三角形變換的性質探討

楊嘉鴻

國立新竹高級中學

Abstract

Ghang, Geng-cher's article [3] described an interesting problem: Let P be an interior point of known triangle $T_1 = \triangle A_1B_1C_1$, $\overleftrightarrow{A_1P}$, $\overleftrightarrow{B_1P}$, $\overleftrightarrow{C_1P}$ intersect $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ at A_2, B_2, C_2, respectively, to obtain a new triangle $T_2 = \triangle A_2B_2C_2$. Repeat the process to obtain a sequence of triangles $\{T_n\}$, and discuss the convergent rate of sequence $\{T_n\}$. Gang's idea motivated our study of the problem: Let point P and a triangle $T_0 = \triangle A_0B_0C_0$ be on the plan, connect P with the three vertices of the triangle $T_0 = \triangle A_0B_0C_0$ to form three triangles and then construct the circumcenters of these three triangles to form a new triangle $T_1 = \triangle A_1B_1C_1$, and inductively obtain the sequence of triangles $\{T_n\}$. We define the "almost linearly convergent rate" of sequences and explain that this rate's behavior is similar to that of "linearly convergent rate". We found the convergent region for the triangle sequence $\{T_n\}$, the necessary and sufficient condition for which $\{T_n\}$ would converge, where it converged to, and that it had "almost linearly convergent rate".

摘要: 常庚哲著: 一套三角形的收斂速度, 第 61 ∼ 71 頁, 曾經介紹一有趣的數學題目:「設 P 是已知三角形 $T_1 = \triangle A_1B_1C_1$ 內部一點, $\overleftrightarrow{A_1P}$, $\overleftrightarrow{B_1P}$, $\overleftrightarrow{C_1P}$ 分別交 $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ 於 A_2, B_2, C_2, 可得到一個新三角形 $T_2 = \triangle A_2B_2C_2$. 依次得三角形序列 $\{T_n\}$, 討論三角形序列 $\{T_n\}$ 收斂到點 P 的速度.」這個概念引起我們研討下面問題: 設平面上一點 P 和一三角形 $T_0 = \triangle A_0B_0C_0$, 將點 P 與三角形 $T_0 = \triangle A_0B_0C_0$ 三頂點連線後形成另外三個三角形, 再分別取三角形的外心, 構成一個新三角形 $T_1 = \triangle A_1B_1C_1$, 依次得三角形序列 $\{T_n\}$. 我們定義任意序列的「殆」 線性收斂速度, 它是與線性收斂速度類似的一種收斂速度. 我們也建立: $\{T_n\}$ 的收斂區域，在 P 點的函數上 $\{T_n\}$ 收斂的充要條件, $\{T_n\}$ 收斂至何處, $\{T_n\}$ 收斂速度為殆線性收斂速度.

1 簡介

常庚哲 [3] 曾經介紹一的題目:「設 P 是已知三角形 $T_1 = \triangle A_1B_1C_1$ 內部一點, $\overleftrightarrow{A_1P}$, $\overleftrightarrow{B_1P}$, $\overleftrightarrow{C_1P}$ 分別交 $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ 於 A_2, B_2, C_2, 可得到一個新三角形 $T_2 = \triangle A_2B_2C_2$. 由此變換依次得三角形序列 $\{T_n\}$.」, 但他沒有討論 P 在 T_1 外部的情形.

我們的目標為: 若 P 為平面上任一點, 找出一種類似 [3] 的變換, 稱為 T_p 變換, 證明所得的三角形序列的收斂速度, 並且找到收斂區的充要條件.

我們利用外心的 T_p 變換, 用 $\{T_n : n = 0,1,2\cdots\}$ 表變換所得的三角形序列. 為了要討論平面上每一點的斂散性, 將平面分成三類區域. 定理證明需要分類討論, 第 4 節才可得到收斂區 $\overline{C}$. h 為三角函數, 我們證明 $\{T_n\}$ 收斂的充要條件為 $h < 1$.

第 2 節討論變換的幾何性質. 第 3 節探討 $\{T_n\}$ 的收斂速度. 第 4 節討論 P 點決定 $\{T_n\}$ 收斂的充要條件. 第 5 節為結論.

我們主要的結果有二: 在第 3 節我們定義「殆」線性收斂速度 (almost linearly convergent rate), 它是與線性收斂速度類似的一種收斂速度; 在定理 3.7, 我們推得三角形序列 $\{T_n\}$ 收斂到 P 點的收斂速度為殆線性收斂. 在定理 4.6 中, 我們討論 P 點在何處為 $\{T_n\}$ 收斂的充要條件, 即找到區域 $\overline{C}$.

我們使用的技巧有三角函數, 座標幾何, 序列的斂散, 反證法, 大學數值分析的線性收斂速度 [1] 及微積分 [2] 的連續性與子序列收斂性.

由衷感謝丘成桐數學獎提供這樣一個機會和各位評審專業的批評指正. 評審臺大數學系王金龍教授在本數學獎比賽時要求一天內探討定理 4.6-3, $h = 1$ 的斂散性. 我才能將 $h < 1$ 從是 $\{T_n\}$ 收斂的充份條件推廣到是其充要條件, 而使得本文的結果改進很多. 也感謝洪誌陽老師長期以來的用心指導, 感謝交通大學洪慧念教授, 清華大學王懷權教授, 楊克峻副教授的多處指正.

2 單次變換的幾何性質

我們令平面上一三角形 $\triangle A_0B_0C_0$, 一定點 P 和以下的變換:

定義 2.1.

1. 令函數 $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(A,B,C) = O$, O 為 $\triangle ABC$ 之外心. 令 $T_P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $T_P(A,B,C) = (F(P,A,B), F(P,B,C), F(P,C,A))$, 稱其為 T_P 變換.

2. 令全文中 i, n 表任意非負整數, $j = 0,1,2$.

3. 令原始的三角形為 $\triangle A_0B_0C_0$, $A_{i+1} = F(P,A_i,B_i)$, $B_{i+1} = F(P,B_i,C_i)$, $C_{i+1} = F(P,C_i,A_i)$, 其中 F 為上述所定義的變換.

4. 令 $\{T_n\} = \{\triangle A_nB_nC_n\}$, 其子序列 $\{T(j,n)\} = \{T_{j+3n}\}$, $j = 0,1,2$, 我們稱此為三步子序列.

5. 由定義 2.1, 我們定義 $T_P(T_i) = T_{i+1}$.

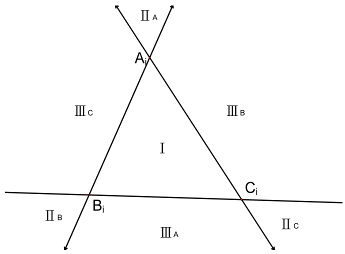

圖 1 : 將平面分成三類七個不含邊界的區域

我們不討論 P 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$, $\overleftrightarrow{B_iC_i}$, $\overleftrightarrow{C_iA_i}$ 上的狀況, 因為 $\triangle PA_iB_i$, $\triangle PB_iC_i$, $\triangle PC_iA_i$ 中有不為三角形者.

定義 2.2. 我們又將 T_0 的內部記為 $\text{int}(T_0)$, 即 $I = \text{int}(T_0)$.

定理 2.3.

$$\sin(\angle PA_iB_i) = \sin(\angle PA_{i+1}B_{i+1}),\ \sin(\angle PB_iA_i) = \sin(\angle PA_{i+1}C_{i+1}),$$
$$\sin(\angle PB_iC_i) = \sin(\angle PB_{i+1}C_{i+1}),\ \sin(\angle PC_iB_i) = \sin(\angle PB_{i+1}A_{i+1}),$$
$$\sin(\angle PC_iA_i) = \sin(\angle PC_{i+1}A_{i+1}),\ \sin(\angle PA_iC_i) = \sin(\angle PC_{i+1}B_{i+1}).$$

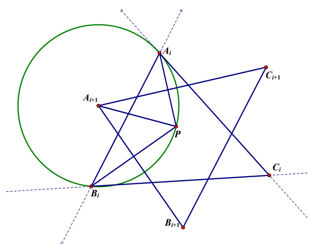

圖 2

證明. 我們討論 P 點在不同區塊 (見圖 1 的區域) 中的情形:
當 $P \in \text{I}$ 時, 如圖 2, 圓 A_{i+1} 為 $\triangle PA_iB_i$ 的外接圓,

$$\sin(\angle PA_iB_i) = \frac{\overline{B_iP}}{2\overline{A_{i+1}P}},$$

根據 sin 的定義, 可得

$$\sin(\angle PA_{i+1}B_{i+1}) = \frac{\overline{B_iP}}{2\overline{A_{i+1}P}},\ \sin(\angle PA_iB_i) = \sin(\angle PA_{i+1}B_{i+1}).$$

同理可證此式在 $P \in \text{II}$, $P \in \text{III}$ 時成立並可證定理其他等式. □

3 收斂條件及收斂速度

3.1 $\{T_n\}$ 的收斂速度

引理 3.1. $\overline{PA_{i+1}} = \frac{\overline{PA_i}}{2\sin(\angle PB_iA_i)}$, $\overline{PB_{i+1}} = \frac{\overline{PB_i}}{2\sin(\angle PC_iB_i)}$, $\overline{PC_{i+1}} = \frac{\overline{PC_i}}{2\sin(\angle PA_iC_i)}$.

證明.

當 $P \in \mathrm{I}$ 時, 如圖 2,

$$\sin(\angle PB_iA_i) = \sin(\angle PA_{i+1}C_{i+1}) = \frac{\overline{PA_i}/2}{\overline{PA_{i+1}}},$$

$$\overline{PA_{i+1}} = \frac{\overline{PA_i}}{2\sin(\angle PB_iA_i)}.$$

同理可證當 $P \in \mathrm{II}$, $P \in \mathrm{III}$ 時成立並證引理另二等式. □

定義 3.2. 令 $k = \sin(\angle PA_0C_0)\sin(\angle PB_0A_0)\sin(\angle PC_0B_0)$ 及 $h = 1/8k$. 又記為 $k = k(P)$, $h = h(P)$. 若 P 為定點, 則 k, h 為常數.

引理 3.3. 若 P 不在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$, $\overleftrightarrow{B_iC_i}$, $\overleftrightarrow{C_iA_i}$ 上, 包含 $P \in \mathrm{I} = \mathrm{int}(T_0)$, 則 $k, h > 0$.

證明. $k = \sin(\angle PA_0C_0)\sin(\angle PB_0A_0)\sin(\angle PC_0B_0)$, 而其中的角度皆為一, 二象限角, 故 $k, h > 0$. □

定義 3.4. 由 Burden and Faires [1], 若 $\{a_n\}$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \overline{d} \in (0,1)$, 則稱 $\{a_n\}$ 線性收斂到 0. 又稱 d 為 $\{a_n\}$ 的收斂常數 (asymptotic error constant).

定義 3.5.

1. 若 $\{b_n\}$ 的三個子序列 $\{b(j,n)\} = \{b_{j+3n}\}$, $j = 0,1,2$, 皆滿足線性收斂, 有下述相同的 d, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b(j,n+1)}{b(j,n)}\right| = d_j = d \in (0,1)$, $d_0 = d_1 = d_2 = d$ 則稱 $\{b_n\}$ 之收斂速度為殆線性 (almost linearly) 收斂速度.
2. 若 $\{\overline{PA_n}\}$, $\{\overline{PB_n}\}$, $\{\overline{PC_n}\}$ 均殆線性收斂到 0, 則稱三角形序列 $\{T_n\}$ 及其頂點序列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ 均殆收斂到 P 點.

定義 3.6. 符號 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = P$ 表示 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = P$, 即 $\{T_n\}$ 收斂到單點 P.

定理 3.7. i, n 表任意非負整數, $j = 0,1,2$:

1. $\frac{\overline{PA_{i+3}}}{\overline{PA_i}} = \frac{\overline{PB_{i+3}}}{\overline{PB_i}} = \frac{\overline{PC_{i+3}}}{\overline{PC_i}} = h(P) > 0.$
2. $\{\overline{PA_{j+3n}}\}$, $\{\overline{PB_{j+3n}}\}$, $\{\overline{PC_{j+3n}}\}$ 的收斂 (發散) 速度等價於序列 $\{(h(P))^n\}$.

3. 再若 $h(P) < 1$, 則 $\{\overline{PA_n}\}$, $\{\overline{PB_n}\}$, $\{\overline{PC_n}\}$ 的收斂速度均為殆線性收斂, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = P$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = P$, 亦即 $\{T_n\}$ 及 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ 均殆收斂到 P 點.

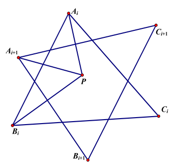

圖 3

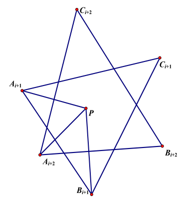

圖 4

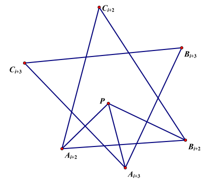

圖 5

證明.

1. 如圖 3, 圖 4, 圖 5. 根據引理 3.1, 我們可以知道
$$\overline{PA_{i+j+1}} = \frac{\overline{PA_{i+j}}}{2\sin(\angle PB_{i+j}A_{i+j})},$$
根據定理 2.3, $\sin(\angle PB_{i+2}A_{i+2)} = \sin(\angle PC_{i+1}B_{i+1})$, $\sin(\angle PC_{i+1}B_{i+1}) = \sin(\angle PA_iC_i)$, $\sin(\angle PB_{i+1}A_{i+1)} = \sin(\angle PC_iB_i)$. 經代入後可得
$$\overline{PA_{i+3}} = \frac{1}{8\sin(\angle PA_iC_i)\sin(\angle PB_iA_i)\sin(\angle PC_iB_i)}\overline{PA_i}.$$
又根據定理 2.3, 我們可以得到 $8\sin(\angle PA_iC_i)\sin(\angle PB_iA_i)\sin(\angle PC_iB_i) = \cdots = 8\sin(\angle PA_0C_0)\sin(\angle PB_0A_0)\sin(\angle PC_0B_0) = 1/h(P)$. 故 $\overline{PA_{i+3}} = h(P)\overline{PA_i}$. 同理可證 $\overline{PB_{i+3}} = h(P)\overline{PB_i}$, $\overline{PC_{i+3}} = h(P)\overline{PC_i}$, 得證.

2. 由定理 3.7-1
$$\overline{PA_j} = \overline{PA_{j+3}}/h(P) = \cdots = \overline{PA_{j+3n}}/(h(P))^n,$$
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\overline{PA_{j+3n}}/(h(P))^n\right) = \overline{PA_j} > 0$, 故 $\{\overline{PA_{j+3n}}\}$ 的收斂 (發散) 速度等價於 $\{(h(P))^n\}$. 同理 $\{\overline{PB_{j+3n}}\}$, $\{\overline{PC_{j+3n}}\}$ 的收斂 (發散) 速度亦等價於 $\{(h(P))^n\}$.

3. 已知 $h(P) < 1$, $j = 0, 1, 2$, 由定理 3.7-1 的證明,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{PA_{j+3(n+1)}}/\overline{PA_{j+3n}}\right) = h(P) \in (0,1).$$
故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\overline{PA_{n+3}}/\overline{PA_n}\right) = h(P)$, 同理 $\{\overline{PB_n}\}$, $\{\overline{PC_n}\}$ 與 $\{\overline{PA_n}\}$ 均符合殆線性收斂速度的定義. 又由定理 3.7-2 的證明過程可得
$$\lim_{n\to\infty}\overline{PA_{j+3n}} = 0,\ \lim_{n\to\infty} A_{j+3n} = P = \lim_{n\to\infty} A_n,$$
同理 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = P$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = P$. □

定義 3.8. 因為定理 3.7-1 的性質, 我們稱 $h(P)$ 為三步縮放比.

3.2 相似三角形子序列

下面用到引理 3.10, 引理 3.11 及引理 3.12 和引理 3.13 來證明定理 3.14, 但須分類證明. 因篇幅有限, 省略後三個引理的證明.

定義 3.9. 在以下第 3, 4 節中, 凡 $\angle X_{i+a}PX_{i+b}$ 者為有向角, $X = A, B, C$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 其他角則非有向角.

引理 3.10. 以逆時針為正, P 在不同區塊時有向角 $\angle A_iPA_{i+1}$ 和 $\angle PB_iA_i$, 有向角 $\angle B_iPB_{i+1}$ 和 $\angle PC_iB_i$, 有向角 $\angle C_iPC_{i+1}$ 和 $\angle PA_iC_i$ 的關係如下.

$$\begin{aligned}
&\text{若 } P \in \mathrm{I}, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = (\pi/2) - \angle PB_iA_i,\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = (\pi/2) - \angle PC_iB_i, \angle C_iPC_{i+1} = (\pi/2) - \angle PA_iC_i.\\
&\text{若 } P \in \mathrm{II}_A, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = \angle PB_iA_i - (\pi/2),\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = (\pi/2) - \angle PC_iB_i, \angle C_iPC_{i+1} = \angle PA_iC_i - (\pi/2).\\
&\text{若 } P \in \mathrm{II}_B, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = \angle PB_iA_i - (\pi/2),\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = \angle PC_iB_i - (\pi/2), \angle C_iPC_{i+1} = (\pi/2) - \angle PA_iC_i.\\
&\text{若 } P \in \mathrm{II}_C, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = (\pi/2) - \angle PB_iA_i,\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = \angle PC_iB_i - (\pi/2), \angle C_iPC_{i+1} = \angle PA_iC_i - (\pi/2).\\
&\text{若 } P \in \mathrm{III}_A, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = (\pi/2) - \angle PB_iA_i,\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = \angle PC_iB_i - (\pi/2), \angle C_iPC_{i+1} = (\pi/2) - \angle PA_iC_i.\\
&\text{若 } P \in \mathrm{III}_B, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = (\pi/2) - \angle PB_iA_i,\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = (\pi/2) - \angle PC_iB_i, \angle C_iPC_{i+1} = \angle PA_iC_i - (\pi/2).\\
&\text{若 } P \in \mathrm{III}_C, \text{則 } \angle A_iPA_{i+1} = \angle PB_iA_i - (\pi/2),\\
&\quad \angle B_iPB_{i+1} = (\pi/2) - \angle PC_iB_i, \angle C_iPC_{i+1} = (\pi/2) - \angle PA_iC_i.
\end{aligned}$$

證明. L_B 為過 B_i 且垂直於 $\overline{A_iB_i}$ 之直線, L 為 $\overline{PA_i}$ 之中垂線, M 為 $\overline{PA_i}$ 之中點, 圓 A_{i+1} 為 $\triangle PA_iB_i$ 之外接圓. 先考慮 P 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$ 的一側, 若 P 與 A_i 在 L_B 異側時, 如圖 6, Q 為優弧 $\overset{\frown}{PA_i}$ 上一點.

$$\angle PB_iA_i = \frac{\overset{\frown}{PA_i}}{2} = \frac{2\pi - \overset{\frown}{PB_iA_i}}{2} = \pi - \frac{\overset{\frown}{PA_{i+1}A_i}}{2},$$

又因為 L 是 $\overline{PA_i}$ 的中垂線, 所以可以得到

$$\pi - \frac{\overset{\frown}{PA_{i+1}A_i}}{2} = \pi - \angle PA_{i+1}M,$$

即

$$\angle PB_iA_i = \pi - \angle PA_{i+1}M,\ \angle PA_{i+1}M = \pi - \angle PB_iA_i.$$

又

$$\angle A_iPA_{i+1} = -\left(\frac{\pi}{2} - \angle PA_{i+1}M\right),$$

故得

$$\angle A_iPA_{i+1} = -\left[\frac{\pi}{2} - (\pi - \angle PB_iA_i)\right] = \frac{\pi}{2} - \angle PB_iA_i.$$

同理可證 $P \in \mathrm{I}$, $P \in L_B$, P 與 A_i 在 L_B 同側時, $\angle A_iPA_{i+1}$ 與 $\angle PB_iA_i$ 的關係.

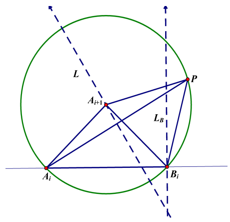

圖 6

同理可證引理中 P 在不同區域時 $\angle B_iPB_{i+1}$ 和 $\angle PC_iB_i$, $\angle C_iPC_{i+1}$ 和 $\angle PA_iC_i$ 的關係. □

引理 3.11. 令 $\triangle A_iB_iC_i$ 之外接圓 O_i, 則得表 1 至表 3.

	若 P, B_i 在 $\overleftrightarrow{C_iA_i}$ 同側時	若 P, B_i 在 $\overleftrightarrow{C_iA_i}$ 異側時
若 P 在外接圓 O_i 內	$\angle PA_{i+1}C_{i+1} = \angle PB_iA_i$	$\angle PA_{i+1}C_{i+1} = \pi - \angle PB_iA_i$
若 P 在外接圓 O_i 外	$\angle PA_{i+1}C_{i+1} = \pi - \angle PB_iA_i$	$\angle PA_{i+1}C_{i+1} = \angle PB_iA_i$

表 1

	若 P, C_i 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$ 同側時	若 P, C_i 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$ 異側時
若 P 在外接圓 O_i 內	$\angle PB_{i+1}A_{i+1} = \angle PC_iB_i$	$\angle PB_{i+1}A_{i+1} = \pi - \angle PC_iB_i$
若 P 在外接圓 O_i 外	$\angle PB_{i+1}A_{i+1} = \pi - \angle PC_iB_i$	$\angle PB_{i+1}A_{i+1} = \angle PC_iB_i$

表 2

	若 P, A_i 在 $\overleftrightarrow{B_iC_i}$ 同側時	若 P, A_i 在 $\overleftrightarrow{B_iC_i}$ 異側時
若 P 在外接圓 O_i 內	$\angle PC_{i+1}B_{i+1} = \angle PA_iC_i$	$\angle PC_{i+1}B_{i+1} = \pi - \angle PA_iC_i$
若 P 在外接圓 O_i 外	$\angle PC_{i+1}B_{i+1} = \pi - \angle PA_iC_i$	$\angle PC_{i+1}B_{i+1} = \angle PA_iC_i$

表 3

引理 3.12.

若 P, A_i 在 $\overleftrightarrow{B_iC_i}$ 同側, 則 $\angle PC_{i+2}B_{i+2} = \angle PB_iA_i$.
若 P, A_i 在 $\overleftrightarrow{B_iC_i}$ 異側, 則 $\angle PC_{i+2}B_{i+2} = \pi - \angle PB_iA_i$.
若 P, B_i 在 $\overleftrightarrow{C_iA_i}$ 同側, 則 $\angle PA_{i+2}C_{i+2} = \angle PC_iB_i$.
若 P, B_i 在 $\overleftrightarrow{C_iA_i}$ 異側, 則 $\angle PA_{i+2}C_{i+2} = \pi - \angle PC_iB_i$.
若 P, C_i 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$ 同側, 則 $\angle PB_{i+2}A_{i+2} = \angle PA_iC_i$.
若 P, C_i 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}$ 異側, 則 $\angle PB_{i+2}A_{i+2} = \pi - \angle PA_iC_i$.

引理 3.13. 以下表 4 至表 6 為真.

	P 在圓 O_i 內	P 在圓 O_i 外
$P \in \mathrm{I}$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \pi/2 - \angle PB_{i+1}A_{i+1}$,	$\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \pi/2 - \angle PB_{i+2}A_{i+2}$
$P \in \mathrm{II}_A$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \pi/2 - \angle PB_{i+1}A_{i+1}$,	$\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \pi/2 - \angle PB_{i+2}A_{i+2}$
$P \in \mathrm{II}_B$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \angle PB_{i+1}A_{i+1} - \pi/2$,	$\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \angle PB_{i+2}A_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{II}_C$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \pi/2 - \angle PB_{i+2}A_{i+2}$,	$\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \angle PB_{i+2}A_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{III}_A$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \angle PB_{i+1}A_{i+1} - \pi/2$, $\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \pi/2 - \angle PB_{i+2}A_{i+2}$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \pi/2 - \angle PB_{i+1}A_{i+1}$, $\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \pi/2 - \angle PB_{i+2}A_{i+2}$
$P \in \mathrm{III}_B$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \pi/2 - \angle PB_{i+1}A_{i+1}$, $\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \angle PB_{i+2}A_{i+2} - \pi/2$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \angle PB_{i+1}A_{i+1} - \pi/2$, $\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \angle PB_{i+2}A_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{III}_C$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \angle PB_{i+1}A_{i+1} - \pi/2$, $\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \angle PB_{i+1}A_{i+1} - \pi/2$	$\angle A_{i+1}PA_{i+2} = \pi/2 - \angle PB_{i+1}A_{i+1}$, $\angle A_{i+2}PA_{i+3} = \angle PB_{i+2}A_{i+2} - \pi/2$

表 4

	P 在圓 O_i 內	P 在圓 O_i 外
$P \in \mathrm{I}$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \pi/2 - \angle PC_{i+1}B_{i+1}$,	$\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \pi/2 - \angle PC_{i+2}B_{i+2}$
$P \in \mathrm{II}_A$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \pi/2 - \angle PC_{i+1}B_{i+1}$,	$\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \angle PC_{i+2}B_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{II}_B$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \pi/2 - \angle PC_{i+1}B_{i+1}$,	$\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \pi/2 - \angle PC_{i+2}B_{i+2}$
$P \in \mathrm{II}_C$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \angle PC_{i+1}B_{i+1} - \pi/2$,	$\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \angle PC_{i+2}B_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{III}_A$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \angle PC_{i+1}B_{i+1} - \pi/2$, $\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \angle PC_{i+2}B_{i+2} - \pi/2$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \pi/2 - \angle PC_{i+1}B_{i+1}$, $\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \angle PC_{i+2}B_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{III}_B$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \angle PC_{i+1}B_{i+1} - \pi/2$, $\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \pi/2 - \angle PC_{i+2}B_{i+2}$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \pi/2 - \angle PC_{i+1}B_{i+1}$, $\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \pi/2 - \angle PC_{i+2}B_{i+2}$
$P \in \mathrm{III}_C$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \pi/2 - \angle PC_{i+1}B_{i+1}$, $\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \angle PC_{i+2}B_{i+2} - \pi/2$	$\angle B_{i+1}PB_{i+2} = \angle PC_{i+1}B_{i+1} - \pi/2$, $\angle B_{i+2}PB_{i+3} = \angle PC_{i+2}B_{i+2} - \pi/2$

表 5

	P 在圓 O_i 內	P 在圓 O_i 外
$P \in \mathrm{I}$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \pi/2 - \angle PA_{i+1}C_{i+1}$,	$\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \pi/2 - \angle PA_{i+2}C_{i+2}$
$P \in \mathrm{II}_A$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \angle PA_{i+1}C_{i+1} - \pi/2$,	$\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \angle PA_{i+2}C_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{II}_B$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \pi/2 - \angle PA_{i+1}C_{i+1}$,	$\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \angle PA_{i+2}C_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{II}_C$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \pi/2 - \angle PA_{i+1}C_{i+1}$,	$\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \pi/2 - \angle PA_{i+2}C_{i+2}$
$P \in \mathrm{III}_A$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \pi/2 - \angle PA_{i+1}C_{i+1}$, $\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \angle PA_{i+2}C_{i+2} - \pi/2$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \angle PA_{i+1}C_{i+1} - \pi/2$, $\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \angle PA_{i+2}C_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{III}_B$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \angle PA_{i+1}C_{i+1} - \pi/2$, $\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \angle PA_{i+2}C_{i+2} - \pi/2$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \pi/2 - \angle PA_{i+1}C_{i+1}$, $\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \angle PA_{i+2}C_{i+2} - \pi/2$
$P \in \mathrm{III}_C$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \angle PA_{i+1}C_{i+1} - \pi/2$, $\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \pi/2 - \angle PA_{i+2}C_{i+2}$	$\angle C_{i+1}PC_{i+2} = \pi/2 - \angle PA_{i+1}C_{i+1}$, $\angle C_{i+2}PC_{i+3} = \pi/2 - \angle PA_{i+2}C_{i+2}$

表 6

定理 3.14. 若 i 是非負整數且以逆時針為正, 則

1. $T_i \to T_{i+3}$ 對 P 的轉角皆相等, 即有向角 $\theta_i = \angle A_iPA_{i+3} = \angle B_iPB_{i+3} = \angle C_iPC_{i+3} \in \big(-(3/2)\pi, (3/2)\pi\big)$. θ_i 顯然代表變換前後三角形的旋轉角度.
2. 若 $P \in \mathrm{I}$, 則 $\theta_i = (3\pi/2) - (\angle PB_iA_i + \angle PC_iB_i + \angle PA_iC_i)$.
   若 $P \in \mathrm{II}_A$, 則 $\theta_i = -(\pi/2) - (-\angle PB_iA_i + \angle PC_iB_i - \angle PA_iC_i)$.
   若 $P \in \mathrm{II}_B$, 則 $\theta_i = -(\pi/2) - (-\angle PB_iA_i - \angle PC_iB_i + \angle PA_iC_i)$.
   若 $P \in \mathrm{II}_C$, 則 $\theta_i = -(\pi/2) - (\angle PB_iA_i - \angle PC_iB_i - \angle PA_iC_i)$.
   若 $P \in \mathrm{III}_A$, 則 $\theta_i = (\pi/2) - (\angle PB_iA_i - \angle PC_iB_i + \angle PA_iC_i)$.
   若 $P \in \mathrm{III}_B$, 則 $\theta_i = (\pi/2) - (\angle PB_iA_i + \angle PC_iB_i - \angle PA_iC_i)$.
   若 $P \in \mathrm{III}_C$, 則 $\theta_i = (\pi/2) - (-\angle PB_iA_i + \angle PC_iB_i + \angle PA_iC_i)$.
3. $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_i$.

證明.

1. 我們根據引理 3.10, 引理 3.11, 引理 3.12, 引理 3.13 的結果得到
   當 $P \in \mathrm{I}$ 時,

$$\begin{aligned}
&\angle A_iPA_{i+3} \\
&\quad = \angle A_iPA_{i+1} + \angle A_{i+1}PA_{i+2} + \angle A_{i+2}PA_{i+3} \\
&\quad = \left(\frac{\pi}{2} - \angle PB_iA_i\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \angle PB_{i+1}A_{i+1}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \angle PB_{i+2}A_{i+2}\right) \\
&\quad = \left(\frac{\pi}{2} - \angle PB_iA_i\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \angle PC_iB_i\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \angle PA_iC_i\right) \\
&\quad = \frac{3}{2}\pi - \left(\angle PB_iA_i + \angle PC_iB_i + \angle PA_iC_i\right),
\end{aligned}$$

同理我們可以寫出 $\angle B_iPB_{i+3}, \angle C_iPC_{i+3}$ 的表示式, 而得

$$\begin{aligned}\angle A_iPA_{i+3} = \angle B_iPB_{i+3} = \angle C_iPC_{i+3} &= \theta_i \\ &= \frac{3}{2}\pi - (\angle PB_iA_i + \angle PC_iB_i + \angle PA_iC_i).\end{aligned}$$

2. 同理可得當 $P \in \mathrm{II}$, $P \in \mathrm{III}$ 且 P 在圓 O_i 外, $P \in \mathrm{III}$ 且 P 在圓 O_i 內所有不同區域時 θ_i 的值. 因為 $\angle PB_iA_i, \angle PC_iB_i, \angle PA_iC_i \in (0, \pi)$, 所以 $\theta_i \in \big(-(3/2)\pi, (3/2)\pi\big)$.

3. 從定理 3.7, $(\overline{PA_{i+3}}/\overline{PA_i}) = (\overline{PB_{i+3}}/\overline{PB_i}) = h(P)$, 及 $\angle A_{i+3}PB_{i+3} = \angle A_iPB_i \pm (\angle A_iPA_{i+3} - \angle B_iPB_{i+3}) = \angle A_iPB_i$, 故

$$\triangle PA_{i+3}B_{i+3} \sim \triangle PA_iB_i,\ \triangle PB_{i+3}A_{i+3} = \triangle PB_iA_i.$$

同理 $\angle PC_{i+3}B_{i+3} = \angle PC_iB_i$, $\angle PA_{i+3}C_{i+3} = \angle PA_iC_i$, 由 2. 得 $\theta_{i+3} = \theta_i$. 再根據引理 3.10,

$$\begin{aligned}\theta_{i+1} = \angle A_{i+1}PA_{i+4} &= \angle A_iPA_{i+3} - \angle A_iPA_{i+1} + \angle A_{i+3}PA_{i+4} \\ &= \angle A_iPA_{i+3} \pm (\angle PB_iA_i - \angle PB_{i+3}A_{i+3}) = \angle A_iPA_{i+3} = \theta_i,\end{aligned}$$

故 $\theta_i = \theta_{i-1} = \cdots = \theta_2 = \theta_1 = \theta_0$. □

定理 3.15. $T_{i+3} \sim T_i$, 且邊長比為 $h(P)$.

證明. 根據定理 3.7 我們可以知道

$$\frac{\overline{PA_{i+3}}}{\overline{PA_i}} = \frac{\overline{PB_{i+3}}}{\overline{PB_i}} = \frac{\overline{PC_{i+3}}}{\overline{PC_i}} = h(P),$$

且

$$\angle A_iPA_{i+3} = \angle B_iPB_{i+3} = \angle C_iPC_{i+3},$$

又

$$\angle A_{i+3}PB_{i+3} = \angle A_iPB_i \pm (\angle A_iPA_{i+3} - \angle B_iPB_{i+3}) = \angle A_iPB_i,$$

同理可得

$$\angle B_{i+3}PC_{i+3} = \angle B_iPC_i, \quad \angle C_{i+3}PA_{i+3} = \angle C_iPA_i.$$

由餘弦定理得

$$\frac{\overline{A_{i+3}B_{i+3}}}{\overline{A_iB_i}} = \frac{\overline{B_{i+3}C_{i+3}}}{\overline{B_iC_i}} = \frac{\overline{C_{i+3}A_{i+3}}}{\overline{C_iA_i}} = h(P),$$

再根據三角形的 SSS 相似性, 得 $\triangle A_{i+3}B_{i+3}C_{i+3} \sim \triangle A_iB_iC_i$, 即 $T_{i+3} \sim T_i$. □

3.3 面積序列收斂速度

定義 3.16. 令 $E(j,n)$ 為 T_{j+3n} 的面積, $j=0,1,2$, 且 $E(n)$ 為 T_n 的面積.

定理 3.17.

1. $\{E(j,n)\}$ 之收斂速度等價於 $\{(h(P))^{2n}\}$.
2. 若 $h(P)<1$, 則面積序列 $\{E(n)\}$ 殆線性收斂到 0; 若 $h(P)>1$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} E(n)=\infty$.
3. 若 $h(P)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} E(j,n)=E(j,0)$. 又若 $E(0,0)=E(1,0)=E(2,0)$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} E(n)=E(0)$; 但若 $E(0,0)=E(1,0)=E(2,0)$ 不成立, 則 $\{T_n\}$ 發散.

證明.

1. 根據定理 3.15 的證明, 做 3 次變換後相似三角形邊長比為 $h(P)$, 故面積比為 $(h(P))^2$. $E(j,n)=\cdots=(h(P))^{2n}E(j,0)$,
$$\lim_{n\to\infty}\left(E(j,n)/(h(P))^{2n}\right)=E(j,0)>0,$$
所以 $\{E(j,n)\}$ 的收斂速度等價於 $\{(h(P))^{2n}\}$.
2. 若 $h(p)<1$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} E(j,n)=0$,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left((h(P))^2\right)^{n+1}\Big/\left((h(P))^2\right)^{n}\right)=(h(P))^2\in(0,1),$$
故 $\{E(n)\}$ 殆線性收斂至 0; 若 $h(P)>1$, 則
$$\lim_{n\to\infty} E(j,n)=\infty,\ \lim_{n\to\infty} E(n)=\infty.$$
3. 若 $h(p)=1$, 則對任意 n, $E(j,n)=E(j,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} E(j,n)=E(j,0)$. 又若已知 $E(j,0)=E(0,0)$, $j=0,1,2$, 則對任意 n,
$$E(n)=E(0),\ \lim_{n\to\infty} E(n)=E(0).$$
若已知 $E(0,0)=E(1,0)=E(2,0)$ 不成立. 用反證法, 假設 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 存在, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} E(n)$ 存在; 令 $\lim\limits_{n\to\infty} E(n)=M$. 由 Finney and Thomas [2], $M=\lim\limits_{n\to\infty} E(n)=\lim\limits_{n\to\infty} E(j,n)=E(j,0)=E(0,0)=E(1,0)=E(2,0)$, 與前提矛盾, 故 $\{T_n\}$ 發散. □

以下我們討論三角形序列 $\{T_n\}$ 收斂的必要條件.

4 收斂區域

4.1 P 在 $I = \text{int}(T_0)$ 時序列發散

引理 4.1. $k(P) = \sin(\angle PA_0B_0)\sin(\angle PB_0C_0)\sin(\angle PC_0A_0)$.

證明. 我們令 P 在 $\overleftrightarrow{A_iB_i}, \overleftrightarrow{B_iC_i}, \overleftrightarrow{C_iA_i}$ 上的垂點分別為 H_A, H_B, H_C, 則證明容易, 因篇幅有限, 省略證明. □

定理 4.2.

1. 令 G 為正三角形 $T = \triangle A_0B_0C_0$ 之內心. 若 $P = G$, 則 $\{T_n\}$ 的斂散性沒有結論.
2. 若 $P \in \mathrm{I} = \text{int}(T_0)$ 且 $P \neq G$, 則 $\{T_n\}$ 發散到平面.

證明. 令

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{[1-\cos(\angle B_0A_0C_0)][1-\cos(\angle C_0B_0A_0)][1-\cos(\angle A_0C_0B_0)]},$$
$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}\Big[\cos(\angle B_0A_0C_0) + 2\cos\Big(\frac{(\angle C_0B_0A_0)+\cos(\angle A_0C_0B_0)}{2}\Big) - 1\Big],$$

由引理 4.1, $8[k(p)]^2$ 及其他計算得

$$1 \leq \frac{k_1}{k(P)} \leq \frac{k_2}{k(P)} \leq \frac{1}{8k(P)}, \text{ 即 } h(P) \geq 1.$$

$h(P) = 1$ 的充要條件為 $k(P) = k_1 = k_2 = 1/8$. 由計算可證明: 若且為若 $P = G$, 則 $h(p) = 1$. 若 $h(P) > 1$ 且 $j = 0,1,2$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{PA_{j+3n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\big(h(P)\big)^n\overline{PA_j} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{PA_n} = \infty$, 同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{PB_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{PC_n} = \infty$, 故 $\{T_n\}$ 發散到平面. □

4.2 收斂區域與發散區域

定義 4.3. 令 $\overline{C} = \overline{C}(T_0) = P : \big\{\{T_n\} \text{ 收斂}\big\}$, 即 $\overline{C}$ 為收斂區域; 令 $\overline{D} = \overline{D}(T_0) = P : \big\{\{T_n\} \text{ 發散}\big\}$, 即 $\overline{D}$ 為發散區域.

引理 4.4. 在座標下, 令定點 $A_0(x_A, y_A)$, $B_0(x_B, y_B)$, $C_0(x_C, y_C)$, 且 $h(P) = h(x,y)$. 又令

$$\begin{aligned} f(x,y) = &\Big\{64[x(y_A-y_B)-y(x_A-x_B)+(x_Ay_B-x_By_A)]^2 \\ &\times[x(y_B-y_C)-y(x_B-x_C)+(x_By_C-x_Cy_B)]^2 \\ &\times[x(y_C-y_A)-y(x_C-x_A)+(x_Cy_A-x_Ay_C)]^2\Big\} \\ &-\Big\{[(x-x_A)^2+(y-y_A)^2][(x-x_B)^2+(y-y_B)^2] \\ &\times[(x-x_C)^2+(y-y_C)^2][(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2] \\ &\times[(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2][(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2]\Big\}, \end{aligned}$$

則若且唯若 $h(P)=h(x,y)=1$, 則 $f(x,y)=0$.

證明. 若已知 $h(P)=1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} &= k(P)\\
&= \sqrt{[1-\cos^2(\angle PA_0C_0)][1-\cos^2(\angle PB_0A_0)][1-\cos^2(\angle PC_0B_0)]}\\
&= \sqrt{\left[1-\left(\frac{\overrightarrow{A_0P}\cdot\overrightarrow{A_0C_0}}{\overline{A_0P}\cdot\overline{A_0C_0}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\overrightarrow{B_0P}\cdot\overrightarrow{B_0A_0}}{\overline{B_0P}\cdot\overline{B_0A_0}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\overrightarrow{C_0P}\cdot\overrightarrow{C_0B_0}}{\overline{B_0P}\cdot\overline{C_0B_0}}\right)^2\right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left[1-\left(\frac{(x-x_A)(x_C-x_A)+(y-y_A)(y_C-y_A)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}}\right)^2\right]}\\
&\times\sqrt{\left[1-\left(\frac{(x-x_C)(x_B-x_C)+(y-y_C)(y_B-y_C)}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}}\right)^2\right]}\\
&\times\sqrt{\left[1-\left(\frac{(x-x_B)(x_A-x_B)+(y-y_B)(y_A-y_B)}{\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}\right)^2\right]},
\end{aligned}$$

將上式左右平方再經化簡後得 $f(x,y)=0$, 同理可證若 $f(x,y)=0$, 則 $h(P)=1$. □

圖 7 為我們取 $A_0(0,1)$, $B_0(0,0)$, $C_0(1,0)$ 時畫出 $f(x,y)=0$ (即 $h(P)=h(x,y)=1$) 的圖形.

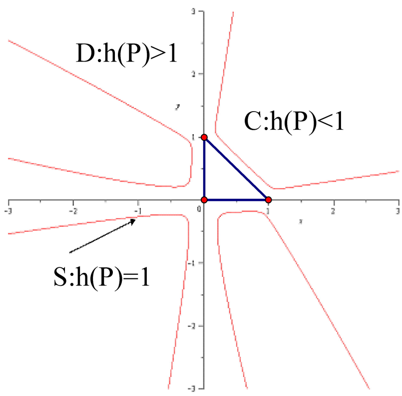

圖 7

定義 4.5. 令曲線 $S=\{(x,y):h(P)=h(x,y)=1\}=\{(x,y):f(x,y)=0\}$, S 切割平面為 C 及 D, $S\cup C\cup D=\mathbb{R}^2$ 且 S,C,D 兩兩互斥, $\operatorname{int}(T_0)\subset(D\cup S)$, 如圖 7 所標示.

定理 4.6. 令 n 是非負整數, $j=0,1,2$.

1. 若 P 為正三角形 T_0 之內心, 即 $P = G$, 則 $P = G \in S$.

2. 若且唯若 $P \in D$, 則 $h(P) > 1$; 若 $P \in D$, 則三角形序列 $\{T_n\}$ 發散至平面.

3. 若且唯若 $P \in S$, 則 $h(P) = 1$; 若 $P \in S$, 則 $\{T_n\}$ 發散.

4. 若且唯若 $P \in C$, 則 $h(P) < 1$; 若 $P \in C$, 則 $\{T_n\}$ 殆線性收斂至 P 點.

5. $\overline{C} = C$, $\overline{D} = D \cup S$. 若且唯若 $h(P) < 1$, 則 $P \in \overline{C}$, 亦即 $\{T_n\}$ 收斂. 若且唯若 $h(P) \geq 1$, 則 $P \in \overline{D}$, 即 $\{T_n\}$ 發散.

證明.

1. 由定理 4.2 的證明, 若 $P = G$, 則 $h(P) = 1$. 由定義 4.5 知 $G \in S$. (由圖 7, S 為曲線, 故 G 可視為 S 一部分曲線的退化.)

2. 由定理 4.2, 若 $P \in \mathrm{I}$ 且 $P \neq G$, 則 $h(P) > 1$. 因為 $f(x, y)$ 為多項式連續函數 [2], S, C, D 兩兩互斥, 且 $I - \{G\} \subset D$, 故而若且唯若 $P \in D$, 則由連續性得 $h(P) > 1$. 與定理 4.2 的證明相同, $\{T_n\}$ 發散至平面. 因 $I - \{G\} \neq \varnothing$, 故 $D \neq \varnothing$. 分類上不排除 $C = \varnothing$ 或 $S = \varnothing$.

3. 從定義 4.5 得 $P \in S$ 與 $h(P) = 1$ 互為充要條件. 定理 3.15 說 $T_{j+3n} \sim T_j$ 且邊長比為 $h(P)$. 已知 $h(P) = 1$, 故 $T_{j+3n} \cong T_j$. 下面用反證法. 假設 $\{T_n\}$ 收斂. 可令 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = K$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_{j+3n} = K$.

   (a) 若 $\theta_0 \neq 0$ (三步旋轉角), 則從定理 3.14 得 $\theta_i = \theta_0 \neq 0$ 且 $\theta_i \in \big(-(3/2)\pi, (3/2)\pi\big)$, $\{T_{3n}\}$ 因旋轉而發散, 此與 $\lim\limits_{n\to\infty} T_{3n} = K$ 矛盾, 故此時 $\{T_n\}$ 發散.

   (b) 另一可能必為 $\theta_0 = 0$, 由定理 3.14 得 $0 = \theta_0 = \theta_1 = \theta_2$, $T_{j+3n} = T_j$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_{j+3n} = T_j$. 從 $\lim\limits_{n\to\infty} T_{j+3n} = K$ 得 $T_0 = T_1 = K$. $T_0 = T_1$ 是從 $\{T_n\}$ 收斂的假設得到的, 所以 $T_0 = T_1$ 也是假設. 下面由反證法證 $T_0 \neq T_1$.

   從 $T_0 = T_1$ 得到 6 種對應狀況: $(A_1, B_1, C_1) = (A_0, B_0, C_0)$, (A_0, C_0, B_0), (B_0, A_0, C_0), (B_0, C_0, A_0), (C_0, B_0, A_0) 或 (C_0, A_0, B_0). 因為 A_1, B_1, C_1 分別為 $\triangle PA_0B_0$, $\triangle PB_0C_0$, $\triangle PC_0A_0$ 的外心, 故只有對應 $(A_1, B_1, C_1) = (C_0, A_0, B_0)$ 可能成立, 故此等式成立. 因此 $\overline{C_0A_0} = \overline{C_0B_0} = \overline{C_0P}$, $\overline{A_0B_0} = \overline{A_0C_0} = \overline{A_0P}$, $\overline{B_0C_0} = \overline{B_0A_0} = \overline{B_0P}$, 即 $\overline{A_0B_0} = \overline{B_0C_0} = \overline{C_0A_0} = \overline{PA_0} = \overline{PB_0} = \overline{PC_0}$, 亦即 P 為正三角形 $\triangle A_0B_0C_0$ 之外心且 $\overline{PA_0} = \overline{A_0B_0}$, 但此與 $\overline{PA_0} = (\sqrt{3}/2)\overline{A_0B_0}$ 矛盾, 故得證 $T_0 \neq T_1$. 此又與 $\lim\limits_{n\to\infty} T_{j+3n} = K = T_0 = T_1$ 矛盾, 故 $\{T_n\}$ 收斂的假設不為真, 因此得證 3. (若 $P \in S$, 則 $\{T_n\}$ 發散).

4. 已知若且唯若 $P \in D$, 則 $h(P) > 1$, 又 S, C, D 兩兩互斥, 故而若且唯若 $P \in C$, 則 $h(P) < 1$. 再由定理 3.7 的證明得 $\{T_n\}$ 殆線性收斂至 P 點.

5. 由定義 4.3 及 2., 3., 4., $\overline{C} = C$. 若且唯若 $h(P) < 1$, 則 $P \in C = \overline{C}$, 亦即 $\{T_n\}$ 收斂. 同樣從 2., 3., 4. 得 $\overline{D} = D \cup S$. 故若且唯若 $h(P) \geq 1$, 則 $P \in \overline{D}$. □

5 結論

常庚哲 [3] 是本文的動機, 但因他未討論收斂區域, 故三角形序列 $\{T_n\}$ 的收斂區域及收斂速度為我們研究目標.

本文主要結果有二, 為定理 3.7 的殆線性收斂速度 (rate) 及定理 4.6 的收斂區域 (region), 即若且唯若 $P \in C$, 亦即 $h(P) < 1$, 則三角形序列 $\{T_n\}$ 殆線性收斂至 P 點.

本文定義 3.4 為對線性收斂速度的定義, 其收斂常數為 $d \in (0,1)$. 因為定理 3.7-1. 說 $\{\overline{PA_n}\}$ 等的三步縮放比為 $h = h(P) > 0$, 所以若 $h \in (0,1)$, 定理 3.7-2 只能證明 $\{\overline{PA_n}\}$ 等的三步子序列為線性收斂, 即收斂階 (order) 為 $\{h^n\}$. 故在定義 3.5 我們定義殆線性收斂, 即序列的三步子序列為線性收斂, 而其收斂常數為 $h \in (0,1)$.

定理 3.7-3. 說若 $h < 1$, 則三角形序列 $\{T_n\}$ (含 $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}$) 收斂到平面上單點 P, 且其速度為殆線性收斂速度.

定理 4.6 說 $h(P) = 1$ 的充要條件是 $P \in S$. 由定義 4.5 知 C 不包含邊界及 $I - \{G\}$. 我們在定理 4.6 證明 $\overline{C} = C$ 且 $\{T_n\}$ 收斂的充要條件是 $h(P) < 1$, 即 $P \in \overline{C}$. D 是另一區域且 $\overline{D} = D \cup S$. $\{T_n\}$ 發散的充要條件是 $h(P) \geq 1$, 即 $P \in \overline{D}$.

参考文獻

[1] Burden, R.L, and J.D. Faires, "Numerical Analysis, 8th ed", Thomsom Brooks/Cole, p.75, 2005.

[2] Finney, Ross and G.B. Thomas, "Calculus, 2nd ed", Addison-Wesley, p.96-97, 561, 1994.

[3] 常庚哲,〈一套三角形的收斂速度〉,《初等數學論叢》, 第七輯, 上海教育出版社, 61 ∼ 67 頁, 1980.