投票問題的其餘延伸

李昱陞

私立普台高級中學

Abstract

The original ballot problem discussed by Bertrand, Andre, Barbier, and others merely concerns about the two-candidate case. In the research, I add the factor "reverse", which refers to the situation that the two candidates alternately change the lead, and observe the changing on the number of the paths. Also I generalize the problem to the three-candidate condition. In the second part, I discuss the ballot problem with another point of view, the case that the differences between the votes of the court are limited in a certain range. I introduce a transformation of Pascal triangle to solve the problem. When concentrating on the number of the paths to a specific difference, the problem can be solved with providing a one to one bijection to its limits. In the last part I give a new question, which asks what the problem would become as more than one votes are counted at once. With the approach of a generalized function, we can get a recursive formula. On the other side, when trying to solve the problem with mirroring, its variation on votes becomes a obstacle in discussing where is the place to make a mirroring.

摘要: 在 Bertrand 原本提出的投票問題以及後來 Andre, Barbier 等人的討論中, 僅討論兩人競選時開票的一路領先情形. 在證明的部分使用了遞迴方法以及組合學, 並且使用了 Catalan number 作為一般解. 本文中對於一路領先的問題, 則增加了翻盤的要素, 也就是兩人各自交替著一路領先的情形, 觀察總路徑數增加的方式, 並且將問題試著推廣到三人競選的情形. 第二部分則以另一種觀點討論投票問題: 開票的過程中票數差恆在一定值內的總票數情形, 在研究和觀察上引入了 Pascal triangle 以及立體 Pascal triangle 來討論兩人和三人競選時的開票分布, 證明上在參考了 random walk 中對於路徑機率的討論後, 使用了鏡射的路徑一一對應, 提供在任一總票數的任一票數差距的可能路徑數. 推廣到三人後一樣試著用鏡射處理, 但由於對三個向限的自由度了解不夠徹底, 尚無法做出對任意點的完整討論. 在暫時無法得出結論的部分, 先寫出基本遞迴式. 最後討論多票箱問題, 以探討一次進票附帶多種可能票數的情形. 除了生成函數的方法外, 亦試著使用一一對應的方式處理, 但此問題則又關係到多項式整數解, 目前還停留在討論的階段.

1 簡介

1.1 動機及原始問題

在參加九九文教基金會所舉辦的暑期夏令營時, 學習到了和排列組合及 Catalan number 等特殊數列相關的課程. 當時教授講解了一路領先引領我們去認識 Catalan number, 但是我當時對教授所使用的變換方法一直百思不得其解, 後來才從書上找到解答. 之後又和老師聊到了這個話題, 得知了和一路領先有關的問題還有很多變形, 才又提起了我的興趣, 嘗試用不同的方法去看一路領先問題.

1.2 研究成果

1. 對於二人的一路領先翻盤問題, 我歸納出了對於任意的翻盤數及總票數, 可能的翻盤總路徑數, 可以用簡單的數學式表達, 令 $T(p,m)$ 表示所求的總路徑數, p 表示翻盤數, m 表示總票數, 可得到:

$$\begin{aligned} 2 \mid m, \quad T(p,m) &= C_1^{p+1}C_m - C_3^{p+2}C_{m+1} + C_5^{p+3}C_{m+2} - \cdots + C_{2p+1}^{2p+1}C_{m+p}, \\ 2 \nmid m, \quad T(p,m) &= -C_1^{p+1}C_m + C_3^{p+2}C_{m+1} - C_5^{p+3}C_{m+2} + \cdots + C_{2p+1}^{2p+1}C_{m+p}. \end{aligned}$$

對於三人的一路領先翻盤問題, 並沒有找出合適的化簡式, 目前只能透過電腦程式針對不同的情形寫出較繁雜的計算式算出所求總路徑數, 且翻盤形式的定義仍在最簡單的形式.

2. 兩人的模糊化問題, 在對於路徑發展方向做出限制後, 發現了奇特的 Pascal triangle 的內外摺疊, 並且依照其規律導出了計算式. (h,m) 表示在雙方票數差在 h 票內, 總票數為 m 的情形下的總路徑數:

對 $2 \nmid h$ 且 $2 \nmid m$:

$$(h,m) = 2(\sum_{s=0}^{\frac{k-1}{2}} C^m_{\frac{m-1}{2}-s} + \sum_{t=0}^{\frac{m-k-2}{2}} (-1)^{\{\frac{t}{h+1}+1\}} C^m_{\frac{m-h-2}{2}-t})).$$

其餘的組合則見文中 而在參考了其他文獻後, 試著使用鏡射後的路徑一一對應方法, 找出了對任意總票數下任一票數差距的路徑總數:

$$N_m^{(\neq \pm h)}(0,b) = \left\langle \begin{matrix} m \\ \frac{m+b}{2} \end{matrix} \right\rangle + \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \left\langle \begin{matrix} m \\ \frac{m-b}{2} + kh \end{matrix} \right\rangle + \sum_{m=1}^{t} (-1)^k \left\langle \begin{matrix} m \\ \frac{m-b}{2} - kh \end{matrix} \right\rangle.$$

只要將可能的票數差距通通寫出相加後, 便可以得到最原先的公式.

2 研究內容

2.1 翻盤問題

將開票次序以差距圖表示, 若在開票過程中, 開票次序折線通過橫軸則稱為翻盤. 簡單來

說, 當出現候選人 A 一開始領先, 而中途票數被候選人 B 追過, 且在此之後候選人 B 票數持續領先的情形, 就稱為翻盤. 為了方便, 我從 A 和 B 最後票數相同的情況開始討論, 而在實際情形中, 票數不同的情形, 只需在最後乘上多出票數的一路領先方法數即可解決.

翻盤時 A 所得票數稱為 A_c, B 所得票數稱為 B_c, 結束時 A 所得票數稱為 A_f, B 所得票數稱為 B_f. 在翻盤前後中, A 及 B 所得的票數都相同, 代表 $A_c = B_c$ 且 $A_f = B_f$. 因此兩個部份的排列數都可以用 Catalan number 來表示, 在此翻前的路徑數以 C_T 表示, $T = A_c = B_c$, 而翻後的路徑數以 C_t 表示, $t = (A_f - A_c) = (B_f - B_c)$. 所以翻盤的路徑數就是 $C_T \times C_t$, 令 $(T + t) = m$. 總票數為 $2m$.

m	總排列數
2	C_1C_1
3	$C_1C_2 + C_2C_1$
4	$C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1$
5	$C_1C_4 + C_2C_3 + C_3C_2 + C_4C_1$

由於 Catalan number 的遞迴式

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i},$$

因此對於每一個 m, 總排列數可表示為

$$C_{m+1} - 2C_m,$$

所以設

$$D_m = \sum_{i=1}^{m-1} C_i C_{m-i} = c_{m+1} - 2C_m$$

做為翻盤的總排列數.

之後推廣到多次翻盤, 即多次通過橫軸. 多次翻盤指開票折線多次經過橫軸, p 次翻盤便代表折線圖在中途 (不算原點和終點) 經過橫軸 p 次. 所以可將開票過程分為 $p+1$ 段, 討論時同樣令 A 和 B 最終票數相同, 因此排列數

$$\sum (C_{a_1} \times C_{a_2} \times C_{a_2} \times \cdots \times C_{a_p} \times C_{a_{p+1}}), \left(\sum_{i=1}^{p+1} a_i \right) = m \geq (p+1).$$

首先重新訂定一系列符號來表示翻盤總排列函數. 新的函數符號中將 X_m^k 定義為 k 次翻盤, 總票數 $2m$ 時的總排列數. 所以將之前所定義的函數用新符號表示就是:

$$D_m = X_m^1, \quad m \geq 2.$$

先從 $p = 2$ 開始討論:

m	總排列數
3	$C_1C_1C_1$
4	$C_1C_1C_1+C_1C_2C_1+C_2C_1C_1$
5	$C_1C_1C_3+C_1C_2C_2+C_2C_2C_1+C_3C_1C_1+C_1C_3C_1$

表面上來看, Catalan number 並沒有對應三次相乘的公式, 但觀察上面的排列, 在加上之前所定義的 D_m, 試著將一長串的 C 給分組. 例如 $m=4$ 時:

$$C_1C_1C_2+C_1C_2C_1+C_2C_1C_1=C_1(C_1C_2+C_2C_1)+C_2(C_1C_1),$$

其中括號中的項目正好可以用 X_m^1 來表示, 因此可得出 $C_1X_3^1+C_2X_2^1$. 回頭看 $m=3$ 時的情形:

$$C_1C_1C_1=C_1(C_1C_1)=C_1X_3^1.$$

而 $m=5$ 時:

$$\begin{aligned}&C_1C_1C_3+C_1C_2C_2+C_2C_1C_2+C_2C_2C_1+C_3C_1C_1+C_1C_3C_1\\&=C_1(C_1C_3+C_2C_2+C_3C_1)+C_2(C_1C_2+C_2C_1)+C_3(C_1C_1)\\&=C_1X_4^1+C_2X_3^1+C_3X_2^1,\end{aligned}$$

所以推論對於 2 次翻盤總排列數, 可寫為

$$X_m^2=\sum_{i=1}^{m-2}C_iX_{m-i}^1.$$

解釋如下: 將一連串的 $C_aC_bC_c$ 列出之後, 將 C_a 提出再做整理, 可得

$$C_1(\cdots)+C_2(\cdots)+\cdots+C_{N-3}(\cdots)+C_{m-2}(C_1C_1),$$

括號中為兩個 C 相乘, 因此提出的數最大到 C_{m-2}. 此時對於每個提出的 C_x 而言, 括號內為 1 次翻盤時的 $\sum(C_T\times C_t)$ 情形, 其中

$$(T+t)=m-x,$$

所以括號內的總合等於 X_{m-x}^1, 而總排列數即為

$$C_1X_{m-1}^1+C_2X_{m-2}^1+\cdots+C_{m-3}X_3^1+C_{m-2}X_2^1=\sum_{i=1}^{m-2}C_iX_{m-i}^1.$$

以此類推, 3 次翻盤的總排列數可定義為

$$X_m^3=\sum_{i=1}^{m-3}C_iX_{m-i}^2,$$

此時 i 的上界定為 $m-3$, 因一連串的 C 相乘四次的 $C_aC_bC_cC_d$ 將 C_a 提出後仿上整理, 這時括號內的 $(C_bC_cC_d)$, $b+c+d \geq 3$, 所以 a 最大值為 $m-3$. 將我們定義的排列數函數 X_m^1, X_m^2, X_m^3 列出:

$$\begin{aligned}
X_m^1 &= C_{m+1} - 2C_m, \qquad m \geq 2,\\
X_m^2 &= C_1X_{m-1}^1 + C_2X_{m-2}^1\\
&= C_1(C_m - 2C_{m-1}) + C_2(C_{m-1} - 2C_{m-2})\\
&\quad + \cdots + C_{m-3}(C_4 - 2C_3) + C_{m-2}(C_3 - 2C_2)\\
&= (C_1C_m + C_2C_{m-1} + \cdots + C_{m-3}C_4 + C_{m-2}C_3)\\
&\quad - 2(C_1C_{m-1} + C_2C_{m-2} + \cdots + C_{m-3}C_3 + C_{m-2}C_2)\\
&= (C_{m+2} - 2C_0C_{m+1} - C_{m-1}C_2 - C_mC_1) - 2(C_{m+1} - 2C_0C_m - C_{m-1}C_1)\\
&= C_{m+2} - 4C_{m+1} + 3C_m\\
&= (C_{m+2} - 2C_{m+1}) - 2(C_{m+1} - 2C_m) - C_m\\
&= X_{m+1}^1 - 2X_m^1 - C_m, \qquad m \geq 3,\\
X_m^3 &= C_1X_{m-1}^2 + C_2X_{m-2}^2 + \cdots + C_{m-3}X_4^2 + C_{m-3}X_3^2\\
&= C_1(X_m^1 - 2X_{m-1}^1 - C_{m-1}) + C_2(X_{m-1}^1 - 2X_{m-2}^1 - C_{m-2})\\
&\quad + \cdots + C_{m-3}(X_5^1 - 2X_4^1 - C_4) + C_{m-3}(X_4^1 - 2X_3^1 - C_3)\\
&= (C_1X_m^1 + C_2X_{m-1}^1 + \cdots + C_{m-3}X_5^1 + C_{m-3}X_4^1)\\
&\quad - 2(C_1X_{m-1}^1 + C_2X_{m-2}^1 + \cdots + C_{m-3}X_4^1 + C_{m-3}X_3^1)\\
&\qquad - (C_1C_{m-1} + C_2C_{m-2} + \cdots + C_{m-3}C_4 + C_{m-3}C_3)\\
&= (X_{m+1}^2 - C_{m-2}X_3^1 - C_{m-1}X_2^1) - 2(X_m^2 - C_{m-2}X_2^1)\\
&\quad - (X_m^1 - C_{m-2}C_2 - C_{m-1}C_1)\\
&= X_{m+1}^2 - 2X_m^2 - X_m^1, \qquad m \geq 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_m^4 &= C_1X_{m-1}^3 + C_2X_{m-2}^3 + \cdots + C_{m-5}X_5^3 + C_{m-3}X_4^3\\
&= C_1(X_m^2 - 2X_{m-1}^2 - X_{m-1}^1) + C_2(X_{m-1}^2 - 2X_{m-2}^2 - X_{m-2}^1)\\
&\quad + \cdots + C_{m-5}(X_6^2 - 2X_5^2 - X_5^1) + C_{m-3}(X_5^2 - 2X_4^2 - X_4^1)\\
&= (C_1X_m^2 + C_2X_{m-1}^2 + \cdots + C_{m-5}X_6^2 + C_{m-3}X_5^2)\\
&\quad - 2(C_1X_{m-1}^2 + C_2X_{m-2}^2 + \cdots + C_{m-5}X_5^2 + C_{m-3}X_4^2)\\
&\qquad - (C_1X_{m-1}^1 + C_2X_{m-2}^1 + \cdots + C_{m-5}X_5^1 + C_{m-3}X_4^1)\\
&= (X_{m+1}^3 - C_{m-3}X_4^2 - C_{m-2}X_3^2) - 2(X_m^3 - C_{m-3}X_3^2)\\
&\quad - (X_m^2 - C_{m-3}X_3^1 - C_{m-2}X_2^1)\\
&= (X_{m+1}^3 - 2X_m^3 - X_m^2) - C_{m-3}(X_4^2 - 2X_3^2 - X_3^1) - C_{m-2}(X_3^2 - X_2^1)\\
&= X_{m+1}^3 - 2X_m^3 - X_m^2 = C_{m+4} - 8C_{m+3} + 21C_{m+2} - 20C_{m+1} + 5C_m\\
&= X_{m+1}^3 - 2X_m^3 - X_m^2, \qquad m \geq 5.
\end{aligned}$$

觀察不同翻盤次數的總排列數生成規則間的相關, 在將 X_m^1, X_m^2, X_m^3 的生成規則列出後, 發現了當 p 次翻盤總排列數的函數以 $p-1$ 次翻盤函數和 $p-2$ 次翻盤表示時, 彼此的係數是相同的. 所以猜測對於任意次的翻盤總排列數函數都有 $(1,-2,-1)$ 的關係, 然後試著用數學歸納法來證明.

$$X_m^p = X_{m+1}^{p-1} - 2X_m^{p-1} - X_m^{p-2}.$$

證明. 已知 $p=1,2,3$ 時皆成立, 設 $p=t$ 時成立, 即

$$X_m^t = X_{m+1}^{t-1} - 2X_m^{t-1} - X_m^{t-2},$$

則:

$$\begin{aligned}
X_m^{t+1} &= C_1X_{m-1}^t + C_2X_{m-2}^t + \cdots + C_{m-t-2}X_{t+2}^t + C_{m-t-1}X_{t+1}^t \\
&= C_1(X_m^{t-1} - 2X_{m-1}^{t-1} - X_{m-1}^{t-2}) + C_2(X_{m-1}^{t-1} - 2X_{m-2}^{t-1} - X_{m-2}^{t-2}) \\
&\quad + \cdots + C_{m-t-2}(X_{t+3}^{t-1} - 2X_{t+2}^{t-1} - X_{t+2}^{t-2}) + C_{m-t-1}(X_{t+2}^{t-1} - 2X_{t+1}^{t-1} - X_{t+1}^{t-2}) \\
&= (C_1X_m^{t-1} + C_2X_{m-1}^{t-1} + \cdots + C_{m-t-2}X_{t+3}^{t-1} + C_{m-t-1}X_{t+2}^{t-1}) \\
&\quad - 2(C_1X_{m-1}^{t-1} + \cdots + C_{m-t-2}X_{t+2}^{t-1} + C_{m-t-1}X_{t+1}^{t-1}) \\
&\qquad - (C_1X_{m-1}^{t-2} + C_2X_{m-2}^{t-2} + \cdots + C_{m-t-2}X_{t+2}^{t-2} + C_{m-t-1}X_{t+1}^{t-2}) \\
&= (X_{m+1}^t - C_{m-t}X_{t+1}^{t-1} - C_{m-t+1}X_t^{t-1}) - 2(X_m^t - C_{m-t}X_t^{t-1}) \\
&\quad - (X_m^{t-1} - C_{m-t}X_t^{t-2} - C_{m-t+1}X_{t-1}^{t-2}) \\
&= (X_{m+1}^t - 2X_m^t - X_m^{t-1}) - C_{m-t}(X_{t+1}^{t-1} - 2X_t^{t-1} - X_t^{t-2}) - C_{m-t+1}(X_t^{t-1} - X_{t-1}^{t-2}).
\end{aligned}$$

要解決括號中的數值, 我們要重新看一次 X_m^p, $m \geq p+1$, 因此 X_m^p 中最小的就是 X_{p+1}^p, 其代表的折線圖為 p 次翻盤所分割的 $p+1$ 段中, 每一段都是 A 和 B 各得一票, 因此總共一種排列, 亦即$X_{p+1}^p = 1$. 而 X_{p+2}^p 則相當於 X_{p+1}^p 在 $p+1$ 個分段中任意一段的 A 和 B 各加一票, 所以 $X_{p+1}^p = X_{p+1}^p \times (p+1) \times C_2 = 2p+2$ 這時我們就可以回去完成證明了:

$$\begin{aligned}
&(X_{m+1}^t - 2X_m^t - X_m^{t-1}) - C_{m-t}(X_{t+1}^{t-1} - 2X_t^{t-1} - X_t^{t-2}) - C_{m-t+1}(X_t^{t-1} - X_{t-1}^{t-2}) \\
&= (X_{m+1}^t - 2X_m^t - X_m^{t-1}).
\end{aligned}$$ □

X_m 函數中以 C_m 表示之方法, 從 X_m^1 來開始看的話, 就是 $X_m^1 = C_{m+1} - 2C_m$, 然後再推到

$$\begin{aligned}
X_m^2 &= X_{m+1}^1 - 2X_m^1 - C_m = C_{m+2} - 4C_{m+1} + 3C_m \\
&= (C_{m+2} - 2C_{m+1}) - 2(C_{m+1} - 2C_m) - C_m.
\end{aligned}$$

這令我想到了以前在書上的遞迴式推導, 然後做了這樣的處理: 每一個函數皆可表現成 $C_m, C_{m+1}, \cdots$ 等的排列, 因此若令

$$C_m = a^0,\ C_{m+1} = a^1, \cdots$$

以此類推, 當我們說 C_m 時即代表 1,

$$X_m^1 = C_{m+1} - 2C_m \text{ 代表 } a-2,$$
$$X_m^2 = X_{m+1}^1 - 2X_m^1 - C_m = C_{m+2} - 4C_{m+1} + 3C_m$$

就是 $a^2 - 4a + 3$, 也等於 $(a-2)(a-2) - 1$. 因此我們得的了一個新的表示方式:

$$T_0 = a^0 = 1, \qquad T_1 = a-2,$$
$$T_2 = (a-2)T_1 - T_0 = (a-2)(a-2) - 1, \qquad T_p = (a-2)T_{p-1} - T_{p-2}.$$

在參考 [1] 的公式解法後, 開始進行 T_p 的一般式的推導:

$$s^2 - (a-2)s + 1 = 0, \quad s = \frac{(a-2) \pm \sqrt{a^2-4a}}{2}.$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ \dfrac{(a-2) \pm \sqrt{a^2-4a}}{2} b_1 + \dfrac{(a-2) \pm \sqrt{a^2-4a}}{2} b_2 = a-2. \end{cases}$$

$$\frac{(a-2) + \sqrt{a^2-4a}}{2} b_1 + \frac{(a-2) - \sqrt{a^2-4a}}{2} (1-b_1) = a-2,$$

$$b_1\sqrt{a^2-4a} + \frac{(a-2) - \sqrt{a^2-4a}}{2} = a-2,$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{a^2-4a} + (a-2)}{2\sqrt{a^2-4a}},$$

$$b_2 = 1 - b_1 = \frac{\sqrt{a^2-4a} - (a-2)}{2\sqrt{a^2-4a}}.$$

因此

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{\sqrt{a^2-4a} + (a-2)}{2\sqrt{a^2-4a}} \Big(\frac{(a-2) + \sqrt{a^2-4a}}{2}\Big)^p \\ &\quad + \frac{\sqrt{a^2-4a} - (a-2)}{2\sqrt{a^2-4a}} \Big(\frac{(a-2) - \sqrt{a^2-4a}}{2}\Big)^p \\ &= \frac{1}{2}\left(\Big(\frac{(a-2) + \sqrt{a^2-4a}}{2}\Big)^p + \Big(\frac{(a-2) - \sqrt{a^2-4a}}{2}\Big)^p\right) \\ &\quad + \frac{(a-2)}{(2\sqrt{a^2-4a}}\left(\Big(\frac{(a-2) + \sqrt{a^2-4a}}{2}\Big)^p - \Big(\frac{(a-2) - \sqrt{a^2-4a}}{2}\Big)^p\right). \end{aligned}$$

所以當 $2 \mid p$:

$$\begin{aligned} T_p = \frac{1}{2^p}\Big(&(C_0^p + C_1^p)(a-2)^p + (C_2^p + C_3^p)(a-2)^{p-2}a^2 - 4a \\ &+ \cdots + (C_{p-2}^p + C_{p-1}^p)(a-2)^2(a^2-4a)^{\frac{p}{2}-1} + C_p^p(a^2-4a)^{\frac{p}{2}}\Big). \end{aligned}$$

當 $2 \nmid p$:

$$T_p = \frac{1}{2^p}\Big((C_0^p + C_1^p)(a-2)^p + (C_2^p + C_3^p)(a-2)^{p-2}(a^2-4a) + \cdots + (C_{p-1}^p + C_p^p)(a-2)(a^2-4a)^{\frac{p-1}{2}}\Big).$$

這樣子的式子還是無法看出 C 的係數會是多少, 因此, 先試著就前幾項展開, 是否能在係數間得到什麼關係.

當 $2 \mid p$, 對於 x^0 的係數:

$$\frac{1}{2^p}\Big((C_0^p + C_1^p)(2)^p\Big) = p+1.$$

對於 x^1 的係數:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^p}\Big(-(C_0^p + C_1^p)C_1^p 2^{p-1} + (C_2^p + C_3^p)2^{p-2}(-4)\Big)\\
&= \frac{1}{2^p}\Big(-(p+1)C_1^p 2^{p-1} + (\frac{p(p-1)}{2})(\frac{p+1}{3})2^{p-2}(-4)\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(-2p(p+1) - 4\times(\frac{p^3-p}{6})\Big)\\
&= \frac{p^3+3p^2+2p}{-6}.
\end{aligned}$$

對於 x^2 的係數:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^p}\Big((C_0^p + C_1^p)C_2^p 2^{p-2} + (C_2^p + C_3^p)2^{p-2} + 4(C_2^p + C_3^p)C_1^{p-2}2^{p-3}\\
&\quad + 16(C_4^p + C_5^p)2^{p-4}\Big)\\
&= \frac{1}{2^p}\Big((p+1)(\frac{p(p-1)}{2})2^{p-2} + (\frac{p^3-p}{6})2^{p-2}\\
&\quad + 4(\frac{p^3-p}{6})(p-2)2^{p-3}\\
&\qquad + 16(\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24})(\frac{p+1}{5})2^{p-4}\Big)\\
&= \frac{1}{8}\Big((p+1)p(p-1) + (\frac{p^3-p}{3}) + (\frac{p^3-p}{3})2(p-2)\\
&\quad + (\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p+1)}{15})\Big)\\
&= \frac{(p+3)(p+2)(p+1)p(p-1)}{120}.
\end{aligned}$$

對於係數: 當 $2 \mid p$,

a^0	a^1	a^2	$\cdots$
C_1^{p+1}	$-C_3^{p+2}$	C_5^{p+3}	$\cdots$

依這樣的結果猜測,

$$
\begin{aligned}
&2 \mid p, \quad 在\ x^k\ 時, 其係數為\ (-1)^k C_{2k+1}^{p+k+1},\\
&2 \nmid p, \quad 在\ x^k\ 時, 其係數為\ (-1)^{k+1} C_{2k+1}^{p+k+1}.
\end{aligned}
$$

也就是

$$
\begin{aligned}
&2 \mid p, \quad T_p = C_1^{p+1} - C_3^{p+2}a + C_5^{p+3}a^2 - \cdots + C_{2p+1}^{2p+1}a^p,\\
&2 \nmid p, \quad T_p = -C_1^{p+1} + C_3^{p+2}a - C_5^{p+3}a^2 + \cdots + C_{2p+1}^{2p+1}a^p.
\end{aligned}
$$

接下來則要試圖證明這樣的結果, 以下的歸納法證明需要兩個步驟, 一是證明偶數推到奇數時正確, 二則證明反推亦正確.

證明. 1. 當 $p = 0, 1, 2, 3$ 時,

$$
\begin{aligned}
&T_0 = C_1^1 = 1,\\
&T_1 = a - 2 = C_3^3 a^1 - C_1^2 a^0,\\
&T_2 = (a-2)(a-2) - 1 = a^2 - 4a + 3 = C_5^5 a^2 - C_3^4 a^1 + C_1^3 a^0.
\end{aligned}
$$

2. 設當 $2 \mid p$ 時, T_{p-1}, T_p 成立, 因此接下來將以下二式為基礎.

$$
\begin{aligned}
T_{p-1} &= C_{2p-1}^{2p-1}a^{p-1} - C_{2p-3}^{2p-2}a^{p-2} + C_{2p-5}^{2p-3}a^{p-3} - \cdots - C_5^{p+2}a^2 + C_3^{p+1}a - C_1^p,\\
T_p &= C_{2p+1}^{2p+1}a^p - C_{2p-1}^{2p}a^{p-1} + C_{2p-3}^{2p-1}a^{p-2} - \cdots + C_5^{p+3}a^2 - C_3^{p+2}a + C_1^{p+1}.
\end{aligned}
$$

根據遞迴式,

$$
\begin{aligned}
T_{p+1} &= (a-2)T_p - T_{p-1}\\
&= C_{2p+1}^{2p+1}a^{p+1} - C_{2p-1}^{2}pa^p + C_{2p-3}^{2p-1}a^{p-1} - \cdots\\
&\quad + C_5^{p+3}a^3 - C_3^{p+2}a^2 + C_1^{p+1}a - 2C_{2p+1}^{2p+1}a^p + 2C_{2p-1}^{2}pa^{p-1} - 2C_{2p-3}^{2p-1}a^{p-2} + \cdots\\
&\quad - 2C_5^{p+3}a^2 + 2C_3^{p+2}a - 2C_1^{p+1}\\
&\quad - C_{2p-1}^{2p-1}a^{p-1} + C_{2p-3}^{2p-2}a^{p-2} - C_{2p-5}^{2p-3}a^{p-3} + \cdots + C_5^{p+2}a^2 - C_3^{p+1}a + C_1^p\\
&= C_{2p+3}^{2p+3}a^{p+1} - C_{2p+1}^{2p+2}a^p + C_{2p-1}^{2p+1}a^{p-1} - \cdots (\ldots) \cdots + C_3^{p+3}a - C_1^{p+2}.
\end{aligned}
$$

在此須先說明, 上式是由三條式子相加所得, 但由於最大的 a 項不同, 因此新式有幾項將僅由一兩項構成, 這些都是以打出的部分, 而其他由三項組成的, 則同依先用括號取代, 而以下將補充括號中的部分. 其中正負號的部分正好是相對的, 因此不另外

證明.

$$
\begin{aligned}
&[C^{2p+1-t}_{2p+1-2t} + 2C^{2p+1-t+1}_{2p+1-2t+2} - C^{2p-1-t+2}_{2p-1-2t+4}] \\
&= [C^{2p+1-t}_{2p+1-2t} + C^{2p+2-t}_{2p+3-2t} + (C^{2p+2-t}_{2p+3-2t} - C^{2p-1-t+2}_{2p-1-2t+4})] \\
&= [(C^{2p+1-t}_{2p+1-2t} + C^{2p+1-t}_{2p+1-2t}) + C^{2p+2-t}_{2p+3-2t}] \\
&= C^{2p+2-t}_{2p+3-2t} + C^{2p+2-t}_{2p+2-2t} \\
&= C^{2p+3-t}_{2p+3-2t} = C^{2(p+1)+1-t}_{2(p+1)+1-2t}.
\end{aligned}
$$

所以可知 T_{p+1} 亦成立, 接下來則是要推回到 $2 \nmid p$ 時的情形.

3. 設當 $2 \nmid p$ 時, T_{p-1}, T_p 成立, 因此以下二式為基礎.

$$
\begin{aligned}
T_{p-1} &= C^{2p-1}_{2p-1}a^{p-1} - C^{2p-2}_{2p-3}a^{p-2} + C^{2p-3}_{2p-5}a^{p-3} - \cdots + C^{p+2}_{5}a^2 - C^{p+1}_{3}a + C^{p}_{1}, \\
T_p &= C^{2p+1}_{2p+1}a^{p} - C^{2p}_{2p-1}a^{p-1} + C^{2p-1}_{2p-3}a^{p-2} - \cdots - C^{p+3}_{5}a^2 + C^{p+2}_{3}a - C^{p+1}_{1}.
\end{aligned}
$$

根據遞迴式,

$$
\begin{aligned}
T_{p+1} &= (a-2)T_p - T_{p-1} \\
&= C^{2p+1}_{2p+1}a^{p+1} - C^{2p}_{2p-1}a^{p} + C^{2p-1}_{2p-3}a^{p-1} - \cdots - C^{p+3}_{5}a^3 + C^{p+2}_{3}a^2 - C^{p+1}_{1}a \\
&\quad - 2C^{2p+1}_{2p+1}a^{p} + 2C^{2p}_{2p-1}a^{p-1} - 2C^{2p-1}_{2p-3}a^{p-2} + \cdots + 2C^{p+3}_{5}a^2 - 2C^{p+2}_{3}a + 2C^{p+1}_{1} \\
&\quad\quad - C^{2p-1}_{2p-1}a^{p-1} + C^{2p-2}_{2p-3}a^{p-2} - C^{2p-3}_{2p-5}a^{p-3} + \cdots - C^{p+2}_{5}a^2 + C^{p+1}_{3}a - C^{p}_{1} \\
&= C^{2p+3}_{2p+3}a^{p+1} - C^{2p+2}_{2p+1}a^{p} + C^{2p+1}_{2p-1}a^{p-1} - \cdots(\ldots)\cdots - C^{p+3}_{3} + C^{p+2}_{1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[C^{2p+1-t}_{2p+1-2t} + 2C^{2p+1-t+1}_{2p+1-2t+2} - C^{2p-1-t+2}_{2p-1-2t+4}] \\
&= [C^{2p+1-t}_{2p+1-2t} + C^{2p+2-t}_{2p+3-2t} + (C^{2p+2-t}_{2p+3-2t} - C^{2p-1-t+2}_{2p-1-2t+4})] \\
&= [(C^{2p+1-t}_{2p+1-2t} + C^{2p+1-t}_{2p+1-2t}) + C^{2p+2-t}_{2p+3-2t}] \\
&= C^{2p+2-t}_{2p+3-2t} + C^{2p+2-t}_{2p+2-2t} \\
&= C^{2p+3-t}_{2p+3-2t} = C^{2(p+1)+1-t}_{2(p+1)+1-2t}.
\end{aligned}
$$

□

2.2 翻盤問題

在對於投票問題的討論及變形中, 模糊化是指多方票數差距在一定值內的情形, 並求出這樣情形的路徑數. 例如在兩位候選人時, 將開票次序以差距圖方式表現, 可以得到類似以下的圖:

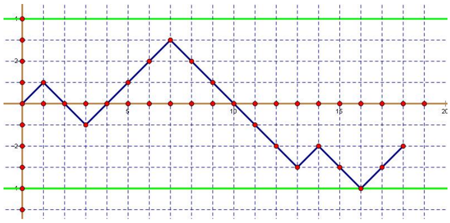

圖 1

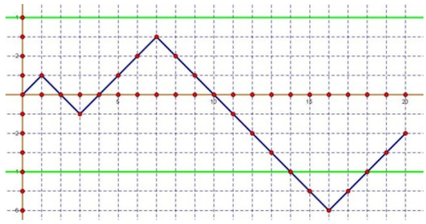

圖 2

其中圖 1 位於平行於橫軸的上下兩條線即所設定的界線, 若開票次序的折線始終不超過任一條界線, 則稱其為模糊化後的結果. 而圖 2 中的折線有部分超出界線, 便不在討論的範圍內. 在此, 我們討論模糊化的總方法數, 並以函數 (h, m) 表示, 其中 h 表示票數差距的極限值, 即雙方票數的差距始終都要在 h 值以內, 以數學式表示就是 $|A_i - B_i| \leq h$, 而 m 則指總票數, 而 $m = A_i + B_i$, 先從 $(4, m)$ 的例子看起:

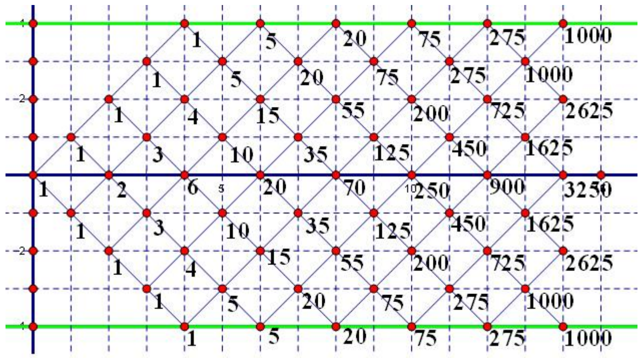

圖 3

圖形的生成方法是: 以起始點其方法數共 1 種, 而每加一票, 前一票每一點的方法術加至前方上下各一一位的點上, 當每一點的數字都標上後, 再全部相加, 得到新一票數各點的方法數. 前四票各點的票數橫著看就可看出其與 Pascal triangle 之間的關係, 而後面的部分就是由於撞到界限才因此和 Pascal triangle 不同, 再將其與之作對照.

在第一次碰到界限而內縮後的第一票, 可視為去掉兩端的 Pascal triangle, 而第二票除了兩端被去掉外, 同時少了 1. 如果把注意力集中在有碰到界限的票數上, 就可以看出超出界線外的 Pascal triangle 似乎以減的型式回到界限內, 為了更了解這種情形, 因此以 C_s^n 的型式表示每個點票數, 重新討論 $(5, m)$ 的情形. (見附錄) 在第五票第一次碰到界線後, Pascal triangle 開始以負的型式往內縮, 而又在內縮的範圍從兩邊往內在中間交會時, 又變成往外的, 然而, 在又碰到界線而再度向內時, 又開始以正號的型式進行. 而這些規則都出現在界線上有點的情形, 而當界線上沒點時, 就會以上一票的折曲方式, 再加上一些變化. 有了這樣的圖形, 現在便可以開始來討論 (h, m) 函數了.

由於整個圖是左右對稱的, 因此只先算出一邊就好. 每一個界線上有點的那一排, 其左

右兩邊各有三項, Pascal triangle 就是在三項之間折返, 每折返兩次再變號. 注意到目前的 (h,m), 兩個的變數都是奇數. 從例子已可以看出, 變數 k 決定了圖形的界線和第一個 C 的數值, 每一排的兩邊各有 $\frac{h+1}{2}$ 項, 而每一排的第一項的第一個 C 則是 $C_t^{h+2t}=C_{m-h}^m$, 所以看起來就成了以下的樣子 $(5,m)$:

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{m-5}{2} & -\frac{m-7}{2} & -\frac{m-17}{2} & \frac{m-19}{2} & \frac{m-29}{2} & \frac{m-31}{2} \\
\frac{m-3}{2} & -\frac{m-9}{2} & -\frac{m-15}{2} & \frac{m-21}{2} & \frac{m-27}{2} & \frac{m-33}{2} \\
\frac{m-1}{2} & -\frac{m-11}{2} & -\frac{m-13}{2} & \frac{m-23}{2} & \frac{m-25}{2} & \frac{m-35}{2}
\end{array}
$$

這樣的型式會一直延續下去直到變成 0 為止. 從這樣的 S 形折線趨勢, 就可以推出函數來了.

$$(5,m)=2\Big(C_{\frac{m-5}{2}}^m+C_{\frac{m-3}{2}}^m+C_{\frac{m-1}{2}}^m+\sum_{t=0}^{\frac{m-7}{2}}\big((-1)^{\lfloor\frac{t}{6}+1\rfloor}C_{\frac{m-7-2t}{2}}^m\big)\Big),\quad 2\nmid m.$$

而沒碰到界線的那一排, 就只是有碰到界線那一排的乘二或除二而已, 因此

$$(5,m)=2\Big(C_{\frac{m-4}{2}}^{m+1}+C_{\frac{m-2}{2}}^{m+1}+C_{\frac{m}{2}}^{m+1}+\sum_{t=0}^{\frac{m-6}{2}}\big((-1)^{\lfloor\frac{t}{6}+1\rfloor}C_{\frac{m-6-2t}{2}}^{m+1}\big)\Big),\quad 2\mid m.$$

接下來討論更一般的情形:

$$
\begin{array}{cc}
\frac{m-k}{2} & -\frac{m-7-2}{2} \\
\frac{m-1}{2} &
\end{array}
$$

這樣就可以將 k 加入變數了, 對於 $2\nmid h$:

$$(h,m)=2\Big(\sum_{s=0}^{\frac{h-1}{2}}C_{\frac{m-1}{2}-s}^m+\sum_{t=0}^{\frac{m-h-2}{2}}\big((-1)^{\{\frac{t}{h+1}+1\}}C_{\frac{m-h-2}{2}-t}^m\big)\Big),\quad 2\nmid m.$$

$$(h,m)=\Big(\sum_{s=0}^{\frac{h-1}{2}}C_{\frac{m}{2}-s}^{m+1}+\sum_{t=0}^{\frac{m-h-1}{2}}\big((-1)^{\{\frac{t}{h+1}+1\}}C_{\frac{m-h-1}{2}-t}^m\big)\Big),\quad 2\mid m.$$

然後再來看 $2\mid h$ 的情形, 而這樣的情況下, 仍從碰觸到界線的部分來看, 但此時除了兩邊外, 中間也有一項, 但處理情形大致相同, 可以很直接得到:

$$(h,m)=2\Big(\sum_{s=0}^{\frac{h}{2}}C_{\frac{m}{2}-s}^m+\sum_{t=0}^{\frac{m-h-2}{2}}\big((-1)^{\{\frac{t}{h+2}+1\}}C_{\frac{m-h-2}{2}-t}^m\big)\Big)-C_{\frac{m}{2}}^m,\quad 2\mid m.$$

$$(h,m)=\Big(\sum_{s=0}^{\frac{h}{2}}C_{\frac{m+1}{2}-s}^{m+1}+\sum_{t=0}^{\frac{m-h-1}{2}}\big((-1)^{\{\frac{t}{h+2}+1\}}C_{\frac{m-h-1}{2}-t}^{m+1}\big)\Big)-\frac{1}{2}C_{\frac{m+1}{2}}^{m+1},\quad 2\nmid m.$$

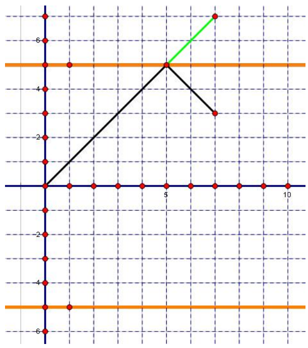

圖 4

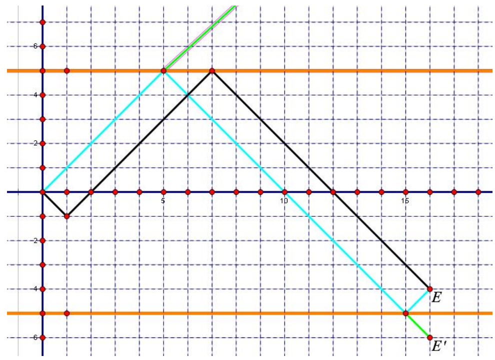

圖 5

以鏡射所造成的一一對應方式討論 [5] 中對計算不合路徑的方法給了我對兩條限制線做鏡射的方法. 對於任意一條不合的路徑, 依照其碰到限制的次數, 可以做出一一對應的方法. 圖 4 中給了一個例子. 上下兩條橘線為限制線, 中間的黑線為任一條碰到限制的路徑. 將碰到限制後的黑線對橘線做鏡射可得到綠線. 簡言之, 若路徑最後停留點已確定, 則由此點對限制線做對稱點, 由原點到對稱點的路徑必通過限制線, 也因此得到對碰到限制的不和 路徑的一一對應. 但由於限制線有兩條, 所以各別的一一對應路徑會有重覆情形. 例如當路徑在總票數夠多的情形下, 可能先後碰到兩條限制線. 圖 5 中以 E 作為最後的停留點, 可看出藍線是一條可以碰到兩條限制線的路 徑, 黑線則碰到上端那條. 對於可能碰到兩次的路徑, 則先對較靠近的下端做對稱點 E', 在對其作上端限制線的對稱. 透過兩次對稱, 可以找出碰到兩上下限制的路徑.

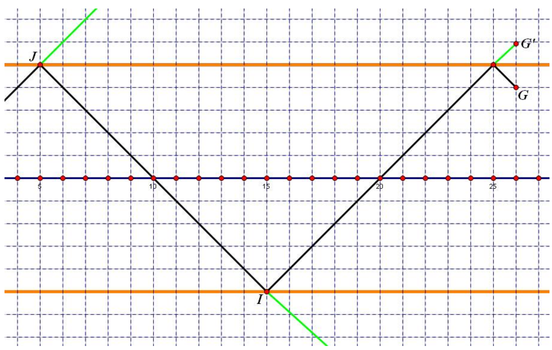

圖 6

當總票數更多, 碰到限制線的情形則由更多種可能, 對於一直碰到同一條限制線的路徑可以不管, 但交錯著碰到上下端限制線的路徑則有交集需要扣除. 對此處理方法同上: 先對最後碰到限制線的路徑做對稱, 接著對前一次碰到另一條限制線的路徑做對稱, 如圖 6.

對於可能多次碰到限制線的停留點 G 的路徑, 先將 G 映稱到 G', 再對前一次碰到另一條限制線的 I 作映稱, 接著對 $J \cdots$, 直到原點到最後的映稱點間只通過一條限制線為止. 接下來則是公式推導的過程.

以符號 $N_m^{\neq\pm h}(0,b)$ 表示原點到停留點 b 之間不超過限制 h 的路徑數, 總票數則為 m, 再令路徑中向上 i 次, 向下 j 次, 因此可以得到

$$i+j=m.$$

b 對於兩條限制線的對稱點為

$$2h-b, \qquad -2h-b,$$

所以通過一次限制線的路徑數為

$$\begin{cases} i+j=m \\ i-j=2h-b \end{cases}, \qquad \begin{cases} i+j=m \\ i-j=-2h-b \end{cases}.$$

所以路徑數為

$$\left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}+h} \right\rangle, \qquad \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}-h} \right\rangle.$$

此處括弧的定義為:

$$\left\langle {a \atop b} \right\rangle = \begin{cases} \binom{a}{b}, & b \in \mathbb{N}, \\ 0 \ , & b \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

對於通過兩次限制線的路徑則須經過兩次映射, 對上面的對稱點再做一次對稱

$$-4h+b, \qquad 4h+b,$$

路徑數為

$$\left\langle {m \atop \frac{m+b}{2}+2h} \right\rangle, \qquad \left\langle {m \atop \frac{m+b}{2}-2h} \right\rangle.$$

以此類推之後為

$$\left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}+3h} \right\rangle, \qquad \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}-3h} \right\rangle,$$

因此總路徑數為

$$\left\langle {m \atop \frac{m+b}{2}} \right\rangle - \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}+h} \right\rangle - \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}-h} \right\rangle - \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}+2h} \right\rangle - \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}-2h} \right\rangle \cdots .$$

然而由於總票數的自然限制, 可以來回碰到限制現的次數有其限制. 對於碰到不同限制線最多次數 t 來說, 總票數 m 的限制為

$$th \le m < (t+1)h,$$

因此

$$N_m^{\neq\pm h}(0,b) = \left\langle {m \atop \frac{m+b}{2}} \right\rangle + \sum_{k=1}^{t}(-1)^k \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}+kh} \right\rangle + \sum_{k=1}^{t}(-1)^k \left\langle {m \atop \frac{m-b}{2}-kh} \right\rangle.$$

若對於相同的總票數下所有可能的 b 值相加, 則可以得到上面以翻轉的 Pascal triangle 導出來的 (h,m) 公式.

3 未來展望

1. 三人的翻盤問題仍沒有比較簡潔的表示方式, 此外, 還可以試著尋找有無其他種路徑的對應方式.
2. 三人的模糊化問題仍停留在係數討論的遞迴式中, 需要再試著尋找立體 Pascal 中是否有如同 Pascal triangle 裡面受限制後的規則變形.
3. 是否可以解決多票箱問題? 以及在一一對應的鏡射處理上有沒有辦法找出更好的對應方式? 原本的對應方式所用的方法是否能和多項式整數解作結合?

參考文獻

[1] 許介彥; 《數學悠哉遊》, 三民書局, 80-91, 146-147 , 2005.

[2] Lajos Takacs; *Ballot Problems*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie **1**, 154-158, 1962.

[3] Marc Renault; *Four proofs of the ballot theorem*, Mathematics Magazine vol. **80** no. 5, p.345, 2007.

[4] Richard Johnsonbaugh; 《離散數學》, 第六版, 中華人民共和國, 電子工業出版社, 151-180.

[5] Sven Erick Alm; *Simple random walk*, p.11-15, 2002.