弓形}A_{2+1}A_{2+2})\\
=\ &\frac{R^2}{2}\left\{\frac{(2n+2)\pi}{2n+1}-\theta+\sin\theta-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)-\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)+\cdots-\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

由引理 3 得知: 只需將

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^2}{2}\left\{\left(\frac{2n\pi}{2n+1}+\theta\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)+\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)-\cdots+\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

減掉

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^2}{2}\left\{\frac{(2n+2)\pi}{2n+1}-\theta+\sin\theta-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)-\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)+\cdots-\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

的值在 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2n+1}$ 時大於零, 在 $\dfrac{\pi}{2n+1}<\theta\le\dfrac{2\pi}{2n+1}$ 時小於零, 即可證明定理 2.

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^2}{2}\left\{\left(\frac{2n\pi}{2n+1}+\theta\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)+\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)-\cdots+\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}\\
&-\frac{R^2}{2}\left\{\frac{(2n+2)\pi}{2n+1}-\theta+\sin\theta-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)-\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)+\cdots-\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}\\
&=R^2\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)+\right.\\
&\left.\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)-\cdots+\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

設 $\cos\theta + i\sin\theta = \alpha$, $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1} + i\sin\dfrac{2\pi}{2n+1} = \omega$, 則

$$\frac{R^2}{2}\Bigg\{\left(\frac{2n\pi}{2n+1}+\theta\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+1}\right)+$$
$$\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+1}\right)-\cdots+\sin\left(\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+1}\right)\Bigg\}$$
$$=R^2\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\operatorname{Im}\left(\alpha-\alpha\omega+\alpha\omega^2-\cdots-\alpha\omega^{2n-1}+\alpha\omega^{2n}\right)\right]$$
$$=R^2\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha(1-\omega+\omega^2-\cdots-\omega^{2n-1}+\omega^{2n})\right]\right\}$$
$$=R^2\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{1+\omega}\right)\right]\right\}$$
$$=R^2\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{2}{1+\omega}\right)\right]\right\}$$

又因

$$\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{2}{1+\omega}\right)\right]=\operatorname{Im}\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[\frac{2}{1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}}\right]\right\}$$
$$=\sec\frac{\pi}{2n+1}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)$$

故

$$R^2\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{2}{\omega+1}\right)\right]\right\}=R^2\left\{\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\sec\frac{\pi}{2n+1}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}$$

令 $f(\theta)=R^2\left\{\left(\theta-\dfrac{\pi}{2n+1}\right)-\sec\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2n+1}\right)\right\}$, $\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$

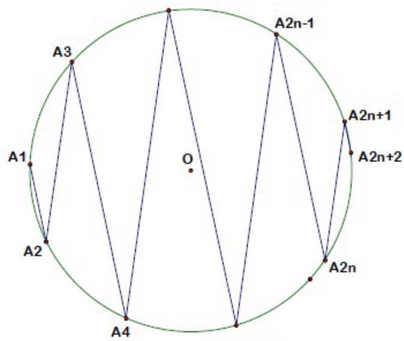
$$\because\ f'(\theta)=R^2\left[1-\sec\frac{\pi}{2n+1}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n+1}\right)\right]\le R^2\left[1-\sec\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1}\right]=0$$
$$\left(\because\theta-\frac{\pi}{2n+1}\in\left[-\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{2n+1}\right]\right)$$

且等號成立 $\Leftrightarrow \theta=0$, 故 $f(\theta)$ 在 $\left(0,\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ 上是一個嚴格遞減函數. 又因

$$\begin{aligned}
f(0) &= R^2\left\{\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right)-\sec\frac{\pi}{2n+1}\sin\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}\\
&= R^2\left[\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right)+\tan\frac{\pi}{2n+1}\right]>0\\
f\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) &= R^2(0-0)=0\\
f\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) &= R^2\left\{\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)-\sec\frac{\pi}{2n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}\\
&= R^2\left[\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)-\tan\frac{\pi}{2n+1}\right]<0
\end{aligned}$$

因此在 $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2n+1}$ 時, $f(\theta)$ 恆大於零. 在 $\dfrac{\pi}{2n+1} < \theta \le \dfrac{2\pi}{2n+1}$ 時, $f(\theta)$ 恆小於零. □

定理 3. 若圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$ 的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時, 則由左到右輪流取弦, 兩組弦長和相等.



圖十七

證明. 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, $0 \le \theta < \dfrac{2\pi}{2n+1}$, 則從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} + \overline{A_{2n+1}A_{2n+2}} \\
&= 2R\left\{ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \cdots + \right. \\
&\left. \sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) \right\}
\end{aligned}$$

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}} + \overline{A_{2n}A_{2n+1}} \\
&= 2R\left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \cdots + \right. \\
&\left. \sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) \right\}
\end{aligned}$$

兩式相減, 得

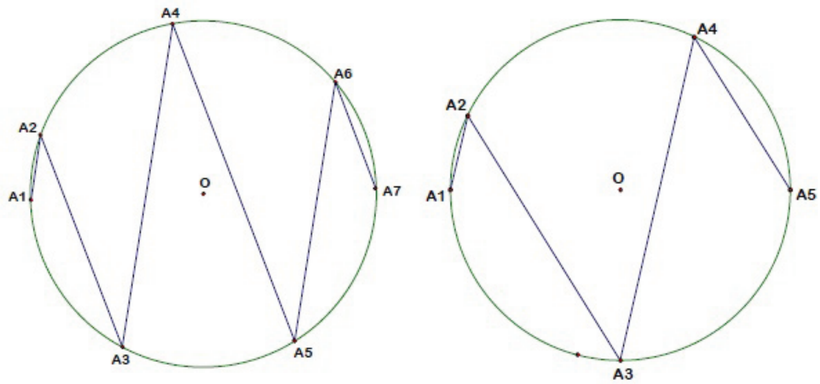
$$\begin{aligned}
&\left(\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} + \overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right) - \left(\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5}\right. \\
&\left. + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}} + \overline{A_{2n}A_{2n+1}}\right) \\
&= 2R\left\{ \begin{array}{l}
\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \cdots \\
+\sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) \\
+\sin\left(\frac{(2n+2)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n+4)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \cdots + \\
\sin\left(\frac{(4n-2)\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{4n\pi}{2n+1} + \frac{\theta}{2}\right) \Big\}
\end{array} \right\} \xlongequal{\text{引理 2}} 2R \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

由此得證: 若圓內接鋸齒形鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時, 則由左到右輪流取弦, 則兩組弦長和相等. □

定理 4. 若圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+1})$ 鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 時, 由左到右輪流取弦,

1、 若 n 為奇數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大；

2、 若 n 為偶數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小.



圖十八：左圖 n 為奇數，右圖 n 為偶數

證明. 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{n}$, 則

1、 當 n 為奇數時:
從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-3}A_{2n-2}} + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} \\
&= 2R\left\{\begin{array}{c} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) + \cdots \\ + \sin\left(\dfrac{(2n-4)\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{(2n-2)\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) \end{array}\right\} \\
&= 4R\sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right) + \cos\left(\dfrac{(n-3)\pi}{2n}\right) + \cdots\right. \\
&\left. + \cos\left(\dfrac{2\pi}{2n}\right) + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{0}{2n}\right)\right\}
\end{aligned}$$

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}} + \overline{A_{2n}A_{2n-1}} \\
&= 2R\left\{\begin{array}{c} \sin\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{(2n-3)\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) + \cdots \\ + \sin\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2n} + \dfrac{\theta}{2}\right) \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$= 4R\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{0}{2n}\right)\right\}$$

2、 當 n 為偶數時:
從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$$
$$= 2R\left\{\begin{array}{c}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\\ +\sin\left(\frac{(2n-4)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)\end{array}\right\}$$
$$= 4R\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n}\right)+\right.$$
$$\left.\cdots+\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$$
$$= 2R\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$
$$= 4R\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)+\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

(1) 當 $0\le\theta<\frac{\pi}{2n}$ 時, 因為 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)>\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)$
所以
$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$$
$$<\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$$

(2) 當 $\theta=\frac{\pi}{2n}$ 時, 因為 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)$
所以
$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$$
$$=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$$

(3) 當 $\frac{\pi}{2n}<\theta\le\frac{\pi}{n}$ 時, 因為 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)<\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+\frac{\theta}{2}\right)$
所以
$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$$
$$>\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$$

由引理 4 代入上述結果由可得知: 當鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 時, 由左到右輪流取弦, 若 n 為奇數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大; 若 n 為偶數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小. □

3 結論及未來展望

目前結論:

一、 若圓內接鋸齒形的鋸齒角度為 $\frac{\pi}{2n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 時, 則鋸齒形上半部面積和與鋸齒形下半部面積和相等.

二、 若圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時:

1、 若 n 為奇數, 則包含圓心部分的面積和比未包含圓心部分的面積和大.

2、 若 n 為偶數, 則包含圓心部分的面積和比未包含圓心部分的面積和小.

三、 若圓內接鋸齒形鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時, 則由左到右輪流取弦, 則兩組弦長和相等.

四、 當鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ 時, 由左到右輪流取弦,

1、 若 n 為奇數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大.

2、 若 n 為偶數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小.

未來展望:

一、 研究鋸齒角度皆為任意 $x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 時, 靠圓心最近的弦該組弦長和與另一組弦長和的關係.

二、 研究鋸齒角度皆為任意 $x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 時, 其包含圓心部分的面積和與未包含圓心部分的面積和的關係.

三、 研究及探討鋸齒形在其他規則形狀(如正多邊形)時, 線段長和、面積和的關係.

四、 研究及探討其在立體化後(如圓柱、球體、...), 原定理是否仍然成立.

五、 研究及探討 zigzag 問題與披薩定理的相關性.

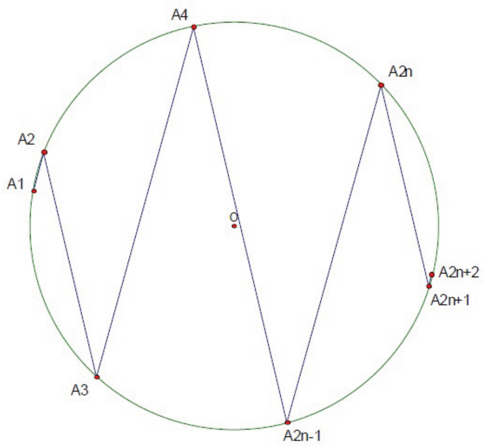
4 延伸研究

圓內接鋸齒形在鋸齒角度皆為任意實數 $x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 時:

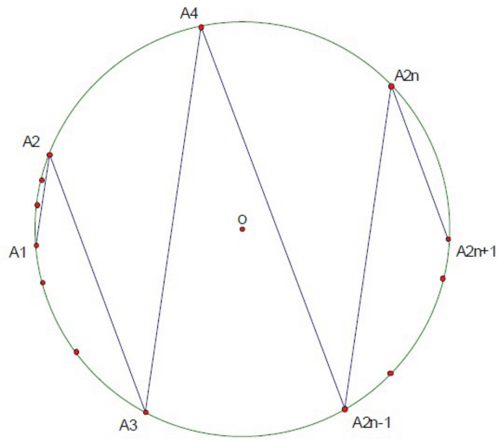
設圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{X}$, 其中 $X = m + a$ $(m \in \mathbb{N}, m \geq 2, a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1)$, 即 $[X] = m$.

一、 當 $m = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ 時,

圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\frac{\pi}{2n+a}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時: 每一個鋸齒角度所對應到的弧角皆為 $\frac{2\pi}{2n+a}$, 定義 $\widehat{A_1A_2}$ 為 θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{2n+a}\right)$



圖十九

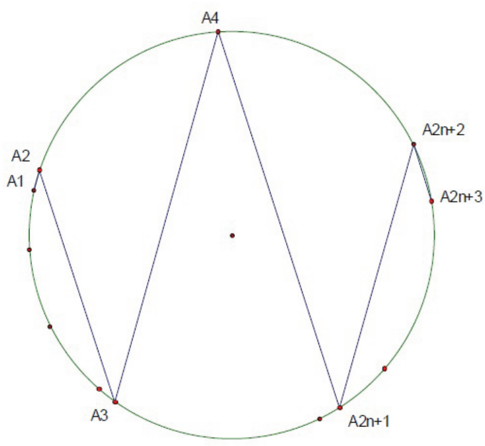


圖二十

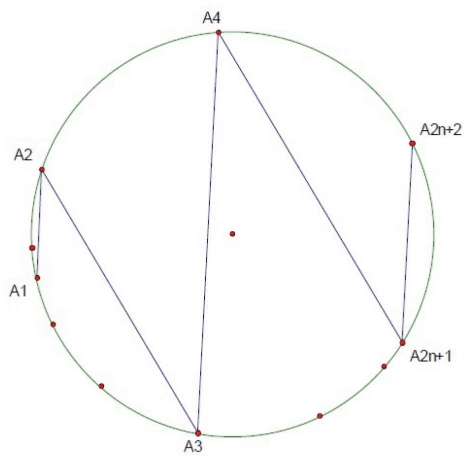
1、 當 $0 \le \theta < \dfrac{2a\pi}{2n+a}$ 時, 圓弧將被分割成 $2n+2$ 段, $\overparen{A_{2n+1}A_{2n+2}}$ 為 $\dfrac{2a\pi}{2n+a} - \theta$, $\overparen{A_kA_{k+2}}$ $(k = 1, 2, \cdots, 2n)$ 皆為 $\dfrac{2\pi}{2n+a}$(如圖十九).

2、 當 $\dfrac{2a\pi}{2n+a} \le \theta < \dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時, 圓弧將被分割成 $2n+1$ 段, $\overparen{A_{2n}A_{2n+1}}$ 為 $\dfrac{2(1+a)\pi}{2n+a} - \theta \left(\le \dfrac{2\pi}{2n+a} \right)$, $\overparen{A_kA_{k+2}}$ $(k = 1, 2, \cdots, 2n-1)$ 皆為 $\dfrac{2\pi}{2n+a}$(如圖二十).

二、 當 $m = 2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ 時,



圖二十一



圖二十二

圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{(2n+1)+a}$ $(n \in \mathbb{N})$ 時: 每一個鋸齒角度所對應到的弧角皆為 $\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$, 定義 $\widehat{A_1A_2}$ 為 θ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)$

1、 當 $0 \le \theta < \dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 圓弧將被分割成 $2n+3$ 段, $\widehat{A_{2n+2}A_{2n+3}}$ 為 $\dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a} - \theta$, $\widehat{A_kA_{k+2}}$ $(k = 1, 2, \cdots, 2n+1)$ 皆為 $\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ (如圖二十一).

2、 當 $\dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a} \le \theta < \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 圓弧將被分割成 $2n+2$ 段, $\widehat{A_{2n+1}A_{2n+2}}$ 為 $\dfrac{2(1+a)\pi}{(2n+1)+a} - \theta \left(\le \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)$, $\widehat{A_kA_{k+2}}$ $(k = 1, 2, \cdots, 2n)$ 皆為 $\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ (如圖二十二).

引理 5. *1*、 圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n+a}$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ 時, 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, $0 \le \theta < \dfrac{2\pi}{2n+a}$, 則

(1) 當 n 為奇數時, 從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 該弦組不包含靠圓心最近的弦, 當 $\theta = \dfrac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 圓心至兩組弦的最近距離相等, 當 $\dfrac{(1+a)\pi}{2n+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時, 該弦組包含靠圓心最近唯一的弦.

(2) 當 n 為偶數時, 從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 該弦組包含靠圓心最近唯一的弦, 當 $\theta = \dfrac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 圓心至兩組弦的最近距離相等, 當 $\dfrac{(1+a)\pi}{2n+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時, 該弦組不包含靠圓心最近的弦.

2、 圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{(2n+1)+a}$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ 時*:*

(1) 當 n 為奇數時, 從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 該弦組包含靠圓心最近唯一的弦, 當 $\theta = \dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 圓心至兩組弦的最近距離相等, 當 $\dfrac{a\pi}{(2n+1)+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 該弦組不包含靠圓心最近的弦.

(2) 當 n 為偶數時, 從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 該弦組不包含靠圓心最近的弦, 當 $\theta = \dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 圓心至兩組弦的最近距離相等, 當 $\dfrac{a\pi}{(2n+1)+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 該弦組包含靠圓心最近唯一的弦.

證明. 略. □

引理 6. *1*、 圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{2n+a}$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ 時, 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, $0 \le \theta < \dfrac{2\pi}{2n+a}$, 則

(1) 當 n 為奇數時, 從弓形 A_1A_2 開始輪流取區塊, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{a\pi}{2n+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群包含圓心, 當 $\theta = \dfrac{a\pi}{2n+a}$ 時, 圓心在弦 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上, 當 $\dfrac{a\pi}{2n+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群不包含圓心.

(2) 當 n 為偶數時, 從弓形 A_1A_2 的區塊輪流取區塊, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{a\pi}{2n+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的面積群不包含圓心, 當 $\theta = \dfrac{a\pi}{2n+a}$ 時, 圓心在弦 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上, 當 $\dfrac{a\pi}{2n+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群包含圓心.

2、 圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{(2n+1)+a}$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$ 時, 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, $0 \le \theta < \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$, 則

(1) 當 n 為奇數時, 從弓形 A_1A_2 開始輪流取區塊, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群包含圓心, 當 $\theta = \dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 圓心在弦 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上, 當 $\dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群不包含圓心.

(2) 當 n 為偶數時, 從弓形 A_1A_2 的區塊輪流取區塊, 則當 $0 \le \theta < \dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群不包含圓心, 當 $\theta = \dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 圓心在弦 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ 上, 當 $\dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a} < \theta \le \dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 含弓形 A_1A_2 的區塊群包含圓心.

證明. 略. □

定理 5. 圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為任意 $\dfrac{\pi}{X}$ $\left(0 < \dfrac{\pi}{X} \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 時, 靠圓心最近的弦該組弦長和與另一組弦長和的關係*:*

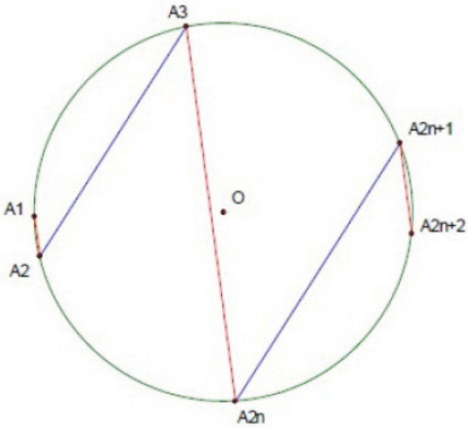
1、 當 $[X] \equiv 0, 3 \pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和*(*紅線部分*)*比另一組弦長和*(*藍線部分*)*小. *(*如圖二十三、圖二十四. *)*

2、 當 $[X] \equiv 1, 2 \pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和*(*紅線部分*)*比另一組弦長和*(*藍線部分*)*大. *(*如圖二十五、圖二十六*)*.

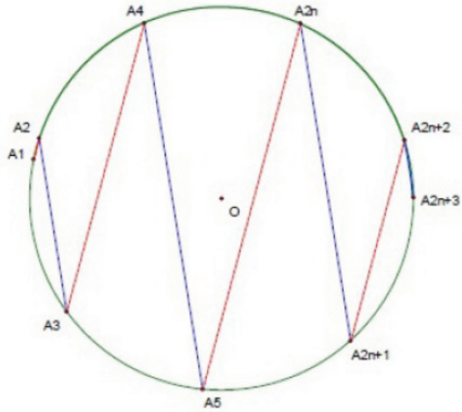
證明. 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, 則

1、 當 $[X] = 2n$, $0 \le \theta < \dfrac{2a\pi}{2n+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$
當從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

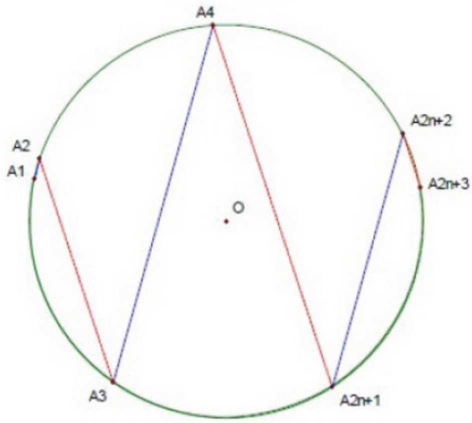
$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} + \overline{A_{2n+1}A_{2n+2}} \\
&= 2R\left\{ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2n+a} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{2n+a} + \frac{\theta}{2}\right) + \cdots + \right. \\
&\left. \sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{2n+a} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{2n+a} + \frac{\theta}{2}\right) \right\}
\end{aligned}$$



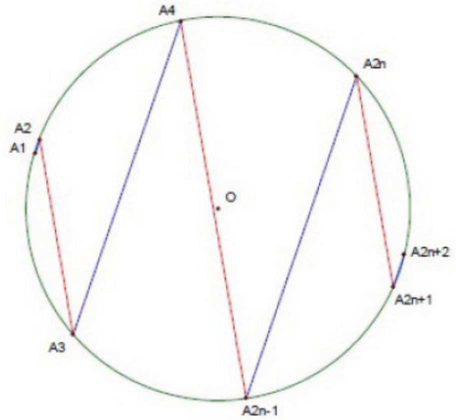
圖二十三



圖二十四



圖二十五



圖二十六

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}&\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\\&=2R\Bigg\{\sin\left(\frac{\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots+\\&\sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

兩式相減, 得

$$\begin{aligned}&\left(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right)-\Big(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}\\&+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\Big)\\&=2R\Bigg\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\\&-\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

設 $\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}=\alpha,\ \cos\frac{\pi}{2n+a}+i\sin\frac{\pi}{2n+a}=\omega$, 則

$$\begin{aligned}
&2R\left\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)-\cdots\right.\\
&\left.-\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}\\
&=2R\ \mathrm{Im}\{\alpha-\alpha\omega+\alpha\omega^2-\cdots-\alpha\omega^{2n-1}+\alpha\omega^{2n}\}\\
&=2R\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

又因 $\omega^{2n+a}=-1$, 所以

$$\begin{aligned}
2R\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right] &= 2R\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{-\omega^{1-a}+1}{\omega+1}\right)\right]\\
&= 2R\underbrace{\frac{\sin\frac{\frac{(a-1)\pi}{2}}{2n+a}}{\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2n+a}}}_{<0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\frac{a\pi}{2}}{2\pi+a}\right)}_{>0}<0
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right)-\left(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\right)<0\\
\Rightarrow&\left(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right)<\left(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\right)
\end{aligned}$$

2、 當 $[X]=2n,\ \frac{2a\pi}{2n+a}\le\theta<\frac{2\pi}{2n+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+1})$ 當從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&=2R\left\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots+\right.\\
&\qquad\left.\sin\left(\frac{(2n-4)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}\\
&=2R\left\{2\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}\right)+\right.\\
&\qquad\left.2\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n+a}\right)+\cdots\right\}\\
&=4R\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}\right)+\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n+a}\right)+\cdots\right\}
\end{aligned}$$

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\\
&=2R\Bigg\{\sin\left(\frac{\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\\
&\qquad+\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}=2R\Bigg\{2\sin\left(\frac{n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}\right)+\\
&\qquad 2\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n+a}\right)+\cdots\Bigg\}\\
&=4R\sin\left(\frac{n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}\right)+\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{2n+a}\right)+\cdots\right\}
\end{aligned}$$

(1) 當 $\frac{2a\pi}{2n+a}\le\theta<\frac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 因為 $\sin\left(\frac{n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)>\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)$ 所以

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&<\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}
\end{aligned}$$

(2) 當 $\theta=\frac{(1+a)\pi}{2n+a}$ 時, 因為 $\sin\left(\frac{n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)$ 所以

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}
\end{aligned}$$

(3) 當 $\frac{(1+a)\pi}{2n+a}\le\theta<\frac{2\pi}{2n+a}$ 時, 因為 $\sin\left(\frac{n\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)<\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n+a}+\frac{\theta}{2}\right)$ 所以

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&>\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}
\end{aligned}$$

由引理 5 代入上述結果由可得知: $[X]=2n$ 時, 由左到右輪流取弦, 若 n 為奇數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大；若 n 為偶數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小. 故 $[X]\equiv 2\pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大, $[X]\equiv 0\pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小.

3、 當 $[X]=2n+1, 0\le\theta<\frac{2a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+3})$ 當從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\\
&=2R\left\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(2n)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}\\
&=2R\left\{2\sin\left(\frac{n\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cdots\right\}\\
&=4R\sin\left(\frac{n\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cdots\right\}
\end{aligned}$$

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$
\begin{aligned}
&\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}+\overline{A_{2n+2}A_{2n+3}}\\
&=2R\left\{\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\right\}\\
&=2R\left\{2\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{(2n+1)+a}\right)+\right.\\
&\qquad\left.2\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cdots\right\}\\
&=4R\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

(1) 當 $0\le\theta<\dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 因為 $\sin\left(\dfrac{(n+1)\pi}{(2n+1)+a}+\dfrac{\theta}{2}\right)>\sin\left(\dfrac{n\pi}{(2n+1)+a}+\dfrac{\theta}{2}\right)$
所以

$$
\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&<\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}
\end{aligned}
$$

(2) 當 $\theta=\dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 因為 $\sin\left(\dfrac{(n+1)\pi}{(2n+1)+a}+\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{n\pi}{(2n+1)+a}+\dfrac{\theta}{2}\right)$
所以

$$
\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}
\end{aligned}
$$

(3) 當 $\dfrac{a\pi}{(2n+1)+a}\le\theta<\dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 因為 $\sin\left(\dfrac{(n+1)\pi}{(2n+1)+a}+\dfrac{\theta}{2}\right)<\sin\left(\dfrac{n\pi}{(2n+1)+a}+\dfrac{\theta}{2}\right)$
所以

$$
\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}\\
&>\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}
\end{aligned}
$$

4、 當 $[X]=2n+1$, $\dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}\le\theta<\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$
當從弦 $\overline{A_1A_2}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$
\begin{aligned}
&\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\\
&=2R\left\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\cdots+\right.\\
&\quad\left.\sin\left(\frac{(2n-2)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

從弦 $\overline{A_2A_3}$ 開始間隔取弦, 則弦長總和為:

$$\begin{aligned}&\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\\&=2R\Bigg\{\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\\&\cdots+\sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

兩式相減, 得

$$\begin{aligned}&\left(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right)-\Big(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}\\&+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\Big)\\&=2R\Bigg\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\\&+\cdots-\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

設 $\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}=\alpha$, $\cos\frac{\pi}{(2n+1)+a}+i\sin\frac{\pi}{(2n+1)+a}=\omega$, 則

$$\begin{aligned}&2R\Bigg\{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\\&-\cdots-\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{(2n+1)+a}+\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\\&=2R\ \mathrm{Im}\{\alpha-\alpha\omega+\alpha\omega^2-\cdots-\alpha\omega^{2n-1}+\alpha\omega^{2n}\}\\&=2R\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right]\end{aligned}$$

又因 $\omega^{(2n+1)+a}=-1$, 所以

$$\begin{aligned}2R\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right]&=2R\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{-\omega^{-a}+1}{\omega+1}\right)\right]\\&=2R\underbrace{\frac{\sin\frac{\frac{a\pi}{2}}{(2n+1)+a}}{\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{(2n+1)+a}}}_{>0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\frac{(-a-1)\pi}{2}}{(2n+1)+a}\right)}_{>0}>0\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right)-\Big(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}\\&\qquad+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\Big)>0\\&\Rightarrow\left(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}+\overline{A_{2n+1}A_{2n+2}}\right)>\Big(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}\\&\qquad+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}\Big)\end{aligned}$$

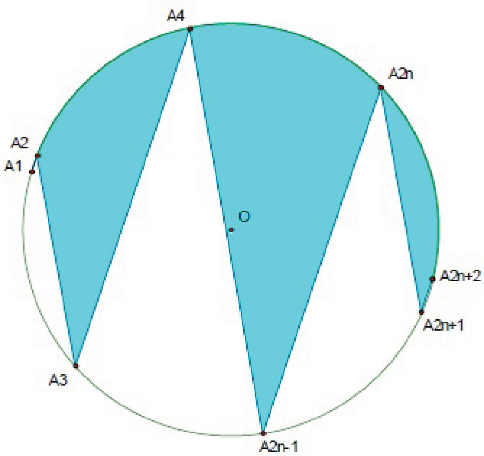
由引理 5 知: $[X]=2n+1$ 時, 由左到右輪流取弦, 若 n 為奇數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小；若 n 為偶數, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一

組弦長和大. 故 $[X] \equiv 3 \pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小, $[X] \equiv 1 \pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大.

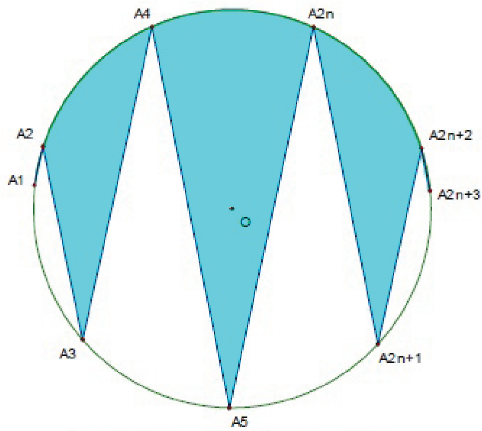
故得 $[X] \equiv 0, 3 \pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和小, $[X] \equiv 1, 2 \pmod 4$ 時, 則靠圓心最近的弦該組弦長和比另一組弦長和大. □

定理 6. 圓內接鋸齒形的鋸齒角度皆為任意 $\frac{\pi}{X}$ $\left(0 < \frac{\pi}{X} \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 時, 包含圓心部分的面積和與不包含圓心部分的面積和的關係:

1、 當 $[X] \equiv 2, 3 \pmod 4$ 時, 則包含圓心部分*(*藍色部分*)*的區塊群面積和比未包含圓心部分*(*白色部分*)*的區塊群面積和大. *(*如圖二十七、圖二十八. *)*

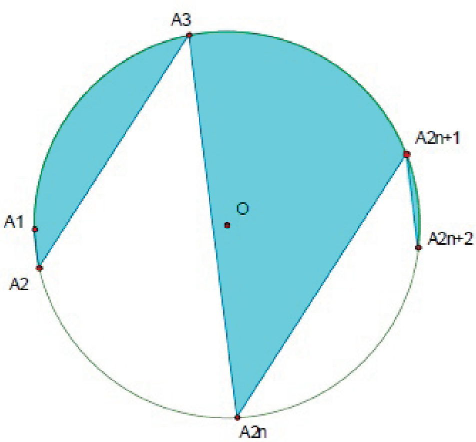


圖二十七：$[X] \equiv 2 \pmod 4$

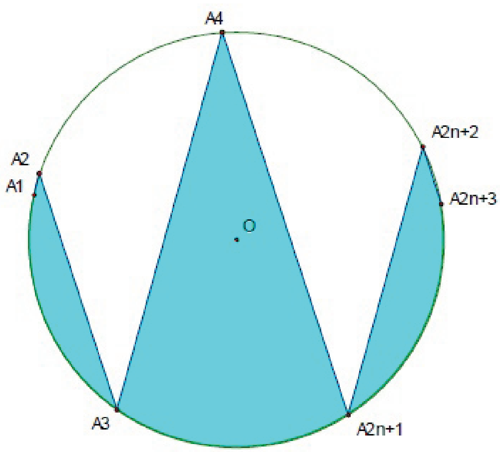


圖二十八：$[X] \equiv 3 \pmod 4$

2、 當 $[X] \equiv 01 \pmod 4$ 時, 則包含圓心部分的區塊群面積和*(*藍色部分*)*比未包含圓心部分*(*白色部分*)*的區塊群面積和小. *(*如圖二十九、圖三十. *)*



圖二十九：$[X] \equiv 0 \pmod 4$



圖三十：$[X] \equiv 1 \pmod 4$

證明. 令 $\widehat{A_1A_2} = \theta$, 則

1、 當 $[X] = 2n$, $0 \le \theta < \dfrac{2a\pi}{2n+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$
含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$
\begin{aligned}
&(\text{弓形}A_1A_2) + (A_2A_3A_4) + (A_4A_5A_6) + \cdots + (A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}) \\
&= \frac{R^2}{2}\Bigg\{ \left(\frac{2n\pi}{2n+a} + \theta\right) - \sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{2n+a}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{2n+a}\right) \\
&+ \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{2n+a}\right) - \cdots + \sin\left[\theta + \frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right] - \sin\left(\theta + \frac{4n\pi}{2n+a}\right) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

不含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3) + (A_3A_4A_5) + \cdots + (A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}) + (\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2}) \\
&= \frac{R^2}{2}\Bigg\{ \left(\frac{(2n+2a)\pi}{2n+a} - \theta\right) + \sin\theta - \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{2n+a}\right) + \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{2n+a}\right) \\
&- \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{2n+a}\right) + \cdots - \sin\left[\theta + \frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right] + \sin\left(\theta + \frac{4n\pi}{2n+a}\right) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

兩式相減, 得

$$
\begin{aligned}
&\Big[(\text{弓形}A_1A_2) + (A_2A_3A_4) + (A_4A_5A_6) + \cdots + (A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\Big] \\
&-\Big[(A_1A_2A_3) + (A_3A_4A_5) + \cdots + (A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}) + (\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})\Big] \\
&R^2\Bigg\{ \left(\theta - \frac{a\pi}{2n+a}\right) - \sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{2n+a}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{2n+a}\right) \\
&+ \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{2n+a}\right) - \cdots + \sin\left[\theta + \frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right] - \sin\left(\theta + \frac{4n\pi}{2n+a}\right) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

設 $\cos\theta + i\sin\theta = \alpha$, $\cos\dfrac{2\pi}{2n+a} + i\sin\dfrac{2\pi}{2n+a} = \omega$, 則

$$
\begin{aligned}
&R^2\Bigg\{ \left(\theta - \frac{a\pi}{2n+a}\right) - \sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{2n+a}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{2n+a}\right) \\
&+ \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{2n+a}\right) - \cdots + \sin\left[\theta + \frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right] - \sin\left(\theta + \frac{4n\pi}{2n+a}\right) \Bigg\} \\
&= R^2\left\{ \left(\theta - \frac{a\pi}{2n+a}\right) - \ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right] \right\} \\
&\overset{\omega^{2n+a}=1}{=\!=\!=\!=} R^2\left\{ \left(\theta - \frac{a\pi}{2n+a}\right) - \ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right] \right\} \\
&= R^2\left\{ \left(\theta - \frac{a\pi}{2n+a}\right) - \frac{\cos\frac{(1-a)\pi}{2n+a}}{\cos\frac{\pi}{2n+a}} \sin\left(\theta - \frac{a\pi}{2n+a}\right) \right\} \equiv f(\theta)
\end{aligned}
$$

並令 $u=\dfrac{\pi}{2n+a}$

$$\Rightarrow f(\theta)=R^2\left[(\theta-au)-\frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\sin(\theta-au)\right],\ \theta\in\left[0,\frac{2\pi}{2n+a}\right]=[0,2u]$$
$$\Rightarrow f'(\theta)=R^2\left[1-\frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\cos(\theta-au)\right]$$
$$=R^2\left\{1-\frac{\cos[\theta+(1-2a)u]+\cos[\theta-u]}{2\cos u}\right\}$$

當 $\theta\in[0,2au)$,

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad & \theta+(1-2a)u\in[(1-2a)u,u]\subset(-u,u),\\ & \theta-u\in[-u,(2a-1)u)\subset[-u,u)\\ \Rightarrow\quad & \cos[\theta+(1-2a)u]>\cos u,\cos[\theta-u]\geq\cos u\\ \Rightarrow\quad & f'(\theta)<0,\ \forall\,\theta\in[0,2au)\text{ 即 } f \text{ 在 } [0,2au) \text{ 上嚴格遞減}\end{aligned}$$

$\because f(au)=R^2(0-0)=0\ \therefore f(\theta)>0,\ \forall\,\theta\in[0,au),\ f(\theta)<0,\ \forall\,\theta\in(au,2au)$
故得

- $0\leq\theta<\dfrac{a\pi}{2n+a}$ 時,

$$\begin{aligned}&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\ >\ &(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})+(\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})\end{aligned}$$

- $\dfrac{a\pi}{2n+a}<\theta<\dfrac{2a\pi}{2n+a}$ 時,

$$\begin{aligned}&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\ <\ &(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})+(\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})\end{aligned}$$

2、 當 $[X]=2n,\ \dfrac{2a\pi}{2n+a}\leq\theta<\dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+1})$
含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$\begin{aligned}&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+\cdots+(A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n})+(\text{弓形}A_{2n}A_{2n+1})\\ =\ &\frac{R^2}{2}\left\{\left(\frac{(2n+2a)\pi}{2n+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+a}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+a}\right)\right.\\ &\left.+\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+a}\right)-\cdots+\sin\left[\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right]\right\}\end{aligned}$$

不含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$\begin{aligned}&(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})\\ =\ &\frac{R^2}{2}\left\{\left(\frac{2n\pi}{2n+a}\right)+\sin\theta-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+a}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+a}\right)\right.\\ &\left.-\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+a}\right)+\cdots-\sin\left[\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right]\right\}\end{aligned}$$

兩式相減, 得

$$\begin{aligned}
&[(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\
&+(\text{弓形}A_{2n}A_{2n+1})]-[(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})]\\
&=R^2\left\{\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+a}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+a}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+a}\right)-\cdots+\sin\left[\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right]\right\}
\end{aligned}$$

設 $\cos\theta+i\sin\theta=\alpha$, $\cos\dfrac{2\pi}{2n+a}+i\sin\dfrac{2\pi}{2n+a}=\omega$, 則

$$\begin{aligned}
&R^2\left\{\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{2n+a}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{2n+a}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{2n+a}\right)-\cdots+\sin\left[\theta+\frac{(4n-2)\pi}{2n+a}\right]\right\}\\
&=R^2\left[\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\operatorname{Im}(\alpha-\alpha\omega+\alpha\omega^2-\alpha\omega^3+\cdots-\alpha\omega^{2n-1}+\alpha\omega^{2n}-\alpha\omega^{2n})\right]\\
&=R^2\left\{\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}-\alpha\omega^{2n}\right)\right]\right\}\\
&\xlongequal{\omega^{2n+a}=1}R^2\left\{\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}-\alpha\omega^{2n}\right)\right]\right\}\\
&=R^2\left\{\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{1-a}+1}{\omega+1}-\alpha\omega^{2n}\right)\right]\right\}\text{(由 1 部分的證明可知)}\\
&=R^2\left\{\left(\frac{a\pi}{2n+a}\right)-\frac{\cos\left(\frac{(1-a)\pi}{2n+a}\right)}{\cos\frac{\pi}{2n+a}}\sin\left(\theta-\frac{a\pi}{2n+a}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{2n+a}\right)\right\}\equiv f(\theta)
\end{aligned}$$

並令 $u=\dfrac{\pi}{2n+a}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(\theta)=R^2\left[au-\frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\sin(\theta-au)+\sin(\theta-2au)\right],\theta\in[2au,2u)\\
&\big(\because 2\pi=(4n+2a)u,\therefore\sin(\theta+4nu)=\sin(\theta+2\pi-2au)=\sin(\theta-2au)\big)\\
&\Rightarrow f'(\theta)=R^2\left[-\frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\cos(\theta-au)+\cos(\theta-2au)\right]\\
&\quad f''(\theta)=R^2\left[-\frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\sin(\theta-au)-\sin(\theta-2au)\right]\\
&\qquad >R^2\left[\sin(\theta-au)-\sin(\theta-2au)\right]\ (\because\cos(1-a)u>\cos u>0)\\
&\qquad >0\ \left(\because 0\le\theta-2au<\theta-au<\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\therefore f(\theta)$ 在 $[2au,2u)$ 上凹口向上

又 $f(2au)=R^2\left[au-\dfrac{\cos(1-a)u}{\cos u}\sin au\right]$

$$=R^2\left[au-\frac{\sin u+\sin(2a-1)u}{2\cos u}\right]\equiv g(a),\ a\in(0,1)$$

$$\Rightarrow g'(a) = R^2\left[u - \frac{\cancel{2}u\cos(2a-1)u}{\cancel{2}\cos u}\right] = uR^2\left[1 - \frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\right] < 0,\ \forall a \in (0,1)$$

$\therefore g(a)$ 在 $(0,1)$ 上嚴格遞減

又

$$g(0) = R^2\left[0 - \frac{\sin u + \sin(-u)}{2\cos u}\right] = 0 \Rightarrow g(a) < 0, \forall\ a \in (0,1)$$

$\therefore f(2au) < 0,\ \forall a \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(2u) &= R^2\left[au - \frac{\cos(1-a)u}{\cos u}\sin(2-a)u + \sin(2-2a)u\right] \\ &= R^2\left[au - \frac{\sin(3-2a)u + \sin u}{2\cos u} + \sin(2-2a)u\right] \equiv h(a),\ a \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(a) &= R^2\left[u + \frac{\cancel{2}u\cos(3-2a)u}{\cancel{2}\cos u} - 2u\cos(2-2a)u\right] \\ &= uR^2\left[1 + \frac{\cos(3-2a)u - 2\cos(2-2a)u\cos u}{\cos u}\right] \\ &= uR^2\left[1 + \frac{\cos(3-2a)u - \cos(3-2a)u - \cos(1-2a)u}{\cos u}\right] \\ &= uR^2\left[1 - \frac{\cos(1-2a)u}{\cos u}\right] < 0\ (\because \cos(1-2a)u > \cos u > 0) \end{aligned}$$

$\therefore h(a)$ 在 $(0,1)$ 上嚴格遞減

又

$$h(0) = R^2\left[-\frac{\sin 3u + \sin u}{2\cos u} + \sin 2u\right] = R^2\left[-\frac{\cancel{2}\sin 2u\cancel{\cos u}}{\cancel{2\cos u}} + \sin 2u\right] = 0$$

$\therefore h(a) < 0, \forall\ a \in (0,1) \Rightarrow f(2u) < 0$

$\because f(2au) < 0, f(2u) < 0$ 且 $f(\theta)$ 在 $[2au, 2u)$ 上凹口向上

$\therefore f(\theta) < 0, \forall\ \theta \in [2au, 2u)$

由此可推得: 當 $[X] = 2n,\ \dfrac{2a\pi}{2n+a} < \theta < \dfrac{2\pi}{2n+a}$ 時

$$\begin{aligned} &(\text{弓形}A_1A_2) + (A_2A_3A_4) + (A_4A_5A_6) + \cdots + (A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}) + (\text{弓形}A_{2n}A_{2n+1}) \\ &\qquad < (A_1A_2A_3) + (A_3A_4A_5) + \cdots + (A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}) \end{aligned}$$

由引理 6知:
當 n 是奇數時, 即 $[X] \equiv 2 \pmod 4$ 時, 包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積和大；
當 n 是偶數時, 即 $[X] \equiv 0 \pmod 4$ 時, 包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積和小.

3、 當 $[X] = 2n{+}1,\ 0 \le \theta < \dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+3})$
含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$\begin{aligned} &(\text{弓形}A_1A_2) + (A_2A_3A_4) + (A_4A_5A_6) + \cdots + (A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}) + (\text{弓形}A_{2n+2}A_{2n+3}) \\ &= \frac{R^2}{2}\Bigg\{\left(\frac{(2n+2a)\pi}{(2n+1)+a}\right) - \sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{(2n+1)+a}\right) \\ &\qquad + \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{(2n+1)+a}\right) - \cdots + \sin\left[\theta + \frac{(4n+2)\pi}{(2n+1)+a}\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

不含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n+1}A_{2n+2}A_{2n+3})\\
&=\frac{R^2}{2}\Bigg\{\left(\frac{(2n+2a)\pi}{(2n+1)+a}\right)+\sin\theta-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)+\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad-\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{(2n+1)+a}\right)+\cdots-\sin\left[\theta+\frac{(4n+2)\pi}{(2n+1)+a}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

兩式相減, 得

$$
\begin{aligned}
&[(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\
&+(\text{弓形}A_{2n+2}A_{2n+3})]-[(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n+1}A_{2n+2}A_{2n+3})]\\
&=R^2\Bigg\{\left(\frac{(a-1)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad+\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{(2n+1)+a}\right)-\cdots+\sin\left[\theta+\frac{(4n+2)\pi}{(2n+1)+a}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

設 $\cos\theta+i\sin\theta=\alpha$, $\cos\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}+i\sin\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}=\omega$, 則

$$
\begin{aligned}
&R^2\Bigg\{\left(\frac{(a-1)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad+\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{(2n+1)+a}\right)-\cdots+\sin\left[\theta+\frac{(4n+2)\pi}{(2n+1)+a}\right]\Bigg\}\\
&=R^2\Bigg[\left(\frac{(a-1)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\\
&\qquad\operatorname{Im}(\alpha-\alpha\omega+\alpha\omega^2-\alpha\omega^3+\cdots-\alpha\omega^{2n-1}+\alpha\omega^{2n}-\alpha\omega^{2n+1})\Bigg]\\
&=R^2\Bigg\{\left(\frac{(a-1)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\ \operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}-\alpha\omega^{2n+1}\right)\right]\Bigg\}\\
&\overset{\omega^{(2n+1)+a}=1}{=\!=\!=\!=\!=}R^2\Bigg\{\left(\frac{(a-1)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\ \operatorname{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}-\alpha\omega^{2n+1}\right)\right]\Bigg\}\\
&=R^2\Bigg\{\left(\frac{(a-1)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\\
&\qquad\frac{\cos\frac{a\pi}{(2n+1)+a}}{\cos\frac{\pi}{(2n+1)+a}}\sin\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)+\sin\left(\theta+\frac{-2a\pi}{(2n+1)+a}\right)\Bigg\}\equiv f(\theta)
\end{aligned}
$$

並令 $u=\dfrac{\pi}{(2n+1)+a}$

$$\Rightarrow f(\theta)=R^2\left[(a-1)u-\frac{\cos au}{\cos u}\sin(\theta+(-1-a)u)+\sin(\theta-2au)\right],\theta\in[0,2au)$$

$$\Rightarrow f'(\theta)=R^2\left[-\frac{\cos au}{\cos u}\cos(\theta+(-1-a)u)+\cos(\theta-2au)\right]$$

$$f''(\theta)=R^2\left\{\frac{\cos au}{\cos u}\sin[\theta+(-1-a)u]-\sin(\theta-2au)\right\}$$

$$<R^2\left\{\sin[\theta+(-1-a)u]-\sin(\theta-2au)\right\}$$

$$\left(\because \cos au>\cos u>0 \text{ 且 } \sin[\theta+(-1-a)u]<0\right)$$

$$<0\ \left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta+(-1-a)u<\theta-2au<0\right)$$

$\therefore f(\theta)$ 在 $[0,2au)$ 上凹口向下

又 $f(0)=R^2\left\{(a-1)u+\dfrac{\cos au\sin(a+1)u}{\cos u}-\sin 2au\right\}$

$$=R^2\left\{(a-1)u+\frac{\sin(2a+1)u+\sin u}{2\cos u}-\sin 2au\right\}\equiv g(a),\ a\in(0,1)$$

$$\Rightarrow g'(a)=R^2\left\{u+\frac{\not{2}u\cos(2a+1)u}{\not{2}\cos u}-2u\cos 2au\right\}$$

$$=uR^2\left[1+\frac{\cos(2a+1)u-2u\cos 2au\cos u}{\cos u}\right]$$

$$=uR^2\left[1+\frac{\cos(2a+1)u-\cos(2a+1)u-\cos(2a-1)u}{\cos u}\right]$$

$$=uR^2\left[1-\frac{\cos(2a-1)u}{\cos u}\right]<0\ (\because \cos(2a-1)u>\cos u>0)$$

$\therefore g(a)$ 在 $(0,1)$ 上嚴格遞減

又

$$g(1)=R^2\left[0+\frac{\cos u\sin 2u}{\cos u}-\sin 2u\right]=0\Rightarrow g(a)<0\forall\ a\in(0,1)$$

$\therefore f(0)=g(a)>0$

$f(2au)=R^2\left[(a-1)u-\dfrac{\cos au}{\cos u}\sin(a-1)u+0\right]$

$$=R^2\left[(a-1)u-\frac{\sin(2a-1)u-\sin u}{2\cos u}\right]\equiv h(a),\ a\in(0,1)$$

$$\Rightarrow h'(a)=R^2\left[u+\frac{\not{2}u\cos(2a-1)u}{\not{2}\cos u}\right]=uR^2\left[1-\frac{\cos(2a-1)u}{\cos u}\right]<0$$

$(\because \cos(2a-1)u>\cos u>0)$

$\therefore h(a)$ 在 $(0,1)$ 上嚴格遞減

又 $h(1)=R^2[0-0]=0,\ \therefore h(a)>0,\ \forall\ a\in(0,1)\Rightarrow f(2au)>0$

$\because f(0)>0,\ f(2au)>0$ 且 $f(\theta)$ 在 $[0,2au)$ 上凹口向下

$\therefore f(\theta)>0,\ \forall\ \theta\in[0,2au)$

由此可推得: 當 $[X]=2n+1,\ 0<\theta<\dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}$ 時

$$(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})+(\text{弓形}A_{2n+2}A_{2n+3})$$
$$>(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n+1}A_{2n+2}A_{2n+3})$$

4、 當 $[X]=2n+1,\ \dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}\le\theta<\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時, 設此時圓內接鋸齒形為 $Z(A_1A_2\cdots A_{2n+2})$

含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$
\begin{aligned}
&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\
&=\frac{R^2}{2}\Bigg\{\left(\theta+\frac{2n\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad\qquad -\cdots-\sin\left[\theta+\frac{(4n)\pi}{(2n+1)+a}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

不含弓形 A_1A_2 的區塊群面積和為

$$
\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})\\
&=\frac{R^2}{2}\Bigg\{\left(-\theta+\frac{(2n+2+2a)\pi}{(2n+1)+a}\right)+\sin\theta-\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad\qquad +\cdots+\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{(2n+1)+a}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

兩式相減, 得

$$
\begin{aligned}
&[(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})]\\
&-[(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})]\\
&=R^2\Bigg\{\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad\qquad -\cdots-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{(2n+1)+a}\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

設 $\cos\theta+i\sin\theta=\alpha$, $\cos\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}+i\sin\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}=\omega$, 則

$$
\begin{aligned}
&R^2\Bigg\{\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{(2n+1)+a}\right)\\
&\qquad -\cdots-\sin\left(\theta+\frac{4n\pi}{(2n+1)+a}\right)\Bigg\}\\
&=R^2\left[\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\ \mathrm{Im}(\alpha-\alpha\omega+\alpha\omega^2-\alpha\omega^3+\cdots-\alpha\omega^{2n-1}+\alpha\omega^{2n})\right]\\
&=R^2\left\{\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right]\right\}\\
&\overset{\omega^{(2n+1)+a}=1}{=\!=\!=\!=\!=} R^2\left\{\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{2n+1}+1}{\omega+1}\right)\right]\right\}\\
&=R^2\left\{\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\ \mathrm{Im}\left[\alpha\left(\frac{\omega^{-a}+1}{\omega+1}\right)\right]\right\}(\text{由 3 部分的證明可知})\\
&=R^2\left\{\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)-\frac{\cos\frac{a\pi}{(2n+1)+a}}{\cos\frac{\pi}{(2n+1)+a}}\sin\left(\theta+\frac{(-1-a)\pi}{(2n+1)+a}\right)\right\}\equiv f(\theta)
\end{aligned}
$$

並令 $u=\dfrac{\pi}{(2n+1)+a}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(\theta)=R^2\left\{\theta+(-1-a)u-\frac{\cos au}{\cos u}\sin(\theta+(-1-a)u)\right\},\theta\in[2au,2u]\\&\Rightarrow f'(\theta)=R^2\left\{1-\frac{\cos au}{\cos u}\cos(\theta+(-1-a)u)\right\}\\&\qquad\qquad=R^2\left\{1-\frac{\cos[\theta-u]+\cos[\theta+(-1-a)u]}{2\cos u}\right\}\end{aligned}$$

當 $\theta\in[2au,2u)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \theta-u\in[(2a-1)u,u]\subset(-u,u),\\&\quad\ \theta+(-1-a)u\in[(a-1)u,(1-a)u)\subset(-u,u)\\&\Rightarrow \cos[\theta-u]>\cos u>0,\cos[\theta+(-1-a)u]\geq\cos u>0\\&\Rightarrow f'(\theta)<0,\forall\,\theta\in[2au,2u),\text{ 即 } f \text{ 在 } [2au,2u) \text{ 上嚴格遞減}\end{aligned}$$

$\because f((1+a)u)=R^2(0-0)=0$
$\therefore f(\theta)>0,\ \forall\,\theta\in[2au,(1+a)u),\ f(\theta)<0,\ \forall\,\theta\in((1+a)u,2au)$
由此可推得:
當 $\dfrac{2a\pi}{(2n+1)+a}\leq\theta<\dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a}$ 時,

$$\begin{aligned}&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\>&(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})+(\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})\end{aligned}$$

當 $\dfrac{(1+a)\pi}{(2n+1)+a}<\theta<\dfrac{2\pi}{(2n+1)+a}$ 時,

$$\begin{aligned}&(\text{弓形}A_1A_2)+(A_2A_3A_4)+(A_4A_5A_6)+\cdots+(A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2})\\<&(A_1A_2A_3)+(A_3A_4A_5)+\cdots+(A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1})+(\text{弓形}A_{2n+1}A_{2n+2})\end{aligned}$$

由引理 6 知:
當 n 是奇數時, 即 $[X]\equiv 3 \pmod 4$ 時, 包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積和大；
當 n 是偶數時, 即 $[X]\equiv 1 \pmod 4$ 時, 包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積和小.

故得

1、 當 $[X]\equiv 2,3 \pmod 4$ 時, 則包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積大.

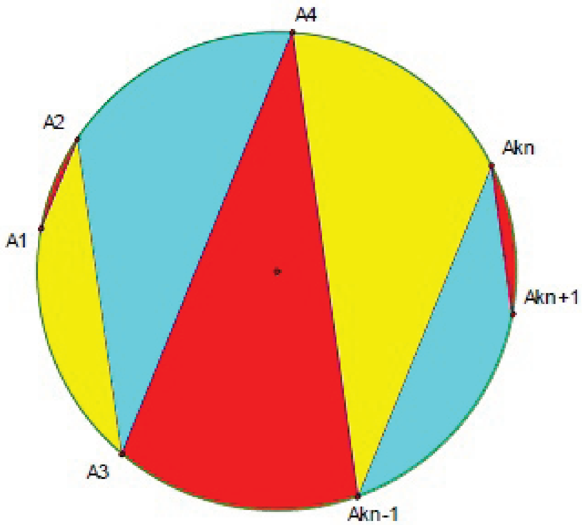
2、 當 $[X]\equiv 0,1 \pmod 4$ 時, 則包含圓心部分的區塊群面積和比未包含圓心部分的區塊群面積小.

□

定理 7. 若圓內接鋸齒形 $Z(A_1A_2\cdots A_{kn+1})$ 的鋸齒角度皆為 $\dfrac{\pi}{kn}$ $(n,k\in\mathbb{N},n,k\geq 2)$ 時, 則分 k 組由左至右依序輪流取區塊群, 此 k 組區塊群面積和皆相等.

證明. 令 $\widehat{A_1A_2}=\theta,\ 0\leq\theta<\dfrac{2\pi}{kn}$, 則設

$$\cos\theta+i\sin\theta=\alpha,\cos\frac{2\pi}{kn}+i\sin\frac{2\pi}{kn}=\omega$$



由最左邊開始每隔 k 個輪番取區塊, 得:

$$
\begin{aligned}
&(\text{弓形}A_1A_2) + (A_kA_{k+1}A_{k+2}) + \cdots + (A_{(n-1)k}A_{(n-1)k+1}A_{(n-1)k+2}) + (\text{弓形}A_{nk}A_{nk+1}) \\
&= \frac{R^2}{2}\left\{\frac{2\pi}{k} - \sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{(k-1)(2\pi)}{kn}\right) - \sin\left(\theta + \frac{k(2\pi)}{kn}\right) + \cdots\right. \\
&\qquad + \sin\left(\theta + \frac{[(n-1)k-1](2\pi)}{kn}\right) - \sin\left(\theta + \frac{(n-1)k(2\pi)}{kn}\right) \\
&\qquad \left. - \sin\frac{2\pi-\theta}{kn}\left(= \sin\frac{\theta + (2kn-2)\pi}{kn}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi R^2}{k}
\end{aligned}
$$

其向右 m $(m \in \mathbb{N}, m < k)$ 塊的區塊組面積為各為:

$$
\begin{aligned}
&(A_mA_{m+1}A_{m+2}) + (A_{k+m}A_{k+m+1}A_{k+m+2}) + \cdots + (A_{(n-1)k+m}A_{(n-1)k+m+1}A_{(n-1)k+m+2}) \\
&= \frac{R^2}{2}\left\{\frac{2\pi}{k} + \sin\left(\theta + \frac{(m-1)(2\pi)}{kn}\right) - \sin\left(\theta + \frac{m(2\pi)}{kn}\right)\right. \\
&+ \sin\left(\theta + \frac{(k+m-1)(2\pi)}{kn}\right) - \sin\left(\theta + \frac{(k+m)(2\pi)}{kn}\right) + \cdots \\
&\left. + \sin\left(\theta + \frac{[(n-1)k+m-1](2\pi)}{kn}\right) - \sin\left(\theta + \frac{[(n-1)k+m](2\pi)}{kn}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi R^2}{k}
\end{aligned}
$$

故此 k 組區塊群面積和皆相等. □

參考文獻

[1] Mad Maths 網站(網址: http://mathafou.free.fr/pbg_en/sol128.html)