從 3, 5, 7 出發 – 擬畢氏三角形之研究

陳學儀

台北市立第一女子高級中學

Abstract

Our project aims to study the Similar Pythagorean Triangle. We started with the Law of cosines and the right triangles. We tried to work out some generalized formulas by using the theorem that generates Pythagorean Triples. Then we defined the Primitive Similar Pythagorean Triples, and derived much more theorems from it. In addition, we formulated many theorems of area, perimeter and side by observing a whale of data on Microsoft Excel.

摘要: 我們從餘弦定律與直角三角形出發, 同時以兩種方向進行: 首先, 試以畢氏數製造機之原理做出擬畢氏數製造機, 並定義基本擬畢氏數, 接著延伸出相關定理; 另外, 透過觀察 Excel 之數據, 研究出面積, 周長與邊長之各項定理. 最後,我們推廣我們的結果到更一般的三角形並且開拓出費瑪點的新研究觀點.

1 簡介

1.1 研究動機

上高中以後新接觸到三角函數, 我們對於餘弦定律備感興趣, 因為很多平時使用的基礎定理, 都可以用餘弦定律加以證明. 有一次利用餘弦定律來計算夾角為 120 度三角形的整數邊, 而那猶如設計過的數字"3, 5, 7", 讓我們聯想到其是否與直角三角形一樣有某種規律, 因此我們便開始進行這項研究.

1.2 研究目的

因為直角三角形有畢氏數和畢氏數製造機 $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$, 我們猜想其他的三角形是否也有這些特殊的關係, 所以決定從夾角 120 度的整數邊三角形著手, 希望能找出類似畢氏數製造機, 或是其整數邊長解的規律, 並從一組整數解推出其他組解.

1.3 研究結果

我們一開始參考《從勾股定理談起》做出了擬畢氏數製造機 (名詞定義請參考 2.1 節), 在排除了一些條件後, 得到了基本擬畢氏數定理:

定理 1.1. 若 a, b, c 為基本擬畢氏數, 則存在唯一的一組 $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$ 且 $n - m$ 不為 3 的倍數

$$s.t. \begin{cases} a = m^2 + 2mn \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 + mn + n^2. \end{cases}$$

透過數據的觀察, 我們發現了擬畢氏三角形會有最大擬畢氏三角形, 更推得了最大奇數定理與最大偶數定理:

定理 1.2 (最大奇數定理)**.** $\forall k \geq 2$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $p = 3k^2 - 4k + 1 \in \mathbb{N}$, 使得 $2k - 1, p, p + k$ 為最大基本擬畢氏三角形之三邊長.

定理 1.3 (最大偶數定理)**.** $\forall k \geq 2$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $p = 12k^2 - 4k - 1 \in \mathbb{N}$, 使得 $8k, p, p + 4k$ 為最大基本擬畢氏三角形之三邊長.

由於 60 度亦為特別角, 因此我們嘗試以類似擬畢氏數的各種方法推得相關的定理:

定理 1.4 (基本迷擬畢氏數定理)**.** 若 a, b, c 為迷擬畢氏數, 則存在唯一的一組 $m, n \in N$, $(m, n) = 1$ 且 $n + m$ 不為 3 的倍數

$$s.t. \begin{cases} a = 2mn - m^2 \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 - mn + n^2. \end{cases}$$

定理 1.5 (最大迷擬奇數定理)**.** $\forall k \geq 2$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $q = 3k^2 - 2k \in \mathbb{N}$, 使得 $2k - 1, q, q - k + 1$ 為最大基本迷擬畢氏三角形之三邊長.

定理 1.6 (最大迷擬偶數定理)**.** $\forall k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $q = 12k^2 + 4k - 1 \in \mathbb{N}$, 使得 $8k, q, q - 4k + 2$ 為最大基本迷擬畢氏三角形之三邊長.

而在比賽的過程中, 經由教授的引導, 我們試從特別角推至一般解, 求出 $\cos\theta$ 為有理數的製造機:

$$\begin{cases} a = 2mn - 2m^2\cos\theta \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 - 2mn\cos\theta + m^2. \end{cases} \qquad (n > m \text{ 且 } (m, n) = 1)$$

在研究的初期, 我們提出了有關費瑪點的推論: 推測任意整數邊三角形的費瑪點不可能將其分成三個擬畢氏三角形若其結果正確, 我們將證明它; 若錯誤, 想找出反例.

然而, 在比賽的過程中, 我有了新的想法:

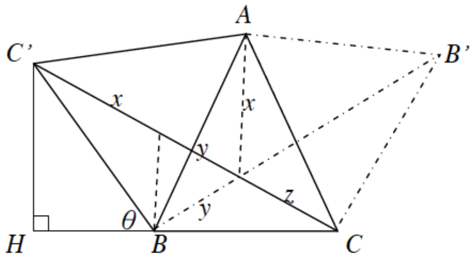

圖 1

已知一個任意三角形 ABC, 我們沿 $\overline{AB}$ 作一個正三角形 ABC'. 接著做使 $\overline{C'H}$ 使得 $\overline{C'H} \perp \overrightarrow{CB}$, 並令 $\angle C'BH = \theta$.

最後我們證明出了以下定理, 當 $\cos\theta$ 為無理數時, 則任意整數邊三角形的費瑪點不可能將其分成三個擬畢氏三角形.

2 研究內容

2.1 名詞定義

1. 擬畢氏三角形: 有一夾角為 120 度之三角形且三邊長為正整數.
2. 基本擬畢氏數: 符合擬畢氏三角形之三邊長且三邊互質.
3. 最大基本擬畢氏三角形: 三邊互質且以 a 為最小邊之擬畢氏三角形中, 面積最大且周長最大的, 稱為 a 之最大基本擬畢氏三角形 (後續過程將針對面積, 周長同時增大作解釋).
4. 迷擬畢氏三角形: 有一夾角為 60 度之三角形且三邊長為正整數.
5. 基本迷擬畢氏數: 符合迷擬三角形之三邊長且三邊互質.
6. 最大基本迷擬畢氏三角形: 三邊互質且以 a 為最小邊之迷擬畢氏三角形中, 面積最大且周長最大的, 稱為 a 之最大基本迷擬畢氏三角形 (後續過程將針對面積, 周長同時增大作解釋).

2.2 120° 三角形 (擬畢氏三角形) 之探討

(註: 我們接下來的敘述皆以 a, b, c 表三邊長, 且 c 為夾角 120 度所對應之邊長.)

2.2.1 擬畢氏數製造機

我們收集並參考了畢氏數的各種證明法以後加以修正, 得出以下簡易的擬畢氏數製造機, 研究過程如下:

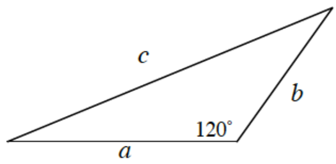

圖 2

設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之三邊長且 $\angle C = 120°$, 由餘弦定律

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + ab,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \tag{1}$$

令 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ 代入 (1) 式, $\therefore \Gamma : x^2 + xy + y^2 = 1$ 之圖形表一橢圓.

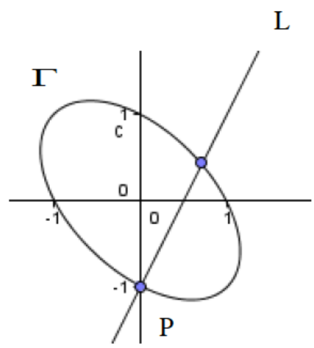

圖 3

解 Γ 在第一象限上之點 (x, y), $x, y \in \mathbb{Q}$, 令 L 為過 $P(0, -1)$ 與第一象限之直線

$$L : y + 1 = kx \ (\therefore k \in \mathbb{Q} \text{ 且 } k > 1).$$

L 與 Γ 聯立可得

$$x^2 + x(kx-1) + (kx-1)^2 = 1,$$
$$(k^2+k+1)x^2 - (2k+1)x = 0.$$

$$x = \frac{2k+1}{k^2+k+1} \text{ or } x = 0. \text{ (不合, 此即 } P \text{ 點)}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2k+1}{k^2+k+1} \\ y = \dfrac{k^2-1}{k^2+k+1}, \end{cases}$$

則當 k 取大於 1 之有理數時可求出橢圓上在第一象限內的所有有理點

$\because k \in \mathbb{Q} \therefore$ 令 $k = \frac{n}{m}, m, n \in \mathbb{N}, (m,n) = 1$

$\because k > 1 \therefore n > m$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2mn+m^2}{n^2+mn+m^2} = \dfrac{a}{c} \\ y = \dfrac{n^2-m^2}{n^2+mn+m^2} = \dfrac{b}{c}, \end{cases}$$

得到擬畢氏數

$$\begin{cases} a = 2mn + m^2 \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 + mn + n^2. \end{cases} \qquad (n > m \text{ 且 } (m,n) = 1)$$

$\because$ 當 k 確定時, L 隨之確定

$\therefore$ 上述所求的數對 (m,n) 和擬畢氏數 a,b,c 之間成一一對應且映成.

驗證:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + ab \\ & = (2mn+m^2)^2 + (n^2-m^2)^2 + (2mn+m^2)(n^2-m^2) \\ & = 4m^2n^2 + 4m^3n + m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + m^4 + 2mn^3 - 2m^3n + m^2n^2 - m^4 \\ & = m^4 + 2m^3n + 3m^2n^2 + 2mn^3 + n^4 \\ & = (m^2)^2 + (mn)^2 + (n^2)^2 + 2(m^2)(n^2) + 2(m^2)(mn) + 2(mn)(n^2) \\ & = (m^2+mn+n^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

2.2.2 解決擬畢氏數製造機之缺陷

基本擬畢氏數的定義需滿足擬畢氏三角形之三邊長且三邊互質, 而擬畢氏數製造機所製造出來的數不一定會符合基本擬畢氏數, 且會重複; 在觀察大量數據後, 我們推出引理 1 .

m	n	$n-m$	a	b	c	gcd	$a/$ gcd	$b/$ gcd	$c/$ gcd
1	5	4	11	24	31	1	11	24	31
1	6	5	13	35	43	1	13	35	43
1	7	6	15	48	57	3	5	16	19
1	8	7	17	63	73	1	17	63	73
1	9	8	19	80	91	1	19	80	91
1	10	9	21	99	111	3	7	33	37
1	11	10	23	120	133	1	23	120	133
1	12	11	25	143	157	1	25	143	157
1	13	12	27	168	183	3	9	56	61
1	14	13	29	195	211	1	29	195	211
1	15	14	31	224	241	1	31	224	241
1	16	15	33	255	273	3	11	85	91

表格 1. 當 $m=1$ 時擬畢氏數製造機結果

引理 1. 若 $n-m$ 為 3 的倍數, 則擬畢氏數 a,b,c 皆為 3 的倍數.

證明. 令 $n-m=3t, t\in\mathbb{N} \Rightarrow n=m+3t$,

$$\begin{cases} a=2mn+m^2 \\ b=n^2-m^2 \\ c=m^2+mn+n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3m^2+6tm=3m(m+2t) \\ b=6tm+9t^2=3t(2m+3t) \\ c=3m^2+9tm+9t^2=3(m^2+3tm+3t^2). \end{cases}$$

$\therefore a,b,c$ 皆為 3 的倍數 □

由引理 1 我們可得知 $n-m$ 不得為 3 的倍數, 否則 a,b,c 不可能互質. 雖然一組 (m,n) 只會對應到唯一的一組(a,b,c), 但是我們擔心此關係在反過來後是否會成立, 因此推出了引理 2 .

引理 2. 任一擬畢氏數陣列 (a,b,c) 必不可能對應到兩組不同的 (m,n).

證明. 假設存在兩組不同的 (m,n), (m_1,n_1) 使得

$$\begin{aligned} a&=m^2+2mn=m_1^2+2m_1n_1, \\ b&=n^2-m^2=n_1^2-m_1^2, \\ c&=m^2+mn+n^2=m_1^2+m_1n_1+n_1^2, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c - a = m^2 + 2n^2 = m_1^2 + 2n_1^2 & (2) \\ b = n^2 - m^2 = n_1^2 - m_1^2 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2)\text{ 式 } + (3)\text{ 式} \\ (2)\text{ 式 } \times (-1) + (3)\text{ 式 } \times 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 = 3n_1^2 \\ 3m^2 = 3m_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = n_1 \\ m = m_1, \end{cases}$$

藉此可推得 (m, n) 與 (a, b, c) 之關係為一對一且映成. □

2.2.3 基本擬畢氏數定理之製成

藉由引理 1, 2 和製造機, 我們可以完整的推出所有基本擬畢氏數組, 且數組不重複.

定理 2.1 (基本擬畢氏數定理)**.** 若 a, b, c 為基本擬畢氏數, 則存在唯一的一組 $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, $n > m$ 且 $n - m$ 不為 3 的倍數

$$s.t. \begin{cases} a = m^2 + 2mn \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 + mn + n^2. \end{cases}$$

證明. 假設 $d|m^2 + 2mn$ 且 $d|n^2 - m^2$ 且 $d|m^2 + mn + n^2$, $d > 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d|2(m^2 + mn + n^2) - (m^2 + 2mn) \text{ 且 } d|n^2 - m^2 \\ &\Rightarrow d|m^2 + 2n^2 \text{ 且 } d|n^2 - m^2 \\ &\Rightarrow d|3m^2 \text{ 且 } d|3n^2 \\ &\Rightarrow d|3\ (\because (m, n) = 1 \therefore (m^2, n^2) = 1) \\ &\therefore d = 3 \\ &\Rightarrow 3|(n + m)(n - m). \end{aligned}$$

由於

$$(n - m, 3) = 1 \Rightarrow 3|(n + m), \tag{4}$$

又

$$\begin{aligned} &3|m^2 + mn + n^2 \\ \Rightarrow &3|(n + m)^2 - nm \\ \Rightarrow &3|mn. \end{aligned} \tag{5}$$

$\because$ 當 $(m, n) = 1 \Rightarrow (m + n, mn) = 1$, 由 (4), (5) 兩式
$\therefore$ 矛盾
$\rightarrow$ 可得知 a, b, c 互質. □

然而我們擔心一組基本擬畢氏數組 (a,b,c), 當 a,b 互換後是否又屬於另一新的基本擬畢氏數組, 因此提出了定理 2.2.

定理 2.2 (不可互換定理)**.** 若 $a=m^2+2mn$, $b=n^2-m^2$, $c=m^2+mn+n^2$ 為基本擬畢氏數, 則不存在 $m_1,n_1\in\mathbb{N}$, 使得

$$a=n_1^2-m_1^2,\quad b=m_1^2+2m_1n_1,\quad c=m_1^2+m_1n_1+n_1^2.$$

證明. 假設存在 $m_1,n_1\in\mathbb{N}$, 使得

$$\begin{aligned}
&a=m^2+2mn=n_1^2-m_1^2\\
&b=n^2-m^2=m_1^2+2m_1n_1\\
&c=m^2+mn+n^2=m_1^2+m_1n_1+n_1^2\\
&\Rightarrow 2c-a=m^2+2n^2=3m_1^2+2m_1n_1+n^2 \text{ 又 } n^2-m^2=m_1^2+2m_1n_1\\
&\Rightarrow 3n^2=4m_1^2+4m_1n_1+n_1^2=(2m_1+n_1)^2\ (\because m,n,m_1,n_1\in\mathbb{N})\\
&\Rightarrow \sqrt{3}n=2m_1+n_1 \text{ 矛盾.}
\end{aligned}$$

我們對於基本擬畢氏數的研究, 目前已能排除製造機的缺陷, 接著我們試著再從數據中尋找 120 度三角形的規律及特性. □

2.2.4 邊界關係

我們觀察大量數據後發現當 a 為固定邊長, b 不斷加大, 使得 c 亦不斷加大, 而 $c-b$ 越接近 $\frac{a}{2}$.

a	b	c (近似值)	$c-b$	a	b	c (近似值)	$c-b$
3	332	333.5101	1.51012	5	931	933.51	2.510043
3	333	334.5101	1.51009	5	932	934.51	2.510032
3	334	335.5101	1.510059	5	933	935.51	2.510021
3	335	336.51	1.51003	5	934	936.51	2.510011
3	336	337.51	1.51	5	935	937.51	2.51
3	337	338.51	1.50997	5	936	938.51	2.509989
3	338	339.5099	1.509941	5	937	939.51	2.509979
3	339	340.5099	1.509912	5	938	940.51	2.509968
3	340	341.5099	1.509883	5	939	941.51	2.509957

表格 2. 120 度三角形三邊長

我們針對表格 2 的觀察, 加以證明之.

引理 3. 設 a 為最小邊長, 當 $b \to \infty$ 時, $c - b \to \frac{a}{2}$.

證明一(代數).

$$
\begin{aligned}
c^2 = a^2 + ab + b^2 \Rightarrow c &= \sqrt{a^2 + ab + b^2}, \\
\lim_{b\to\infty}(c - b) &= \lim_{b\to\infty}(\sqrt{a^2 + ab + b^2} - b) \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{(\sqrt{a^2 + ab + b^2}) - b^2}{\sqrt{a^2 + ab + b^2} + b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{a^2+ab}{b}}{\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}+b}{b}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{a^2}{b} + a}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1} + 1} \\
&= \frac{0 + a}{\sqrt{0 + 0 + 1} + 1} = \frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

□

證明二(幾何).

步驟一: 做一 120° 之三角形且三邊長為 a, b, c.

步驟二: 作以 $\angle A$ 為頂角且邊長為 b 之等腰三角形, 得到 $\overline{PB}$ 為 $c - b$.

步驟三: 將 b 不斷拉長, 如圖 4.

步驟四: 當 b 趨近於無限大時, 如圖 5. □

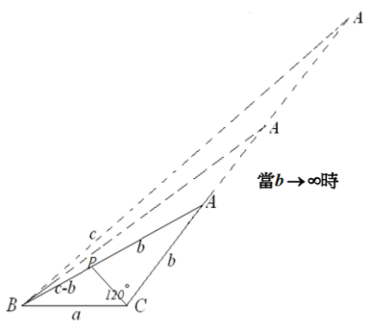

圖 4

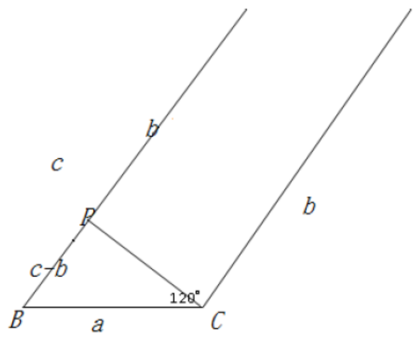

圖 5. $\because \angle CBP \to 60°, \angle CPB \to 90°$
$\therefore c - b$ 會趨近於 $\frac{a}{2}$

2.2.5 擬畢氏三角形的面積, 周長與下界之關係

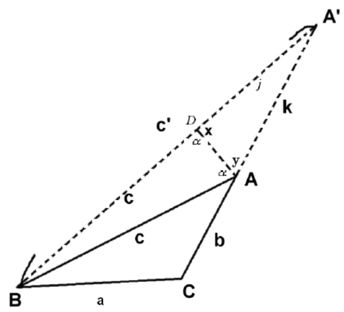

圖 6

引理 4. 周長, 面積與下界之關係, 當 a 固定時:

1. 面積越大, 則 $c-b$ 越小.
2. 周長越大, 則 $c-b$ 越小.

證明. 延長 $\overrightarrow{CA}$ 至 A', 連 $\overline{BA}'$
在 $\overline{BA'}$ 上取一點 D, 使得 $\overline{BD}=\overline{BA}$
令 $\overline{AA'}=k, \overline{DA'}=j, k, j>0, \overline{CA'}=b'=b+k, \overline{BA'}=c'=c+j$

$$\because \angle x+\angle\alpha=180^\circ=\angle y+\angle\alpha+\angle CAB$$
$$\therefore \angle x>\angle y$$
$$\therefore k>j$$

$$\begin{aligned}&(c-b)-(c'-b')\\&=(c-b)-(c+j-b-k)=k-j>0,\\&\therefore c-b>c'-b'.\end{aligned}$$

□

藉由此引理我們可得知面積與邊長呈正相關.

2.2.6 邊差下界定理

定理 2.3. 設 a, b, c 為基本擬畢氏數, 當 c 為最大邊, 則 $c-b>\frac{a}{2}$, 且 $c-a>\frac{b}{2}$.

不失一般性, 我們令 $a=m^2+2mn, b=n^2-m^2, c=m^2+mn+n^2$

證明.

1.

$$\begin{aligned} c-b &= m^2+mn+n^2-(n^2-m^2) \\ &= 2m^2+mn \\ &> \frac{1}{2}m^2+mn \\ &= \frac{m^2+2mn}{2} = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore c-b > \frac{a}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned} c-a &= n^2-mn \\ &= \frac{(n-m)^2+n^2-m^2}{2} \\ &> \frac{n^2-m^2}{2} = \frac{b}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore c-b > \frac{b}{2}.$$

□

所以我們對面積與周長皆最大的三角形加以定義, 將三邊互質且以 a 為最小邊之基本擬畢氏三角形中, 面積最大且周長最大的, 稱為 a 之最大基本擬畢氏三角形.

因為結果牽扯到 $\frac{a}{2}$, 所以我們決定利用 a 的奇偶性, 來探討 $\frac{a}{2}$ 的性質. 我們先討論偶數, 而推得引理 5, 6 並加以證明之.

引理 5. 設 a 為偶數, 而 a, b, c 為基本擬畢氏數且 $a < b < c$, 則 $c-b$ 必為偶數.

證明.

$$\begin{aligned} &\because (a,b,c)=1 \\ &\therefore b, c \text{ 必為奇數} \\ &\therefore c-b \text{ 為偶數} \end{aligned}$$

□

m	N	a	B	c	gcd	$a/$ gcd	$b/$ gcd	$c/$ gcd
2	3	16	5	19	1	16	5	19
2	4	20	12	28	4	5	3	7
2	5	24	21	39	3	8	7	13
2	6	28	32	52	4	7	8	13
2	7	32	45	67	1	32	45	67
2	8	36	60	84	12	3	5	7
2	9	40	77	103	1	40	77	103
2	10	44	96	124	4	11	24	31
2	11	48	117	147	3	16	39	49
2	12	52	140	172	4	13	35	43
2	13	56	165	199	1	56	165	199
2	14	60	192	228	12	5	16	19

表格 3. 當 $m=2$ 時擬畢氏數製造機結果 (觀察 $a/$ gcd 之偶數項)

我們觀察表格 3 發現符合擬畢氏數之三邊長之數組, 當有偶數時, 皆為 8 的倍數. 因此我們推出引理 6 並證明之.

引理 6. 設 a,b,c 為基本擬畢氏數, 當 a 為偶數時, 則 a 必為 8 的倍數.

證明. 假設 $a=8a_1+r, r=2,4,6$. 因為 $(a,b,c)=1$, 所以 b,c 必為奇數, 令 $b=2b_1-1$, $c=2c_1-1$, $b_1,c_1\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(2c_1-1)^2&=(8a_1+r)^2+(2b_1-1)^2+(8a_1+r)(2b_1-1),\\ 4(c_1+b_1-1)(c_1-b_1)&=8(8a_1^2+2a_1r+2b_1)+r^2+2b_1r-r\\ &=8(8a_1^2+2a_1r+2b_1)+r(r+2b_1-1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\because c_1+b_1\equiv c_1-b_1 \pmod 2\\ &\therefore 8|4(c_1+b_1-1)(c_1-b_1)\\ &\therefore r(r+2b_1-1)\equiv 0 \pmod 8\\ &\because r+2b_1-1 \text{ 為奇數}\\ &\therefore r\equiv 0 \pmod 8 \text{ 矛盾.}\end{aligned}$$

□

藉由引理 5, 6, 我們推導出進階的邊差下界定理.

推論一. 當 a 為奇數時, $c-b\geq\frac{a+1}{2}$.

證明. 令 $a = 2k-1, k \in \mathbb{N}$

$$\because c-b > \frac{a}{2} = \frac{2k-1}{2} = k - \frac{1}{2} \quad (\because c, b \in \mathbb{N} \therefore c-b \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow c-b \geq k$$
$$\Rightarrow c-b \geq \frac{a+1}{2}. \qquad \square$$

推論二. 當 a 為偶數時, $c-b \geq \frac{a}{2}+2$.

證明. 由引理 6 可得知 a 必為 8 的倍數, 令 $a = 8t, t \in \mathbb{N}$

$$c-b > \frac{a}{2} = 4t.$$

由引理 3 可得知 $c-b$ 必為偶數

$$\therefore c-b \geq 4t+2$$
$$\Rightarrow c-b \geq \frac{a}{2}+2. \qquad \square$$

2.2.7 奇數與偶數的最大基本擬畢氏三角形

觀察大量數據後我們發現可以將畢氏依其最公因數 (gcd) (紅框) 分類, 而每一類皆有其規律.

M	N	a	b	c	gcd	a/gcd	b/gcd	c/gcd
2	3	16	5	19	1	16	5	19
2	4	20	12	28	4	5	3	7
2	5	24	21	39	3	8	7	13
2	6	28	32	52	4	7	8	13
2	7	32	45	67	1	32	45	67
2	8	36	60	84	12	3	5	7
2	9	40	77	103	1	40	77	103
2	10	44	96	124	4	11	24	31
2	11	48	117	147	3	16	39	49
2	12	52	140	172	4	13	35	43
2	13	56	165	199	1	56	165	199
2	14	60	192	228	12	5	16	19
2	15	64	221	259	1	64	221	259
2	16	68	252	292	4	17	63	73
2	17	72	285	327	3	24	95	109
2	18	76	320	364	4	19	80	91
2	19	80	357	403	1	80	357	403
2	20	84	396	444	12	7	33	37
2	21	88	437	487	1	88	437	487
2	22	92	480	532	4	23	120	133
2	23	96	525	579	3	32	175	193
2	24	100	572	628	4	25	143	157
2	25	104	621	679	1	104	621	679
2	26	108	672	732	12	9	56	61
2	27	112	725	787	1	112	725	787
2	28	116	780	844	4	29	195	211
2	29	120	837	903	3	40	279	301
2	30	124	896	964	4	31	224	241
2	31	128	957	1027	1	128	957	1027
2	32	132	1020	1092	12	11	85	91

表格 4. 當 $m = 2$ 時擬畢氏數製造機結果 (觀察 gcd 與其為 3 和 12 的基本擬畢氏數)

其中我們發現 gcd 為 12 的基本擬畢氏數 (藍框) 之 a 呈現完美的規律, 引起我們非常大的好奇. 我們開始研究其三邊長的規律, 發現其正好又是最大基本擬畢氏三角形. 因此我們藉由前面的引理與定理, 推出最大奇數定理, 並加以證明之.

定理 2.4 (最大奇數定理). $\forall k \geq 2$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $p = 3k^2 - 4k + 1 \in \mathbb{N}$, 使得 $2k - 1, p, p + k$ 為最大基本擬畢氏三角形之三邊長.

證明.

1. 取 $m = k - 1, n = k$, 則 $n^2 - m^2 = 2k - 1$,

$$m^2 + 2mn = 3k^2 - 4k + 1 = p,$$
$$m^2 + mn + n^2 = 3k^2 - 3k + 1 = p + k.$$

$\because (k - 1, k) = 1$ 且 $k - (k - 1)$ 與 3 互質

$\therefore 2k - 1, p, p + k$ 為基本擬畢氏數.

2.

$$c - b = k = \frac{2k - 1 + 1}{2} = \frac{a + 1}{2},$$

由推論一, $\frac{a+1}{2}$ 為 $c - b$ 之最大下界.

$\therefore$ 此為當 $a = 2k - 1$ 時最大基本擬畢氏三角形. □

a	b	c	$c - b$	a	b	c	$c - b$
3	5	7	2	29	616	631	15
5	16	19	3	31	705	721	16
7	33	37	4	33	800	817	17
9	56	61	5	35	901	919	18
11	85	91	6	37	1008	1027	19
13	120	127	7	39	1121	1141	20
15	161	169	8	41	1240	1261	21
17	208	217	9	43	1365	1387	22
19	261	271	10	45	1496	1519	23
21	320	331	11	47	1633	1657	24
23	385	397	12	49	1776	1801	25
25	456	469	13	51	1925	1951	26
27	533	547	14	53	2080	2107	27

表格 5. 當 $a = 2k - 1$ 時最大基本擬畢氏三角形之三邊長

接著我們繼續觀察表格 4, 發現 gcd 為 3 的基本擬畢氏數 (綠框) 之 a 亦呈現完美的規律, 其正好為公差是 8 的偶數, 與我們的引理 6 不謀而合, 更增加了我們的好奇心. 我們繼續研究其三邊長的規律, 發現其和最大奇數定理一樣, 也是最大基本擬畢氏三角形. 因此我們藉由前面的引理與定理, 推出最大偶數定理, 並加以證明之.

定理 2.5 (最大偶數定理). $\forall k \geq 2$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $p = 12k^2 - 4k - 1 \in \mathbb{N}$, 使得 $8k, p, p + 4k + 2$ 為最大基本擬畢氏三角形之三邊長.

證明.

1. 取 $m = 2k - 1, n = 2k + 1$,

$$n^2 - m^2 = (n + m)(n - m) = 8k,$$
$$m^2 + 2mn = (2k - 1)(2k - 1 + 4k + 2) = 12k^2 - 4k - 11 = p,$$
$$m^2 + mn + n^2 = (n + m)^2 - mn = 16k^2 - (4k^2 - 1) = 12k^2 + 1 = p + 4k + 2.$$

$\because (2k - 1, 2k + 1) = 1$ 且 $2k + 1 - (2k - 1) = 2$ 與 3 互質

$\therefore 8k, p, p + 4k + 2$ 為基本擬畢氏數.

2.

$$c - b = 4k + 2 = \frac{8k}{2} + 2 = \frac{a}{2} + 2,$$

由推論一, $\frac{a}{2} + 2$ 為 $c - b$ 之最大下界.

$\therefore$ 此為當 $a = 8k$ 時最大基本擬畢氏三角形. $\square$

a	b	c	$c-b$	a	b	c	$c-b$
16	39	49	10	96	1679	1729	50
24	95	109	14	104	1975	2029	54
32	175	193	18	112	2295	2353	58
40	279	301	22	120	2639	2701	62
48	407	433	26	128	3007	3073	66
56	559	589	30	136	3399	3469	70
64	735	769	34	144	3815	3889	74
72	935	973	38	152	4255	4333	78
80	1159	1201	42	160	4719	4801	82
88	1407	1453	46	168	5207	5293	86

表格 6. 當 $a = 8k$ 時最大基本擬畢氏三角形之三邊長

補充: 我們取 k 為 ≥ 2 之正整數. 因為當 k 取 1 時, 我們會得到三邊長為 8, 7, 13, 此時偶數邊不是最小邊, 並不符合最大偶數定理.

2.3 60° 三角形 (迷擬畢氏三角形) 之探討

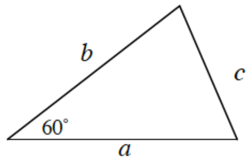

圖 7

(註: 我們接下來的敘述皆以 a, b, c 表三邊長, 且 c 為夾角 60 度所對應之邊長.)

2.3.1 迷擬畢氏數製造機

我們利用和擬畢氏數製造機同樣的方法可得到

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

令 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$, 可表示為一橢圓 $T : x^2 - xy + y^2 = 1$

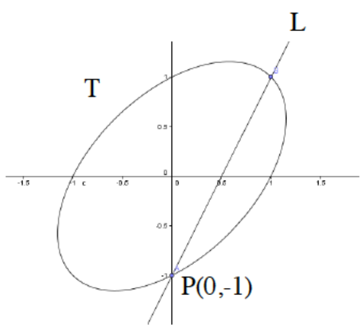

圖 8

解 T 在第一象限上之點 (x, y), $x, y \in \mathbb{Q}$, 令 L 為過 $P(0, -1)$ 與第一象限之直線

$$L : y + 1 = kx. \quad (k \in \mathbb{Q} \text{ 且 } k > 1)$$

則當 k 取大於 1 之有理數時, 可求出橢圓上在第一象限內的所有有理點

$\because k \in \mathbb{Q} \therefore$ 令 $k = \frac{n}{m}, m, n \in \mathbb{N}, (m,n) = 1$
$\because k > 1 \therefore n > m$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2mn - m^2}{n^2 - mn + m^2} = \dfrac{a}{c} \\ y = \dfrac{n^2 - m^2}{n^2 - mn + m^2} = \dfrac{b}{c}, \end{cases}$$

得到迷擬畢氏數

$$\begin{cases} a = 2mn - m^2 \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 - mn + n^2. \end{cases} \qquad (n > m \text{ 且 } (m,n) = 1)$$

$\because$ 當 k 確定時, L 隨之確定
$\therefore$ 上述要求的數對 (m,n) 和迷擬畢氏數 a,b,c 之間成一一對應且映成.

2.3.2 解決迷擬畢氏數製造機之缺陷

基本迷擬畢氏數的定義需滿足迷擬畢氏三角形之三邊長且三邊互質, 而迷擬畢氏數製造機所製造出來的數不一定會符合基本迷擬畢氏數, 且會重複; 仿造擬畢氏三角形的做法, 我們推出引理 7.

m	n	$n-m$	a	b	c	gcd	a/gcd	b/gcd	c/gcd
1	2	1	3	3	3	3	1	1	1
1	3	2	5	8	7	1	5	8	7
1	4	3	7	15	13	1	7	15	13
1	5	4	9	24	21	3	3	8	7
1	6	5	11	35	31	1	11	35	31
1	7	6	13	48	43	1	13	48	43
1	8	7	15	63	57	3	5	21	19

表格 7. 當 $m = 1$ 時迷擬畢氏數製造機結果

我們利用與 120 度三角形類似的方法, 推出並證明引理 7 和 8.

引理 7. 若 $n + m$ 為 3 的倍數, 則迷擬畢氏數 a,b,c 皆為 3 的倍數.

引理 8. 任一迷擬畢氏數陣列 (a,b,c) 必不可能對應到兩組不同的 (m,n).

藉此我們可推得 (m,n) 與 (a,b,c) 之關係為一對一且映成.

2.3.3 基本迷擬畢氏數定理之製成

藉由引理 7, 8 和製造機, 我們可以完整的推出所有迷擬畢氏數組, 且數組不重複.

定理 2.6 (基本迷擬畢氏數定理). 若 a, b, c 為基本迷擬畢氏數, 則存在唯一的一組 $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, $n > m$ 且不為 3 的倍數

$$s.t. \begin{cases} a = 2mn - m^2 \\ b = n^2 - m^2 \\ c = m^2 - mn + n^2. \end{cases}$$

與 120 度三角形不同的是, 60 度三角形並沒有不可互換定理, 我們發現有反例出現.

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \\ c = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \\ c = 7 \end{cases}$$

2.3.4 邊界關係

我們觀察大量數據後, 提出並以類似 120 度三角形的方法證明引理 9.

引理 9 (邊界關係). 設 a 為最小邊長, 當 $b \to \infty$ 時, $b - c \to \frac{a}{2}$

2.3.5 迷擬畢氏三角形的面積, 周長與上界之關係

接著我們又再利用類似的方法提出並證明引理十, 得知面積與周長成正相關.

引理 10 (周長, 面積與上界之關係). 當 a 固定, 且 $a < c < b$ 之情況下:

1. 面積越大, 則 $b - c$ 越大.
2. 周長越大, 則 $b - c$ 越大.

2.3.6 邊差上界定理

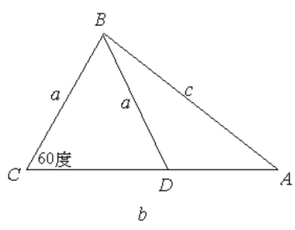

圖 9

定理 2.7 (邊差上界定理). 設 a, b, c 為基本擬畢氏數, $a < c < b$, 則 $b - c < \frac{a}{2}$

證明. 作正 $\triangle BCD$, 因為 $\overline{BD}=a, \overline{AD}=b-a, \overline{AB}=c$, 所以 $\triangle ABD$ 為擬畢氏三角形

$$\therefore c-(b-a)>\frac{a}{2} \Rightarrow b-c<\frac{a}{2}$$

所以我們對面積與周長皆最大的三角形加以定義, 將三邊互質且以 a 為最小邊之基本迷擬畢氏三角形中, 面積最大且周長最大的, 稱為 a 之最大基本迷擬畢氏三角形. □

因為結果牽扯到 $\frac{a}{2}$, 所以我們決定利用 a 的奇偶性, 來探討 $\frac{a}{2}$ 的性質. 我們先討論偶數, 而推得引理 11, 12 並以與 120 度三角形類似的方法證明之.

引理 11. 設 a 為偶數, 而 a, b, c 為基本迷擬畢氏數且 $a<c<b$, 則 $b-c$ 必為偶數.

引理 12. 設 a, b, c 為基本迷擬畢氏數, 當 a 為偶數時, 則 a 必為 8 的倍數.

藉由引理 11, 12, 我們推導出進階的邊差上界定理.

推論三. 當 a 為奇數時, $b-c \leq \frac{a-1}{2}$.

推論四. 當 a 為偶數時, $b-c \leq \frac{a}{2}-2$.

2.3.7 奇數與偶數的最大基本迷擬畢氏三角形

觀察大量數據後我們發現可以將迷擬畢氏數依其最大公因數 (gcd) (紅框) 分類, 而每一類皆有其規律.

m	n	a	b	c	gcd	$a/$ gcd	$b/$ gcd	$c/$ gcd
2	3	8	5	7	1	8	5	7
2	4	12	12	12	12	1	1	1
2	5	16	21	19	1	16	21	19
2	6	20	32	28	4	5	8	7
2	7	24	45	39	3	8	15	13
2	8	28	60	52	4	7	15	13
2	9	32	77	67	1	32	772	67
2	10	36	96	84	12	3	8	7
2	11	40	117	103	1	40	117	103
2	12	44	140	124	4	11	35	31
2	13	48	165	147	3	16	55	49
2	14	52	192	172	4	13	48	43
2	15	56	221	199	1	56	221	199
2	16	60	252	228	12	5	21	19
2	17	64	285	259	1	64	285	259
2	18	68	320	292	4	17	80	73
2	19	72	357	327	3	24	119	109
2	20	76	396	364	4	19	99	91
2	21	80	437	403	1	80	437	403
2	22	84	480	444	12	7	40	37
2	23	88	525	487	1	88	525	487
2	24	92	572	532	4	23	143	133
2	25	96	621	579	3	32	207	193
2	26	100	672	628	4	25	168	157

表格 8. 當 $m=2$ 時迷擬畢氏數製造機結果 (觀察 gcd 與其為 3 和12 的基本迷擬畢氏數)

其中我們發現 gcd 為 12 的基本迷擬畢氏數 (藍框) 之 a 和擬畢氏三角形一樣呈現完美的規律, 我們同時以幾何與代數進行解讀, 發現其正好又是最大基本迷擬畢氏三角形. 因此我們藉由前面的引理與定理, 推出最大奇數定理, 並加以證明之.

定理 2.8 (最大迷擬奇數定理). $\forall k \geq 2$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $q = 3k^2 - 2k \in \mathbb{N}$, 使得 $2k-1, q, q-k+1$ 為最大基本迷擬畢氏三角形之三邊長.

證明. 作一基本擬畢氏三角形 $\triangle ABC$ 且 a 為最小邊, 在 $\overrightarrow{AC}$ 上取一點 D 使得 $\overline{BC}=\overline{CD}$, 連 $\overline{BD}$, 因此 $\triangle ABD$ 為迷擬畢氏三角形.

$$\triangle ABD \text{ 面積} = \triangle ABC \text{ 面積} + \triangle BDC \text{ 面積}$$

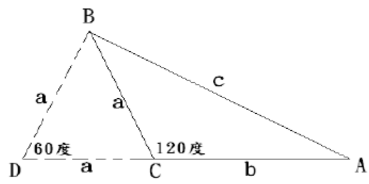

圖 10

因為當 a 固定時, $\triangle BDC$: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 為定值, 所以 $\triangle ABC$ 愈大時, $\triangle BDA$ 愈大, 當 $\triangle ABC$ 為最大基本擬畢氏三角形時, $\triangle ABD$ 面積最大.

由最大奇數定理得知, 存在 $p=3k^2-4k+1$, 使得 $2k-1, p, p+k$ 為最大基本擬畢氏三角形之三邊長, 此時 $\triangle ABD$ 之邊長為 $a, a+b, c$, 也就是 $2k-1, 3k^2-2k, 3k^2-3k+1$. $\because (a,b,c)=1 \therefore (a,a+b,c)=1$, 又 a 為最小邊, 因此 $\triangle BDA$ 為最大基本迷擬畢氏三角形. □

驗證:

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2-ab-c^2\\
&=(2k-1)^2+(3k^2-2k)^2-(2k-1)(3k^2-2k)-(3k^2-3k+1)^2\\
&=4k^2-4k+1+9k^4-12k^3+4k^2-6k^3+7k^2-2k-9k^4+18k^3-15k^2+6k-1\\
&=0.
\end{aligned}$$

由餘弦定律可得知其為迷擬畢氏三角形

$$\begin{aligned}
b-c&=(3k^2-2k)-(3k^2-3k+1)\\
&=k-1\\
&=\frac{(2k-1)-1}{2}=\frac{a-1}{2}.
\end{aligned}$$

由推論三與引理 10 可知其為最大迷擬畢氏三角形.

a	b	c	$b-c$	a	b	c	$b-c$
3	8	7	1	21	341	331	10
5	21	19	2	23	408	397	11
7	40	37	3	25	481	469	12
9	65	61	4	27	560	547	13
11	96	91	5	29	645	631	14
13	133	127	6	31	736	721	15
15	176	169	7	33	833	817	16
17	225	217	8	35	936	919	17
19	280	271	9	37	1045	1027	18

表格 9. 當 $a=2k-1$ 時最大基本迷擬畢氏三角形之三邊長

接著我們繼續觀察表格 8, 發現 gcd 為 3 的基本迷擬畢氏數 (綠框) 之 a 亦呈現完美的規律, 其正好為公差是 8 的偶數, 與我們的引理 6 不謀而合, 研究後發現其和最大奇數定理一樣, 也是最大基本迷擬畢氏三角形. 因此我們藉由前面的引理與定理, 推出最大偶數定理, 並加以證明之.

定理 2.9 (最大迷擬偶數定理). $\forall k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $q = 12k^2+4k-1 \in \mathbb{N}$, 使得 $8k, q, q-4k+2$ 為最大基本迷擬畢氏三角形之三邊長.

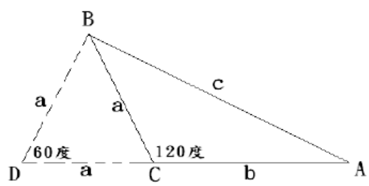

圖 11

證明. 由最大偶數定理得知, 存在 $p = 12k^2-4k-1$, 使得 $8k, p, p+4k+2$ 為最大基本擬畢氏三角形之三邊長, 此時 $\triangle ABD$ 之邊長為 $a, a+b, c$, 也就是 $8k, 12k^2+4k-1, 12k^2+1$. $\because (a,b,c)=1 \therefore (a, a+b, c)=1$. 又 a 為最小邊, 因此 $\triangle BDA$ 為最大基本迷擬畢氏三角形. $\square$

驗證:

$$
\begin{aligned}
& a^2+b^2-ab-c^2 \\
&= (12k^2+4k-1)^2+(8k)^2-(12k^2+4k-1)(8k)-(12k^2+1) \\
&= 144k^4+96k^3-8k^2-8k+1+64k^2-96k^3-32k^2+8k-144k^4-24k^2-1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

由餘弦定律可知其為迷擬畢氏三角形

$$
\begin{aligned}
b-c &= (12k^2+4k-1)-(12k^2+1) \\
&= 4k-2 \\
&= \frac{8k}{2}-2=\frac{a}{2}-2
\end{aligned}
$$

由推論四與引理 10 可知其為最大迷擬畢氏三角形

a	b	c	$b-c$	a	b	c	$b-c$
8	15	13	6	88	1495	1453	126
16	55	49	18	96	1775	1729	138
24	119	109	30	104	2079	2029	150
32	207	193	42	112	2407	2353	162
40	319	301	54	120	2759	2701	174
48	455	433	66	128	3135	3073	186
56	615	589	78	136	3535	3469	198
64	799	769	90	144	3959	3889	210
72	1007	973	102	152	4407	4333	222
80	1239	1201	114	160	4879	4801	234

表格 10. 當 $a=8k$ 時最大基本迷擬畢氏三角形之三邊長

補充: 與三角形的最大偶數定理不同 120° , 我們取 k 為 ≥ 1 之正整數. 雖然 8, 7, 13 不符合最大偶數定理, 其仍可製造出最大基本迷擬畢氏三角形.

2.4 擬畢氏三角形與費瑪點之應用

我們推測任意整數邊三角形的費瑪點不可能將其分成三個擬畢氏三角形若其結果正確, 我們將證明它; 若錯誤, 想找出反例.

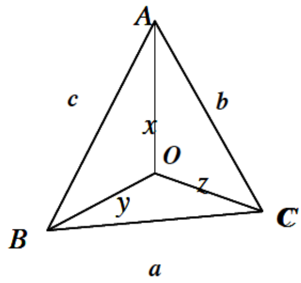

圖 12

已知一個任意三角形 ABC, 我們沿 $\overline{AB}$ 作一個正三角 ABC'. 接著做 $\overline{C'H}$ 使得 $\overline{C'H} \perp \overrightarrow{CB}$, 並令 $\angle C'BH = \theta$.

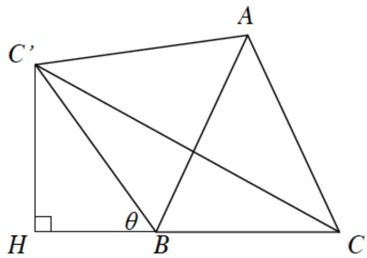

圖 13

定理 2.10. 當 $\cos\theta$ 為無理數時, 則任意整數邊三角形的費瑪點不可能將其分成三個擬畢氏三角形.

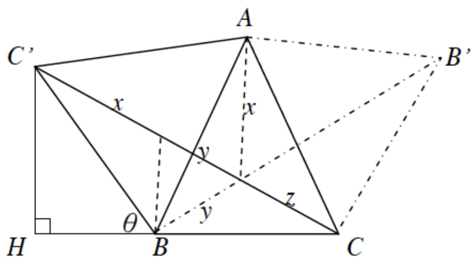

圖 14

證明. 從費瑪點的作圖中, 我們可以得到 $\overline{CC'}$ 為通過費瑪點之直線, 且 $\overline{CC'} = x + y + z$.

藉由畢氏定理, 我們可以得到

$$\begin{aligned}&(a+c\cos\theta)^2+(c\sin\theta)^2=(x+y+z)^2\\ &\Rightarrow a^2+c^2\cos^2\theta+2ac\cos\theta+c\sin^2\theta=(x+y+z)^2\\ &\Rightarrow a^2+c^2+2ac\cos\theta=(x+y+z)^2.\end{aligned}$$

當 $\cos\theta$ 為無理數時, 則 $(x+y+z)^2$ 必為無理數, 可得 $x+y+z\notin\mathbb{N}$. 因此, 當 $\cos\theta$ 為無理數時, 則任意整數邊三角形的費瑪點不可能將其分成三個擬畢氏三角形. □

2.5 討論及未來展望

1. 經由教授的建議, 我們從與畢氏三角形相關的同餘數 (Congruent numbers) 問題延伸擬畢氏三角形的 N.

   由於擬畢氏三角形其面積必為 $\sqrt{3}$ 之有理數倍數, 因此我們令面積: $\frac{ab}{4}\sqrt{3}=N'\sqrt{3}$

$a=m^2+2mn$	$b=n^2-m^2$	$c=m^2+mn+n^2$	$N'=\frac{ab}{4}$	化簡 N'
5	3	7	3.75	
7	8	13	14	
16	5	19	20	$=2^{\times}5$
33	7	37	57.75	
11	24	31	66	
13	35	43	113.75	
56	9	61	126	$=3^2\times 14$
39	16	49	156	$=2^2\times 39$
85	11	91	233.75	
17	63	73	267.75	
32	45	67	360	$=6^2\times 10$
19	80	91	380	

表格 11

由表中可發現若將 $(32,45,67)$ 這一組基本擬畢氏數組同除 6, 可得 $a=\frac{16}{3}$, $b=\frac{15}{2}$, $c=\frac{67}{6}\Rightarrow$ 使得 $N'=10$.

但畢氏三角形的同餘數中並沒有 10 (如下列)

5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31

因此我們知道畢氏三角形的同餘數與擬畢氏三角形的 N 並沒有一一對應. 未來我們希望可以繼續研究, 找出畢氏三角形同餘數與擬畢氏三角形 N 之間的關係.

2. $c = m^2 + mn + n^2$ 為一二元二次正定型, 圖形為一封閉橢圓, 我們固定 c 求取有限組整數解 (m, n), 但目前只能從現有的資料反推回去. 我們將擬畢氏數組做統整 (如下表).

$a = m^2 + 2mn$	$b = n^2 - m^2$	$c = m^2 + mn + n^2$	(m, n)
5	3	7	
7	8	13	
16	5	19	
...	...	...	
51	40	79	
85	11	91	$H(5, 6)$
19	80	91	$G(1, 9)$
57	55	97	
...	...	...	
249	1591	1729	$E(3, 40)$
656	1305	1729	$F(8, 37)$
1185	799	1729	$I(15, 32)$
415	1496	1741	
...	...	...	

表格 12

固定 c 的前提下, 我們能找到的 a, b 並不多, 因此由其得出的 (m, n) 數組之數量只呈緩慢地增加.

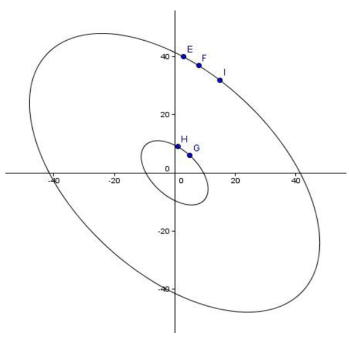

圖 15

由圖, 我們可以發現點集中於第一象限的左上方. 因為 $n > m$, 所以我們所代的數據皆是在固定 m 的前提下, 不斷拉大 n 得到的結果. 當 $m \to n$ 時, $a = m^2 + 2mn = m^2 + mn + m \times n$ 會趨近於 $c = m^2 + mn + n^2 = m^2 + mn + n \times n$, 其將為我們找到有限組中的最後一組. 未來我們希望可以透過更大量的數據, 找出 c 與 (m, n) 數組的關連.

3. 我們試著將特別角推廣至一般解.

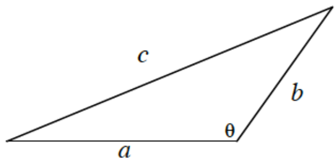

圖 16

設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之三邊長且 $\angle C = \theta$, 由餘弦定律

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\cos\theta\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = 1. \tag{6}$$

令 $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$, 代入 (6) 式, $\therefore \Gamma : x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta = 1$ 之圖形表一橢圓

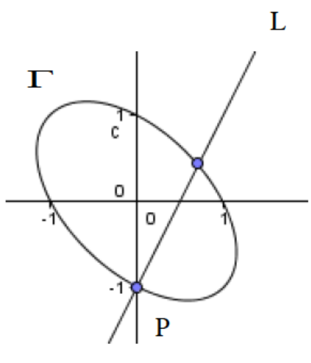

圖 17

解 Γ 在第一象限上之點 (x, y), $x, y \in \mathbb{Q}$, 令 L 為過 $P(0, -1)$ 與第一象限之直線 L 與 Γ 聯立, 可得

$$x^2+(kx-1)^2-2x(kx-1)\cos\theta=1,$$
$$(k^2-2k\cos\theta+1)x^2+(2\cos\theta-2k)x=0,$$
$$x=\frac{2k-2\cos\theta}{k^2-2k\cos\theta+1}\text{ or }x=0.\text{ (不合, 此即 }P\text{ 點)}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2k-2\cos\theta}{k^2-2k\cos\theta+1} \\ y=\dfrac{k^2-1}{k^2-2k\cos\theta+1}. \end{cases}$$

則當 k 取大於 1 之有理數時, 可求出橢圓上在第一象限內的所有有理點

$$\because k\in\mathbb{Q}\ \therefore \text{令 } k=\frac{n}{m}, m,n\in\mathbb{N}, (m,n)=1$$
$$\because k>1\ \therefore n>m.$$

$$x=\frac{2k-2\cos\theta}{k^2-2k\cos\theta+1}=\frac{2\frac{n}{m}-2\cos\theta}{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2\frac{n}{m}\cos\theta+1}=\frac{2mn-2m^2\cos\theta}{n^2-2mn\cos\theta+m^2},$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2mn-2m^2\cos\theta}{n^2-2mn\cos\theta+m^2}=\dfrac{a}{c} \\ y=\dfrac{n^2-m^2}{n^2-2mn\cos\theta+m^2}=\dfrac{b}{c}, \end{cases}$$

得到一般解的製造機

$$\begin{cases} a=2mn-2m^2\cos\theta \\ b=n^2-m^2 \\ c=n^2-2mn\cos\theta+m^2. \end{cases}\qquad (n>m\text{ 且 }(m,n)=1)$$

$\because$ 當 k 確定時, L 隨之確定

$\therefore$ 上述所求的數對 (m,n) 和三角形三邊長 (a,b,c) 之間成一一對應且映成.

令 $\cos\theta=\frac{y}{x}$, 其中 $x,y\in\mathbb{Z}$, $(x.y)=1$, $x>0$,

$$\begin{cases} a=2xmn-2ym^2 \\ b=xn^2-xm^2 \\ c=xn^2-2ymn+xm^2, \end{cases}$$

另外, 若 $2|x$, 則 $2|(a,b,c)$, 因此, 上述的製造機必須修改為

$$\begin{cases} a=xmn-ym^2 \\ b=\dfrac{x}{2}n^2-\dfrac{x}{2}m^2 \\ c=\dfrac{x}{2}n^2-ymn+\dfrac{x}{2}m^2. \end{cases}$$

引理 13. 若 $n+m$ 為 $x+y$ 的倍數, 則整數邊三角形三邊長 a,b,c 皆為 $x+y$ 的倍數.

證明. 令 $n+m=(x+y)t, t\in\mathbb{N}\Rightarrow n=(x+y)t-m$,

$$\begin{cases} a=2xmn-2ym^2 \\ b=xn^2-xm^2 \\ c=xm^2-2ymn+xn^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2xm(xt+yt-m)-2ym^2=(x+y)(2xmt-2m^2) \\ b=x(xt+yt-m)^2-xm^2=(x+y)(xt^2(x+y)-2m) \\ c=xm^2-2ym(xt+yt-m)+x(xt+yt-m)^2 \\ \quad =(x+y)(2m^2-2mt(x+y)+xt^2(x+y)) \end{cases}$$

$\therefore a,b,c$ 皆為 $(x+y)$ 的倍數. □

引理 14. 若 $n-m$ 為 $x-y$ 的倍數, 則整數邊三角形三邊長 a,b,c 皆為 $x-y$ 的倍數.

證明. 令 $n-m=(x-y)t, t\in\mathbb{N}\Rightarrow n=(x-y)t-m$,

$$\begin{cases} a=2xmn-2ym^2 \\ b=xn^2-xm^2 \\ c=xm^2-2ymn+xn^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2xm(xt-yt+m)-2ym^2=(x-y)(2xmt+2m^2) \\ b=x(xt-yt+m)^2-xm^2=(x-y)(xt^2(x-y)+2m) \\ c=xm^2-2ym(xt-yt+m)+x(xt-yt+m)^2 \\ \quad =(x-y)(2m^2+2mt(x-y)+xt^2(x-y)) \end{cases}$$

$\therefore a,b,c$ 皆為 $(x-y)$ 的倍數. □

推論: 令 $d|a$, $d|b$, $d|c$,

$$d|ay+cx=(x^2-2y^2)m^2+x^2n^2,$$

$$d|2m^2(x^2-y^2) \tag{7}$$

$$\Rightarrow d|(7)+2b(x^2-y^2)$$

$$d|2xn^2(x^2-y^2).$$

$$\because (x,y)=1$$

$$\therefore d|(n-m)(n+m)$$

只要證明出 $(n-m)(n+m)$ 與 $(x-y)(x+y)$ 互質便可得到 $d=1$. 我們希望未來可以求得基本擬畢氏數定理, 最大奇數定理和最大偶數定理的一般解.

參考文獻

[1] 盛立人, 嚴鎮軍; 從勾股定理談起. 臺北市, 九章出版社 2001.

[2] 單墫; 趣味數論. 臺北市, 九章出版社 2002.

[3] 蔡聰明; 數學拾貝. 臺灣, 三民出版社 2003.