多邊形的尋短

歐翰青

國立武陵高級中學

Abstract

In the field of geometry, the shortest path problem has always been an old, popular and rich applications issue. From the earliest to the river then go back and put out the fire to modern telecommunications network systems, whether it is set up rail lines, facilities, relief route planning, it all has applications. This work is focusing on how to find the shortest circumference of the inscribed polygon within a polygon. The subjects we're discussing are whether the solution exists or not, solvability conditions, mapping methods and what graphics it will approach if no solution. Research method is to use the Mirror method or as light reflection principle, which commonly used in geometry, and classified into odd and even side polygon various situations to discuss respectively.

摘要: 在幾何領域中, 最短路徑問題一直是一門古老, 熱門以及富應用性的問題, 從最早的到河邊提水救火到近代的電信網路系統, 不管是鐵路路線設置, 設施分布或是救災路徑規劃上均有應用, 而這份文章主要討論凸 n 邊形內接周長最小 n 邊形是否有解, 有解的條件與作法及無解時會趨近於何種圖形, 研究方法是使用幾何中常用的鏡射法或稱為光反射原理, 並分類成奇數邊形與偶數邊形的各種情況逐一討論.

1 研究簡介

在研究數學的途中, 我在高中數學競賽教程與幾何明珠中同時看到了以下的問題: 如何在銳角三角形的三邊上各找一點非頂點, 作出周長最短的內接三角形?

得到的結論是作三角形三垂線在三邊上的交點並將之連接, 於是我想將它推廣至鈍角三角形與凸 n 邊形的情況, 便進行了以下的研究. 關於之前的研究結果, 全國科展第 29 屆高中組第三名《 n 邊形內具有最小周長的內接 n 邊形》所做出來的研究結果有: 以三角函數的方式表示出最短內 n 邊形的周長, 當凸多邊形並且 n 是偶數時, 兩組間角的和相等時是解的必要條件, 並且能計算解的周長, 這個時候有無限多組解, 在 n 為奇數的凸多邊形時, 有解的必要條件是 $(n-2)90^\circ > (n-1)/2 > (n-3)90^\circ$ 並且也能算出周長.

另外, 當我完成我的作品時, 我發現另一組研究者, 第 38 屆國中數學科展作品第二名《鏡射乾坤》所做出來的研究結果有: 若三角形是鈍角時, 則只有退化解, 也就是其中的 2 點和原三角形的某個頂點重合, 圓內接四邊形的無解狀況 (解分兩種, 但未寫出成立條件), 非圓內接四邊形的解 (分成了十種情況討論) 以及正奇數邊形有唯一解, 正偶數邊形有無限多組解.

就之前研究結果不足的部分, 全國科展第 29 屆高中組第三名《 n 邊形內具有最小周長的內接 n 邊形》, 所探討的是最短多邊形的周長長度, 什麼情況有解這兩項, 使用的是相當繁複的三角函數運算與克拉瑪公式解法, 而當無解時到底會退化至何種圖形並未討論, 無論奇、偶數邊形, 也僅討論有解的必要條件, 另外的一組研究者, 第 38 屆國中數學科展作品第二名《鏡射乾坤》, 推導出了鈍角三角形的退化解與四邊形部分的退化解, 但對於圓內接四邊形退化解的成立條件雖有討論, 但並未列有像本文的簡單判斷條件, 而對非圓內接四邊形退化解的形狀成立條件分成了十種情況進行了相當冗長的分段討論 (事實上只要分兩種情況就足夠了), 在 n 邊形部分也只推導出正 n 邊形中奇數邊形有唯一解. 一般凸邊形的結果, 僅列出結論, 而未有討論的細節, 以及在無解時, 究竟退化到何種圖形並未討論.

另外, 在完成我的研究之後, 我得到了一份文獻, 得知尋短問題在歷史上其實早有研究, 名叫 Billiard Problem (撞球檯問題), 在 Marcel Berger 所著的 *Geometry I*, Springer-Verla 的第九章 9.4 節, 他在書中也發現了包括我在內的三份作品中的一些結果, 例如在圓內接四邊形的情況下, 如果有解, 就有無限多解, 所用的也是標準的反射方法, 但文獻中並沒有看到我所推出的有解條件, 也並未討論無解時會趨近於何種圖形.

在我的這篇文章中, 證明過程中使用的除了幾何中常用的鏡射法外, 並未進行龐雜繁複的三角函數與代數運算來證明上述結果, 使得過程得以簡化許多並增加了可讀性, 並且也就這兩組研究者中不足的部分進行討論與延伸.

本研究主要討論三角形, 四邊形, 偶數邊形, 奇數邊形的內接最短多邊形有解的情況與條件, 無解的情況以及無解時會退化成何種圖形, 此外也試著

討論凸 n 邊形內接周長最小 m 邊形中最簡單的情況: 四邊形內接最短三角形, 此時也可證明一定無解. 我證明這個情況並沒有解.

研究方法的部分, 我先嘗試證明了原始題目以了解它的概念, 然後思考鈍角三角形與直角三角形的情況, 隨後證明其無解且會趨近於何種圖形, 到此大概擬定了推廣到 n 邊形時的研究方向.

在研究四邊形的過程中, 我一開始找了幾個特例 (如等腰梯形等) 使用了鏡射法, 發現圓內接四邊形有些情況的解, 隨後證明其解有無限多個, 並找到一種簡單的作圖法作出其中一解, 並在思考過後找出了有解的條件, 而非圓內接四邊形在嘗試了菱形等特例後, 利用了趨近法證明了此種情況不可能有解, 再由鏡射法中的卡點連線導出了在何種情況會趨近於何圖形.

而推廣到偶數邊形時, 發現其結論跟四邊形差不多, 只是在偶數邊形時我們必須鏡射 $n-1$ 次後才能判定兩組間角和相等的情況是否有解.

至於奇數邊形, 我則推出了一組跟其內接最小奇數邊形有關的 n 個角度的方程式 (此組方程式只有在奇數邊形時不會相依, 之前的研究者《 n 邊形內具有最小周長的內接 n 邊形》使用了三角函數與克拉瑪公式後亦有推出一樣的結果, 但我使用的是更為簡潔的幾何方法), 而這組方程式的每一個角都有範圍限制, 同時每一個角都能用原來奇數邊形的各個角來表示, 同時發現將此式帶回三角形恰能應證之前所推出的結論 (即只有銳角三角形有解), 但後來聯絡之前的作者何思賢先生後發現這只是奇數邊形的必要條件, 但仍能用它來證明凹 n 邊形不可能有解, 奇數邊形的充要條件仍然必須鏡射後才能求得.

新研究出來的結果主要有: 凸四邊形內接最短四邊形有解的情況為圓內接四邊形且圓心在四邊形內, 凸四邊形內接最短四邊形無解的情況為圓內接四邊形且圓心在四邊形外或非圓內接四邊形, 凸四邊形內接最短四邊形無解時, 若為圓內接四邊形且圓心在四邊形外時會趨近於一三角形, 非圓內接四邊形會趨近於一三角形或較短對角線的兩倍, 取決於和較大的兩對角是否有一角小於 $90°$, 當 $n=2k, k\in\mathbb{N}$ 時, 凸 n 邊形內接最短 n 邊形有解的充要條件是: 此凸 n 邊形的兩組間角和必相等, 且鏡射後, 由上卡點與下卡點所作之平行線不會交錯排列 (定義請參照附錄三). 當 $n=2k, k\in\mathbb{N}$ 時, 無解的情況: 若凸 n 邊形兩組間角和相等, 而且, 鏡射後由上卡點與下卡點所作之平行線有 k 條交錯排列, 內接最小凸 n 邊形的 k 個角會趨近於這 k 條平行線所對應的頂點; 若兩組間角和不相等, 且當較大的 $\frac{n}{2}$ 間角有 t 個角不符合 $2\angle a_{k-1}a_ka_{k+1}-\angle a_{k-2}a_ka_{k+2}<180°$ 時, 它的內接最小凸 n 邊形會趨近於一 $n-t$ 邊形, 且 $n-t$ 邊形在凸 n 邊形頂點上的角會在不符合 $2\angle a_{k-1}a_ka_{k+1}-\angle a_{k-2}a_ka_{k+2}<180°$ 的 t 角上. 當 $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$ 時,

凸 n 邊形內接周長最小 n 邊形, 解的充要條件在文章裡有仔細的描述 (見 p.13), 奇多邊形無解的情況與偶多邊形類似, 凹多邊形情形一定無解. 至於凸 n 邊形內接周長最小 m 邊形, 本文初步探討凸四邊形內接周長最小三角形的情形, 結論為一定無解.

最後, 由衷感謝丘成桐數學獎提供機會讓我表達我的作品; 感謝評審們給予我的肯定和鼓勵; 感謝武陵高中吳明霞導師的指導; 最後也要感謝我的父母, 他們期許我健康, 樂觀, 自信, 熱誠, 我會全力以赴, 未來希望在數學領域方面更上一層樓.

2 研究主體

2.1 有解情況

2.1.1 銳角三角形:

原命題: 如何在銳角三角形的三邊上各找一點, 作出周長最短的內接三角形?
原命題結論: 作三角形三垂線在邊上的交點並將之連接, 所得的三角形即為所求.

定理 2.1. 當 n 邊形內接 n 邊形與原 n 邊形各邊所夾的角兩兩相等時, 此內接 n 邊形為內接最小 n 邊形.

定理 2.1 在三角形與凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 時的證明:

1. 設 D, E, F 分別為 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 上的任意點, 將原三角形對其三邊依序鏡射五次, 並延長 $\overline{BC}, \overline{B''C''}, \overline{B''''C''''}$ 可得圖 1 ($'$ 的數目意義請見附錄 .B):

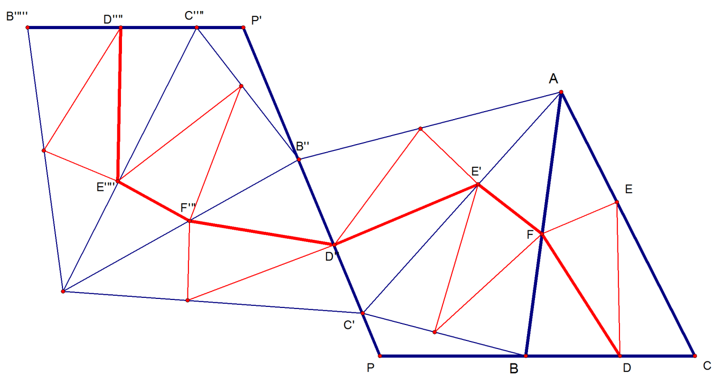

圖 1:

求證. 當 $\angle FDB = \angle EDC$, $\angle DEC = \angle FEA$, $\angle AFE = \angle DFB$ 時, $\triangle FED$ 的周長會最小.

證明. $\triangle FED$ 周長之兩倍

$$= 2(\overline{DE}+\overline{FE}+\overline{ED}) = \overline{DF}+\overline{FE'}+\overline{E'D''}+\overline{D''F'''}+\overline{F'''E''''}+\overline{E''''D''''}$$
$$\geq \overline{DD''}+\overline{D''D''''} \geq \overline{DD''''}.$$

四邊形 $AC'PB$ 中,

$$\begin{aligned}\angle P'PC &= 360^\circ - (180^\circ - \angle AC'B'') - (180^\circ - \angle ABC) - \angle C'AB \\ &= \angle B + \angle C - \angle A = \angle PP'B'''''\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{BC} // \overline{B'''''C''''}$ (內錯角相等), 又 $\overline{DC} = \overline{D''''C''''}$

$\Rightarrow DCD''''C''''$ 為平行四邊形, $\overline{DD''''} = \overline{CC''''}$(定值)

$\Rightarrow \overline{DD''''}$ 為定值不受 D 點移動之影響, 且為 D, D'''' 兩點間可能的最短距離.

所以不管D, E, F 在任一位置, $\triangle FED$ 周長之兩倍恆小於等於一定值, 即為 $\overline{DD''''}$, 並且如果存在, 這個解必定是唯一的, 因為 D'' 並不會隨著 $\overline{DD''''}$ 移動而移動, 而是與 $\overline{DD''''}$ 靠近或是遠離, 只有當D, D'', D'''' 三點共線時 $\triangle FED$ 周長之兩倍才可能等於 $\overline{DD''''}$, 因此當解成立時, D'' 必恰好移動到 $\overline{DD''''}$ 上, 所以解為唯一. 現在來看等號是否可能成立, 若 $\angle FDB = \angle EDC$, $\angle DEC = \angle FEA$, $\angle AFE = \angle DFB$ 時, 依照上述的做圖法可得圖 2: □

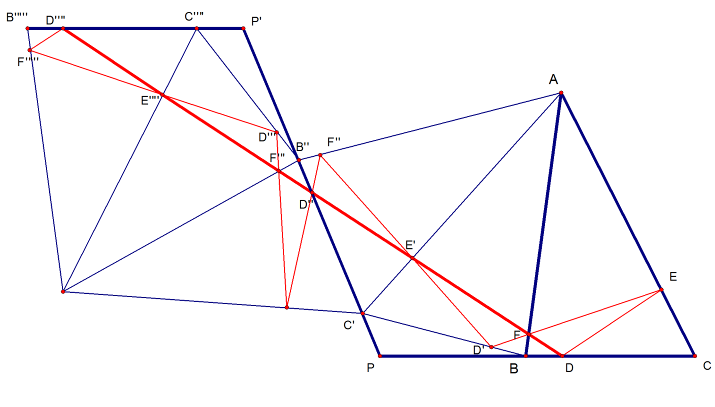

圖 2:

因為 $\angle AFE = \angle DFB, \angle AFE = \angle AFE' \Rightarrow \angle DFB$ 與 $\angle AFE'$ 為對頂角, D, F, E' 會共線, 同理可得 F, E' ,D'' 會共線, E', D'', F''' 會共線 $\cdots$ $\Rightarrow D, F, E', D'', F''', E'''', D''''$ 會共線 $\Rightarrow \triangle FED$ 周長之兩倍

$$= \overline{DF} + \overline{FE'} + \overline{E'D''} + \overline{D''F'''} + \overline{F'''E''''} + \overline{E''''D''''} = \overline{DD''''}$$

$\Rightarrow$ 當 $\angle FDB = \angle EDC, \angle DEC = \angle FEA, \angle AFE = \angle DFB$ 時, $\triangle FED$ 為此三角形內接周長最短三角形. 同理, 此證明法在凸 n 邊形($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$)時也是可行的, 設 n 個頂點依序為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 只要對 $\overline{a_n a_1}$ 鏡射 $2n-1$ 次, 並用稍後證明的引理 2.2 來證明 $\overline{a_n a_{n-1}} // \overline{a_n{'}^{(2n-1)} a_{n-1}{'}^{(2n-2)}}$ (即三角形的 $\overline{BC} // \overline{B'''''C''''}$), 其他的步驟一概相同, 同時可知奇數邊形時若解存在則必為唯一.

2. **求證.** 作三角形三邊之垂足並將之連接, 所得的三角形會符合定理 2.1 的條件, 也就是 $\angle FDB = \angle EDC, \angle DEC = \angle FEA, \angle AFE = \angle DFB$. 作 $\triangle ABC$ 的外接圓, 如圖 3:

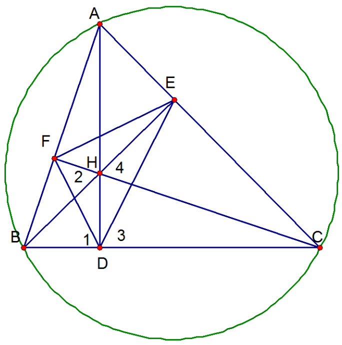

圖 3:

$$\because \overline{HD} \perp \overline{BC}, \overline{HF} \perp \overline{BA}$$

$$\therefore HDBF$$

共圓, 令

$$\angle FDB = \angle 1, \angle FHB = \angle 2, \angle EDC = \angle 3, \angle EHC = \angle 4,$$

$$\because \angle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BF} = \angle 2 = \angle 4 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EC} = \angle 3 \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$$

同理可得

$$\angle FDB = \angle EDC, \angle DEC = \angle FEA, \angle AFE = \angle DFB,$$

證畢.

由 1. 2. 知 : 作三角形三垂線在邊上的交點並將之連接, 所得的三角形即為所求.

2.1.2 圓內接四邊形－圓心在四邊形內的情況:

$ABCD$ 為圓內接四邊形, 且圓心在四邊形中, 連接兩對角線, 令其交點為 E, 過 E 分別對四邊垂線, 與 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 的交點分別為 $FGHI$, 連接 $FGHI$. 我們宣稱此四邊形為其最小內接四邊形之一, 而其內最小四邊形有無限多個, 只要在 $\overline{AB}$ 上特定的範圍內任取一點 F', 過其作 $\overline{FG}$, $\overline{FI}$ 之平行線分別交於 G', I', 再過 G', I' 作 $\overline{GH}$, $\overline{IH}$ 之平行線必與 $\overline{CD}$ 交於一點 H', 四邊形 $F'G'H'I'$ 即為另一解, 如圖 4 :

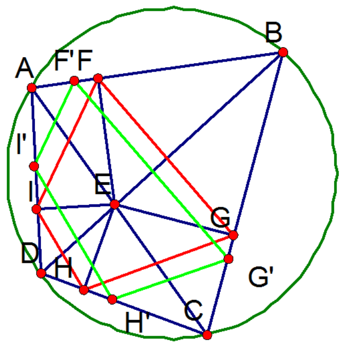

圖 4:

現在來證明定理 2.1 在四邊形與凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) 的情況:

求證. 當$\angle AIF = \angle DIH$, $\angle AFI = \angle BFG$, $\angle FGB = \angle HGC$, $\angle GHC = \angle IHD$ 時, 四邊形 $FGHI$ 會最小.

首先如果我們將其鏡射三次, 可得圖 5:

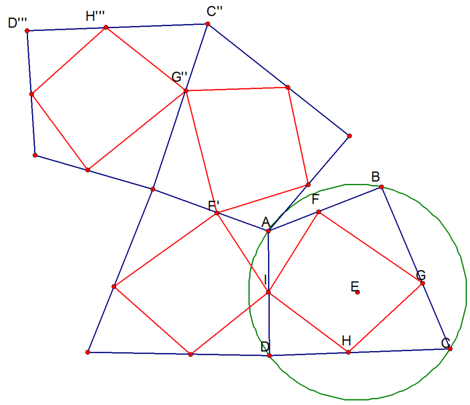

圖 5:

四邊形的周長為 $\overline{HI}+\overline{IF'}+\overline{F'G''}+\overline{G''H'''}$, 由於 $\overleftrightarrow{CD}$ // $\overleftrightarrow{C''D'''}$ (這點稍後證明), 四邊形 $FGHI$ 的周長 $\geq \overline{HH'''}=\overline{CC''}$ (定值), 易知當 $HIF'G''H'''$ 共線時, 四邊形 $FGHI$ 為過 H 的內接周長最小四邊形, 而事實上 H 只要在邊上的一定範圍內內接周長最小四邊形的周長都是一樣的, 即是這種情況有無限多個解, 這點稍後證明.

當 $\angle AIF=\angle DIH$, H, I, F' 會共線, 當

$$\angle AIF=\angle DIH, \angle AFI=\angle BFG, \angle FGB=\angle HGC$$

時, $HIF'G''H'''$ 會共線, 即四邊形 $FGHI$ 為過 H 的內接周長最小四邊形. 同理, 當 $\angle AIF=\angle DIH, \angle AFI=\angle BFG, \angle FGB=\angle HGC, \angle GHC=\angle IHD$ 時, 不管以哪一邊為鏡射那邊, 所鏡射出來的五點都會共線, 此時內接四邊形的周長 $=\overline{HH'''}=\overline{CC''}$ (定值), 即四邊形 $FGHI$ 周長會最小. 同理, 當凸 n 邊形 ($n=2k, k\in\mathbb{N}$) 時, 定理 2.1 也是成立的, 設 n 個頂點依序為 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 只要對 $\overline{a_n a_1}$ 鏡射 $n-1$ 次再重複上述步驟即可.

求證. 連接兩對角線, 令其交點為 E, 過 E 分別對四邊作垂線, 與 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 的交點分別為 $FGHI$, 連接 $FGHI$ 會使得所得到的四邊形符合

$$\angle AIF=\angle DIH, \angle AFI=\angle BFG,$$
$$\angle FGB=\angle HGC, \angle GHC=\angle IHD,$$

如圖 6:

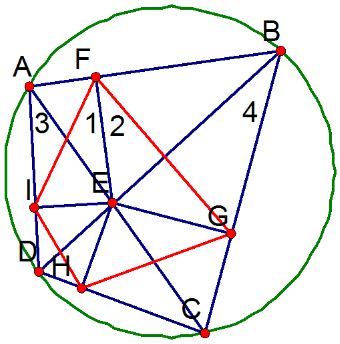

圖 6:

令 $\angle IFE = \angle 1, \angle GFE = \angle 2, \angle EAI = \angle 3, \angle EBG = \angle 4$

$$\because \angle AFE = \angle EIA = 90^\circ$$

$\Rightarrow AIEF$ 共圓

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{IE} = \angle 3$$

, 同理 $\angle 2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{GE} = \angle 4$, 又$\angle 3 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \angle 4$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 2$$
$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$
$$\Rightarrow 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - \angle 2$$
$$\therefore \angle AIF = \angle DIH,$$

同理可得 $\angle AFI = \angle BFG, \angle FGB = \angle HGC, \angle GHC = \angle IHD$

$\Rightarrow$ 以此作法所做出之內接四邊形周長最小.

求證. 解有無限多個: 現在證明一個引理, 將它定為引理 2.2:

引理 2.2. 若我們將一任意四邊形鏡射後, $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{C''D'''}$ 會形成一夾角, 令其為 $\angle X$, 如圖 7:

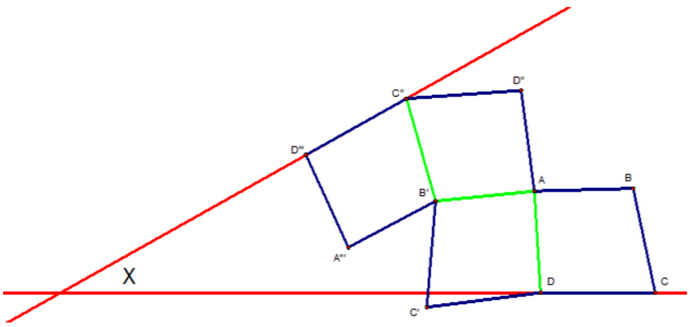

圖 7:

現在來求 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{C''D'''}$ 會之夾角: 由於 $XC''B'AD$ 會形成一凹五邊形, 由 n 邊形內角和 $= (n-2)180^\circ$ 可得

$$\angle X + \angle C + (360^\circ - \angle B) + \angle A + (180^\circ - \angle D) = 540^0$$
$$\Rightarrow \angle X = (\angle B + \angle D) - (\angle A + \angle C),$$

若 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{C''D'''}$ 之交點在另一邊, 則

$$\angle X = (\angle A + \angle C) - (\angle B + \angle D),$$

故我們可將 $\angle X$ 寫為

$$\angle X = |\angle A - \angle B + \angle C - \angle D|\,.$$

求證. 可推廣到當一 n 邊形依序對其邊作了 $n-1$ 次鏡射時,

$$\angle X = |\angle k_1 - \angle k_2 + \angle k_3 - \angle k_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\angle k_{n-1} + (-1)^n k_n|.$$

證明. 如圖8:

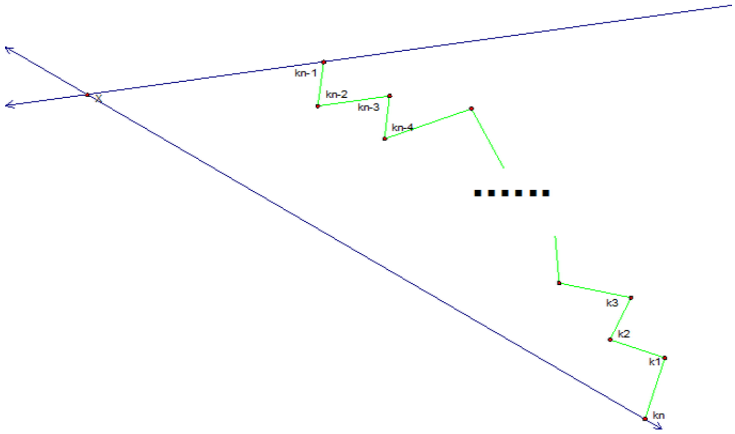

圖 8:

$$
\begin{aligned}
&\angle X + (180^\circ - \angle k_n) + \angle k_1 + (360^\circ - \angle k_2) + \angle k_3 + (360^\circ - \angle k_4) + \cdots \\
&= (n+1-2)180^\circ \\
&\Rightarrow \angle X = -\angle k_1 + \angle k_2 - \angle k_3 + \angle k_4 - \cdots - (-1)^{n-1}\angle k_{n-1} - (-1)^n \angle k_n.
\end{aligned}
$$

若兩線之交點在另一邊, 則

$$\angle X = \angle k_1 - \angle k_2 + \angle k_3 - \angle k_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\angle k_{n-1} + (-1)^n \angle k_n,$$

故可將 $\angle X$ 寫為

$$\angle X = \left|\angle k_1 - \angle k_2 + \angle k_3 - \angle k_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\angle k_{n-1} + (-1)^n \angle k_n\right|.$$

如果我們將一個圓內接四邊形鏡射, 如圖 9:

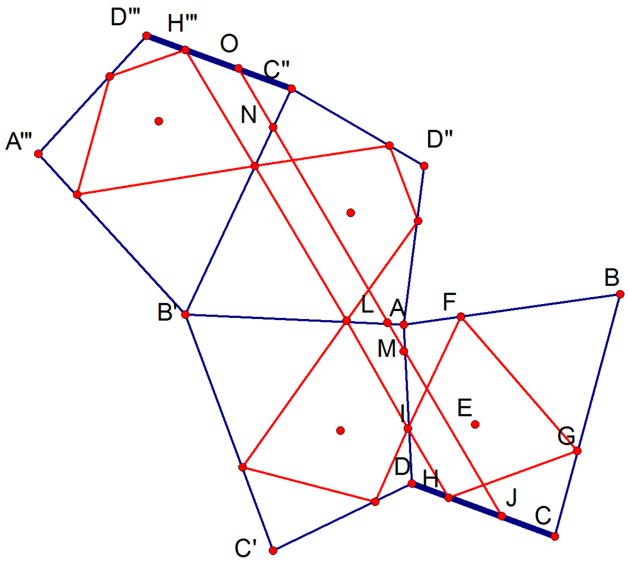

圖 9:

由引理 2.2 可知 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{C''D'''}$ 之夾角為 $|\angle A - \angle B + \angle C - \angle D|$ 但由於四邊形 $ABCD$ 為一圓內接四邊形

$$\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D,$$

由引理 2.2 可知 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{C''D'''}$ 的夾角為 $|\angle A - \angle B + \angle C - \angle D| = 0°$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{C''D'''},$$

如果我們在原來求得的 $\overline{HH'''}$ 旁作一平行線段 $\overline{JO}$ 則可得

$$\overline{CD} // \overline{C''D'''}, \overline{HH'''} // \overline{JO}$$

$\Rightarrow H'''HJO$ 為平行四邊形

$$\Rightarrow \overline{JO} = \overline{HH'''}.$$

所以我們可以在四邊形 $ABCD$ 的邊上找到四個點形成一個新的四邊形 (此四點為 $NLMJ$ 在四邊形上對應的點), 使得其周長與四邊形 $IFGH$ 相等. 因此, 可以得出原四邊形內可以找出無限多組解. □

2.1.3 凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$)－兩組間角和相等且卡點未卡到的情況:

首先將此凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) 鏡射 $2n - 1$ 次, 然後連接 a_n, ${a_n}'^{(n-1)}$ ($a_6, {a_6}'^{(5)}$), 再過卡點

$$a_1, {a_2}', {a_3}'' \cdots {a_n}'^{(n-1)} \left(a_1, {a_2}', {a_3}'' \cdots {a_6}'^{(5)}\right),$$

作 $\overline{a_n {a_n}'^{(n-1)} a_6 {a_6}'^{(5)}}$ 之平行線, 可得圖 10 (圖以六邊形為例):

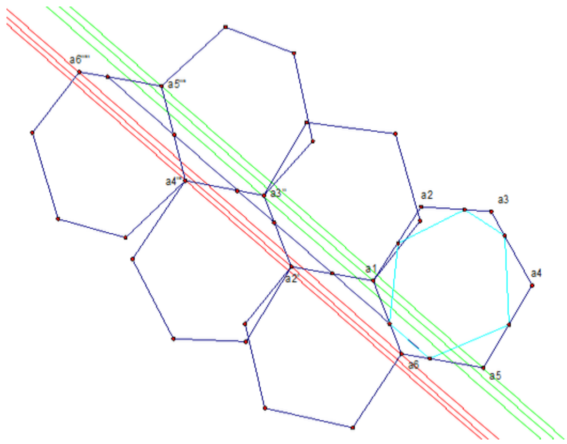

圖 10:

然後, 在最接近的兩上下卡點的平行線間 (即圖中最接近的兩紅綠線間), 作一 $\overline{a_n {a_n}'^{(n-1)}}$($\overline{a_6 {a_6}'^{(5)}}$) 的平行線, 將此平行線在

$$\overline{a_n a_1}, \overline{a_1 {a_2}'}, \cdots, \overline{{a_{n-1}}'^{(n-2)} {a_n}'^{(n-1)}} \left(\overline{a_6 a_1}, \overline{a_1 {a_2}'}, \cdots, \overline{{a_5}'^{(4)} {a_6}'^{(5)}}\right)$$

上的交點鏡射回原 $2n$ 邊形即為所求.

說明: 由引理 2.2 知

$$\overline{a_n a_{n-1}} // \overline{{a_{n-1}}'^{(n-2)} {a_n}'^{(n-1)}} \left(\overline{a_6 a_5} // \overline{{a_5}'^{(4)} {a_6}'^{(5)}}\right),$$

所以 $\overline{a_n a_{n-1}}$($\overline{a_6 a_5}$) 上的任意點到其在 $\overline{{a_{n-1}}'^{(n-2)} {a_n}'^{(n-1)}}$ ($\overline{{a_5}'^{(4)} {a_6}'^{(5)}}$) 上的對應點距離是固定的, 為了在凸 n 邊形各邊上各找到一點, 須使任意點連線在最下上卡點與最上下卡點之間.

2.1.4 凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$)－鏡射作圖後能與每一鏡射邊皆有交點:

有解的必要條件 (可用此來證明凹 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 一定無解): 若凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 有解, 則可在其邊上找三相鄰該解的頂點 $b_1b_2b_3$, 過 b_1, b_2, b_3 分別作其與邊的垂線, 使過 b_1, b_2 之垂線交於一點 c_2, 將它連至 b_1, b_2 之間的角, b_2, b_3 交於一點 c_3, 將他連至 b_2, b_3 之間的角, 可得圖 11 (圖以五邊形為例):

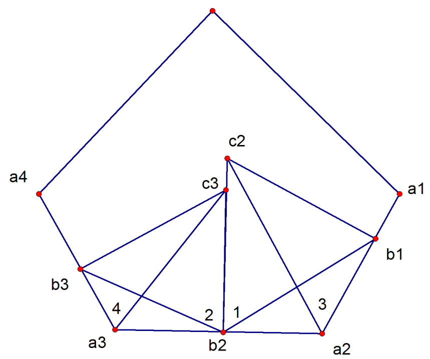

圖 11:

由於 $\angle b_1b_2b_3$ 為內接最小凸 n 邊形之一角 $\Rightarrow \angle b_1b_2a_2 = \angle b_3b_2a_3 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$, 又 $b_1a_2b_2c_2$ 與 $b_3a_3b_2c_3$ 皆為圓內接四邊形 $\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$, 同理, 在各頂點皆找到一條線使得

$$\angle a_1 = \angle k_n + \angle k_1, \angle a_2 = \angle k_1 + \angle k_2 + \cdots + \angle a_n = \angle k_{n-1} + \angle k_n,$$

如圖 12 (圖以五邊形為例):

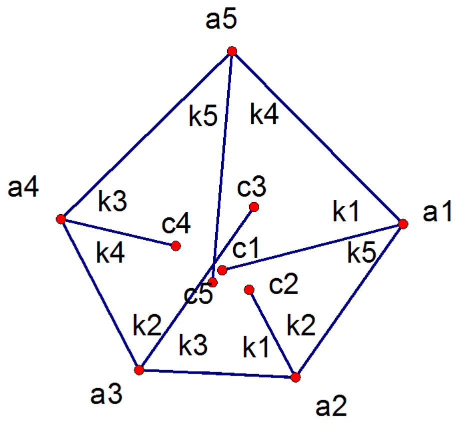

圖 12:

由於 $\angle a_1 + \angle a_2 + \cdots + \angle a_n = (n-2)180^\circ$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\angle k_n + \angle k_1) + (\angle k_1 + \angle k_2) + \cdots + (\angle k_{n-1} + \angle_n) = (n-2)180^\circ \\
&\Rightarrow \angle k_1 + \angle k_2 + \cdots + \angle k_n = (n-2)90^\circ \\
&\Rightarrow \angle k_1 = (n-2)90^\circ - (\angle k_2 + \cdots + \angle k_n) \\
&\quad = (n-2)90^\circ - (\angle a_3 + \angle a_5 + \cdots + \angle a_n),
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
\angle k_i (i = 1, 2, 3, \cdots, n) &= (n-2)90^\circ - (\angle k_1 + \cdots + \angle k_n - \angle k_i) \\
&= (n-2)90^\circ - (\angle a_{i+2} + \angle a_{i+4} + \cdots + \angle a_{i-1})
\end{aligned}$$

(若超過 n 則由 1 重新數過, 也就是若 $i+m \geq n$ 則 $\angle a_{i+m}$ 視為 $\angle a_{i+m-n}$) $=$ $(n-2)90^\circ -$ 由 $\angle a_{i+2}$ 開始順時針數 $\frac{(n-1)}{2}$ 個間角時, 若要使凸 n 邊形有解, 則 $\angle k_1$ 必須使 c_i, c_{i+1} 能投影到凸 n 邊形的各個邊上, 此時 $0^\circ < \angle k_i < 90^\circ$

$\Rightarrow 0^\circ < (n-2)90^\circ$ 由 $\angle a_{i+2}$ 開始順時針數 $\frac{(n-1)}{2}$ 個間角 $< 90^\circ$
$\Rightarrow (n-2)90^\circ >$ 由 $\angle a_{i+2}$ 開始順時針數 $\frac{(n-1)}{2}$ 個間角 $> (n-3)90^\circ$

又 $(i = 1, 2, 3, \cdots, n) \Rightarrow (n-2)90^\circ >$ 任意 $\frac{(n-1)}{2}$ 個間角 $> (n-3)90^\circ$, 此即為凸 n 邊形 $(n = 2k+1, k \in \mathbb{N})$ 有解的必要條件. 以五邊形為例, 有解的條件為 $270^\circ >$ 任意 2 個間角 $> 180^\circ$, 如果以三角形帶入, 則會發現 $90^\circ >$ 任意一個角 $> 0^\circ$, 符合前面所得需為銳角三角形的充要條件, 但此式仍然非內接最短的凸 n 邊形 $(n = 2k+1, k \in \mathbb{N})$ 有解的充分必要條件.

內接最短的凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 有解的充分必要條件: 將一凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 鏡射 $2n-1$ 次後, 過 a_n, ${a_n}'^{(2n-2)}$(a_5, ${a_5}'^{(8)}$) 作一直線並過 ${a_n}'^{(n-1)}$ (${a_5}'^{(4)}$) 作其平行線可得圖 13 (圖以五邊形為例):

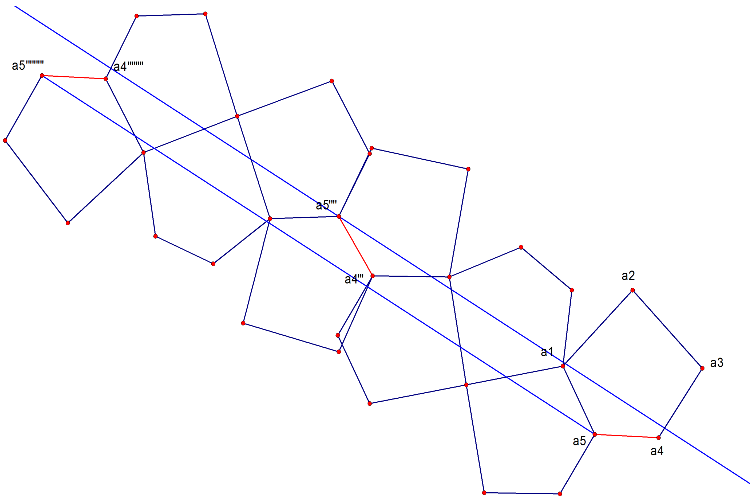

圖 13:

延長 $\overline{a_n a_{n-1}}$ ($\overline{a_5 a_4}$) 使其與 L_2 交於 T (若兩線已相交則令其交點為 T), 延長 $\overline{{a_n}'^{(n-1)}{a_{n-1}}'^{(n-2)}}$ ($\overline{{a_5}'^{(4)}{a_4}'''}$) 使其與 L_1 交於 S (若兩線已相交則令其交點為 S), 作 $\overline{Ta_n}$ ($\overline{Ta_5}$) 與 $\overline{S{a_n}'^{(n-1)}}$ ($\overline{S{a_5}'^{(4)}}$) 之中點 U, V 並將之連接, $\overline{UV}$ 在凸 n 邊形上的各點即為所求, 如圖 14 (圖以五邊形為例):

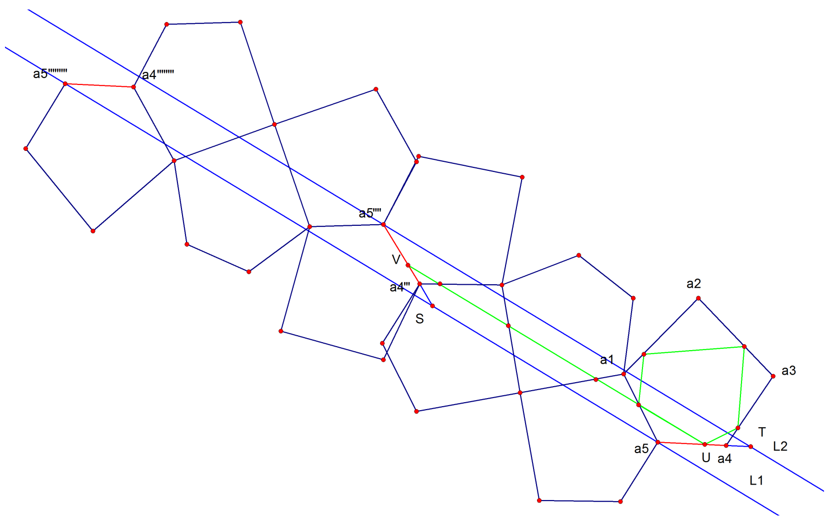

圖 14:

證明. 根據引理 2.2 可得 $\overline{a_n a_{n-1}}$ 與 $\overline{{a_n}'^{(2n-1)}{a_{n-1}}'^{(2n-2)}}$ 的夾角 ($\overline{a_5 a_4}$ 與 $\overline{{a_5}'^{(9)}{a_4}'^{(8)}}$ 的夾角)

$$\begin{aligned}
&= [(\angle a_1 + \angle a_3 + \cdots + \angle a_n) - (\angle a_2 + \angle a_4 + \cdots + \angle a_{n-1})] \\
&\quad + [(\angle a_2 + \angle a_4 + \cdots + \angle a_{n-1}) - (\angle a_1 + \angle a_3 + \cdots + \angle a_n)] = 0^\circ
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{a_n a_{n-1}} // \overline{{a_n}'^{(2n-1)}{a_{n-1}}'^{(2n-2)}} \ (\overline{a_5 a_4} // \overline{{a_5}'^{(9)}{a_4}'^{(8)}})$$

$\therefore$ $\overline{a_n a_{n-1}}$ ($\overline{a_5 a_4}$) 上的任意點到其在 $\overline{{a_n}'^{(2n-1)}{a_{n-1}}'^{(2n-2)}{a_5}'^{(9)}{a_4}'^{(8)}}$ 上的對應點距離是固定的, 也就是兩倍最小內接凸 n 邊形的周長, 在此先將任意點取為 a_n (a_5), 而 $\overleftrightarrow{a_n a_{n-1}}$ ($\overleftrightarrow{a_5 a_4}$) 即為 L_1, 而要求出凸 n 邊形內接最小 n 邊形必須在 L_1 與 L_2 之間找一平行線, 使得此線也通過 $\overline{a_n a_{n-1}}$ ($\overline{a_5 a_4}$) 上的任意點在 $\overline{{a_n}'^{(n-1)}{a_{n-1}}'^{(n-2)}}$ ($\overline{{a_5}'^{(4)}{a_4}'''}$) 上的對應點.

$$\begin{aligned}
\angle S{a_n}'^{(n-1)}T &= \angle {a_n}'^{(n-1)}S{a_n}'^{(2n-1)} \ (\angle S{a_5}'^{(4)}T = \angle {a_5}'^{(4)}S{a_5}'^{(9)})(\text{內錯角}) \\
\angle a_n T{a_n}'^{(n-1)} &= \angle {a_n}'^{(n-1)}S{a_n}'^{(2n-1)} \ (\angle a_5 T{a_5}'^{(4)} = \angle {a_5}'^{(4)}S{a_5}'^{(9)})(\text{全等})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \angle S{a_n}'^{(n-1)}T = \angle a_n T{a_n}'^{(n-1)} \ (\angle S{a_5}'^{(4)}T = \angle a_5 T{a_5}'^{(4)}) \\
&\Rightarrow a_n T{a_n}'^{(n-1)}S(a_5 T{a_5}'^{(4)}S),
\end{aligned}$$

為一等腰梯形, 又 U, V 為其腰上的中點

$$\Rightarrow \overline{a_n U} = \overline{{a_n}'^{(n-1)}V} \ (\overline{a_5 U} = \overline{{a_5}'^{(4)}V}),$$

且 $\overline{UV}$ // L_1 // L_2 (等腰梯形中點連線平行其上下兩底) $\Rightarrow$ V 為 U 在 $\overline{a_n a_{n-1}}$ ($\overline{a_5 a_4}$) 上之對應點, 且 $\overline{UV}$ // L_1 // L_2 $\Rightarrow$ $\overline{UV}$ 在凸 n 邊形上的各點即為所求.

□

2.2 無解情況

2.2.1 鈍角三角形:

$\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 為鈍角, 點 D 為 $\overline{BC}$ 上的任意點, 將此三角形對 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 鏡射, 令反射後的 D 點分別為 E, F, 如圖 15:

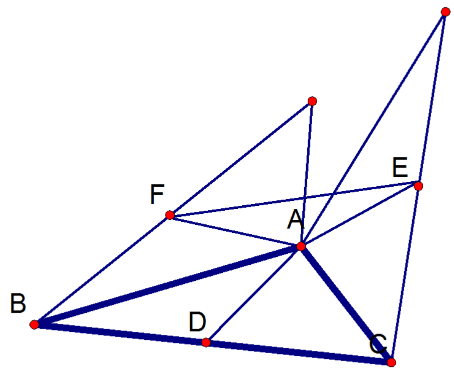

圖 15:

求證. 在 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 任取兩點與 D 形成的三角形周長必大於等於 $2\overline{DA}$.

$$\because \angle FAD + \angle EAD > 180^\circ$$

$\Rightarrow$ A, E, F 必可形成一三角形, 且點 A 會在 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 上其中的點之連線 (即下圖中的 $\overline{HG}$) 與 $\overline{EF}$ 之間. 現今 G, H分別為 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 上之任意點, 分別在 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 找任意點 H, G, 則 A 為於四邊形 $EFGH$ 內部, 連接 $\overline{GH}, \overline{HD}, \overline{DG}$, 將其對 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 作反射, 得 $\overline{HF}, \overline{GE}$, 如圖 16:

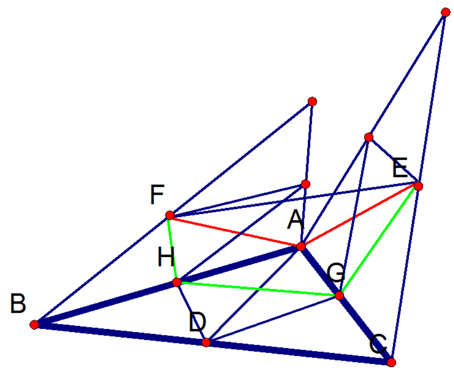

圖 16:

$$\triangle HDG\text{的周長} = \overline{FH} + \overline{HG} + \overline{GE},$$

$$\overline{FH} + \overline{HG} + \overline{GE} \geq \overline{FA} + \overline{AE} = 2\overline{DA}.$$

(等號在 AHG 重疊時會成立) $\triangle HDG$ 的周長 $\geq 2\overline{DA}$, 而 $\overline{DA}$ 為過 A 且垂直 $\overline{BC}$ 之垂線時會最小

$\Rightarrow$ 鈍角三角形的內接最小三角形圖形趨近於過 A 且垂直 $\overline{BC}$ 之垂線之兩倍.

2.2.2 直角三角形:

而當三角形為直角三角形, 則會出現如圖 17 的特殊情形:

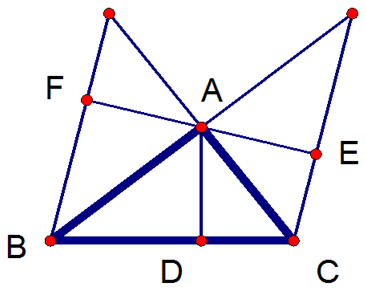

圖 17:

$$\because \angle FAE = 2\angle BAC = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ FAE 三點共線

$\Rightarrow$ 直角三角形的內接最短三角形趨近於其斜邊上之高的兩倍.

2.2.3 圓內接四邊形－圓心在四邊形外的情況:

將一個圓心在四邊形外的圓內接四邊形鏡射一次, 其中 $\overline{EI} \perp \overline{AD}$, $\overline{EH} \perp \overline{CD}$, 得圖 18:

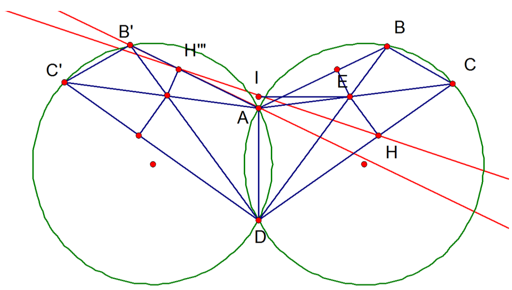

圖 18:

求證. 當圓心落在該四邊形外時, $\overleftrightarrow{AB'}$ 與 $\overline{CD}$ 的夾角會大於 $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 的夾角 ($\overleftrightarrow{HH'''}$ 是利用上述作圖法找出, 使對應的四邊形鏡射後為直線的線), 即 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 同時與 $\overleftrightarrow{AB'}$, $\overline{AD}$ 不可能同時有交點, 因此周長最小的四邊形會是趨近於 $\triangle ABH$ 之四邊形 ($\overline{CD}$ 為較靠近圓心的那一邊).

證明. $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$ 的夾角 $= \angle DAB' - \angle ADC$ (外角定理)

$$\begin{aligned}
&= \angle DAB - \angle ADC \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC}) \\
&= \frac{1}{2}[(\widehat{CD} + \widehat{BC}) - (\widehat{AB} + \widehat{BC})] \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AB}),
\end{aligned}$$

由於 $\overline{IE} \perp \overline{AD}, \overline{EH} \perp \overline{DC} \Rightarrow IEHD$ 共圓 $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 的夾角為

$$\angle IHD = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \angle IED = 90^\circ - \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AB}),$$

當圓心落在該四邊形外時, $\widehat{CD} > 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$ 的夾角 $>$ $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 的夾角

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{HH'''}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$, $\overline{AD}$ 不可能同時有交點

(因為若 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$ 有交點, 且 $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$ 的夾角 $>$ $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 的夾角, 則 H 會比與$\overline{CD}$ 的交點更靠近 C, 使得 I 點落在$\overline{AD}$ 之外)

$\Rightarrow$ 圓內接四邊形—圓心在四邊形外的情況不可能有解.

□

接下來討論其退化解: 將一圓心在四邊形外的圓內接四邊形鏡射四次可得圖 19:

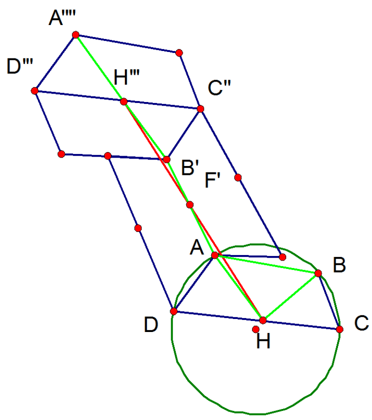

圖 19:

求證. 最小的四邊形在 $ABCD$ 上的四個點 $IFGH$ 各為 $\overline{AD}$ 上趨近於 A 的一點, 過對角線交點且和 $\overline{AB}$ 垂直之線的垂足, $\overline{BC}$ 上趨近於 B 的一點, 過對角線交點且和 $\overline{CD}$ 垂直之線的垂足.

證明. 由於 $\overline{HH'''}$ 與 $\overline{AD}$ 不可能有交點, 為了使周長和最短, 勢必要取最接近 $\overline{HH'''}$ 又在四邊形邊長上的多段線段, 因此取在 $\overline{AD}$ 上又最近 $\overline{HF'}$ 的點 A, $\overline{AB'}$ 上任一點, 在 $\overline{B'C''}$ 上又最近 $\overline{F'H'''}$ 的點 B', 以及 $\overline{B'A'^{(4)}}$ 與 $\overline{C''D'''}$ 之交點 H''' (此點即為四邊形對角線之交點在 $\overline{CD}$ 上的投影點所鏡射出來的點), 因為 $\overline{HA}+\overline{AB'}+\overline{B'H'''}$ 是在四邊形上所能取最短, 最接近 $\overline{HH'''}$ 之線段和, 故四邊形 $ABCD$ 內接最小四邊形圖形會趨近於 $\triangle ABH$, 證畢. □

2.2.4 圓內接四邊形－圓心在四邊形上的情況:

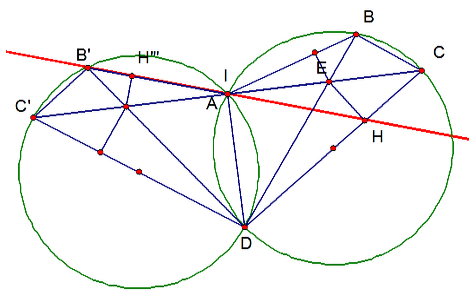

圖 20:

求證. $\overleftrightarrow{AB'}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 會重合, 且 H 為對角線交點對 $\overline{CD}$ 所作之垂足.

證明. $\overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$ 的夾角 $= \frac{1}{2}(\overparen{CD} - \overparen{AB}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \overparen{AB}) = \overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 的夾角. 而為了要使 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 與 $\overline{AD}$ 及 $\overleftrightarrow{AB'}$ 有交點, 必須 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 與 $\overleftrightarrow{AB'}$ 重合, 又$\angle IHD$

$= \overline{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{HH'''}$ 的夾角
$= \frac{1}{2}(180^\circ - \overparen{AB})$
$= 90^\circ - \angle ADE = \angle AED$
$\Rightarrow$ $AEHD$ 共圓
$\Rightarrow \angle EHD = 180^\circ - \angle DAE = 90^\circ$, H 為對角線交點對 $\overline{CD}$ 所作之垂足.

□

2.2.5 非圓內接四邊形的情況:

將一非圓內接四邊形鏡射七次後可得圖 21, 其中 H 為 $\overline{CD}$ 上的任意點：

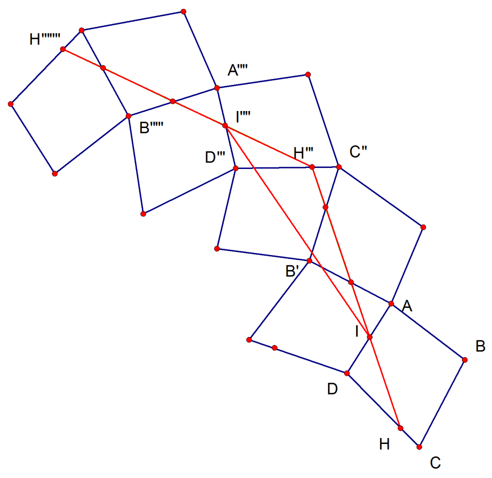

圖 21:

$\because$ $ABCD$ 為一非圓內接四邊形
$\therefore$ $\overline{CD}$ 不平行 $\overline{C''D'''} \Rightarrow \angle H'''HD \neq \angle HH'''C''$,
又 $\angle H'''HD = \angle H'^{(7)}H'''D'''$
$\Rightarrow \angle H'^{(7)}H'''D''' \neq \angle HH'''C''$
$\Rightarrow \angle H'^{(7)}H'''D'''$ 與 $\angle HH'''C''$ 不互為對頂角
$\Rightarrow \angle HH'''H'^{(7)}$ 三點不可能共線.

因此, $\angle HH'''H'^{(7)}$ 必會形成一非平角的角度, 此時對應的四邊形周長為

$$\overline{HH'''} = \overline{IH'''} + \overline{H'''I'^{(4)}},$$

若我們將 $\overline{II'''}$ 連接, 則會發現 $\overline{II'^{(4)}}$ 所對應的四邊形周長必定會小於 $\overline{IH'''} + \overline{H'''I'^{(4)}}$ (三角形兩邊和大於第三邊), 因此我們將原本 $\overline{HH'''}$ 上的各點 移到 $\overline{II'^{(4)}}$ 上, 可得圖 22:

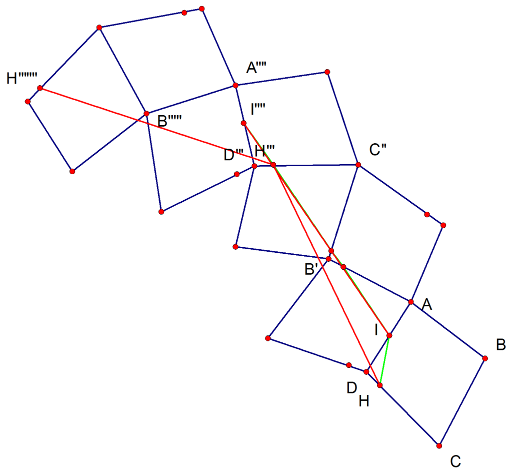

圖 22:

此時新的周長

$$\overline{II'^{(4)}} = \overline{H'''I} + \overline{IH} > \overline{HH'''},$$

因此我們又可將上 $\overline{II'^{(4)}}$ 的各點移到 $\overline{HH'''}$ 上, 如此將不斷循環, 直到 $\overline{II'^{(4)}}$, $\overline{HH'''}$ 超出四邊形, 而由於 $\overline{II'''}$, $\overline{HH'''}$ 不在四邊形內, 勢必要取在四邊形內 $\overline{II'''}$ 或 $\overline{HH'''}$ 第一個卡到的卡點 (即 $\overline{II'^{(4)}}$ 或 $\overline{HH'''}$ 無法再與此頂點相鄰的兩邊上找到對應點).

在此我們將 $AC'A'^{(4)}$ 定義為上卡點, $B'D'''B'^{(5)}$ 定義為下卡點 (卡點的定義請見附錄 .C), 當 $\overline{II'^{(4)}}$ 或 $\overline{HH'''}$ 超出四邊形時便取 $\overline{II'^{(4)}}$ 或 $\overline{HH'''}$ 碰到的卡點, 而此點為趨近於四邊形四個頂點之一, 因此非圓內接四邊形內接最小四邊形不存在, 證畢.

接下來討論其退化解:

求證. 非圓內接四邊形內接最小四邊形趨近於四邊形的一條對角線之兩倍或是一三角形.

證明. 當 $\overline{II'^{(4)}}$ 或 $\overline{HH'''}$ 碰到卡點後, 代表此最小內接四邊形必須經過此卡點, 而兩卡點間最短距離為直線, 將此卡點與其鏡射後所得之另一卡點連接起來即為所求, 而若中間又碰到另一卡點的話則將卡點依序連接即為所求. 如果未碰到, 則會趨近於一三角形, 如圖 23: □

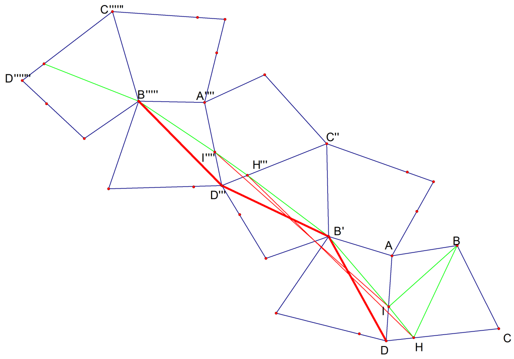

圖 23:

由引理 2.2 可得知, 當 $\angle B + \angle D > \angle A + \angle C$ 時, $\overline{CD}$ 與 $\overline{C''D'''}$ 的交點會在上圖的左方, 也就是 $\overline{II'^{(4)}}$ 或 $\overline{HH'''}$ 將持續往較短的左方趨近直到碰到下卡點 B 或 D, 而當 $\angle DB'D'''$ 在四邊形內的角 $\geq 180°$ 時, 會卡到 B 點, 當 $\angle B'^{(5)}D'''B'$ 在四邊形內的角 $\geq 180°$ 時, 會卡到 D 點, 又

$$\angle DB'D''' = \angle AB'C'' + (\angle C''B'D''' + \angle DB'A) = 2\angle B,$$
$$\angle B'^{(5)}D''B' = \angle C''D'''A'^{(4)} + (\angle A'^{(4)}D''B''^{(5)} + \angle B'D''C'') = 2\angle D,$$

當 $\angle B < 90°$ 時會卡到 B 點, 當$\angle D < 90°$ 時會卡到 D 點, 而當 $\angle B + \angle D > \angle A + \angle C$ 時, 則會卡到 A 點或 C 點 $\Rightarrow$ 當非圓內接四邊形較大的兩對角有其中一個角 $< 90°$ 時, 它的內接最小四邊形會趨近於一三角形, 且三角形在四邊形頂點上的角會在非圓內接四邊形較大的兩對角 $> 90°$ 的那個角上. 若碰到另一卡點, 則會趨近於其對角線之兩倍, 如圖 24:

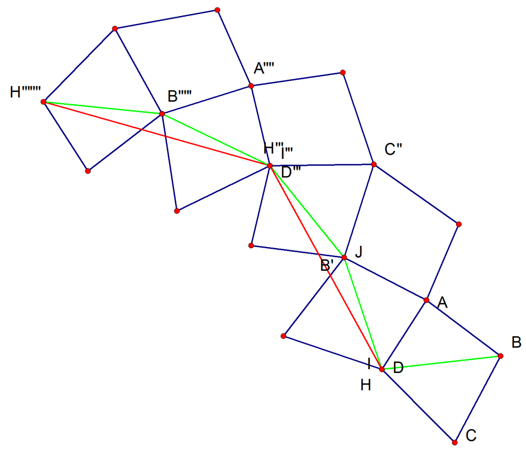

圖 24:

若是如上圖兩個點都卡到的情況, 則代表 $\angle DB'D'''$, $\angle B'^{(4)}D'''B'$ 在四邊形內的角皆 $\geq 180°$,

$$\angle DB'D''' = \angle AB'C'' + (\angle C''B'D''' + \angle DB'A) = 2\angle B$$
$$\angle B'^{(5)}D'''B' = \angle C''D'''A'^{(4)} + (\angle A'^{(4)}D'''B'^{(5)} + \angle B'D'''C'') = 2\angle D$$

$\Rightarrow$ 當非圓內接四邊形較大的兩對角兩個角皆 $\geq 90°$ 時, 它的內接最小四邊形會 趨近於其較短的對角線之兩倍, 也就是非圓內接四邊形較大的兩對角之連線的兩倍.

2.2.6 凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) − 兩組間角和相等, 但卡點卡到的情況:

當上卡點與下卡點的平行線交錯排列, 表示交錯排列的卡點將會卡到, 此凸 n 邊形將無解.

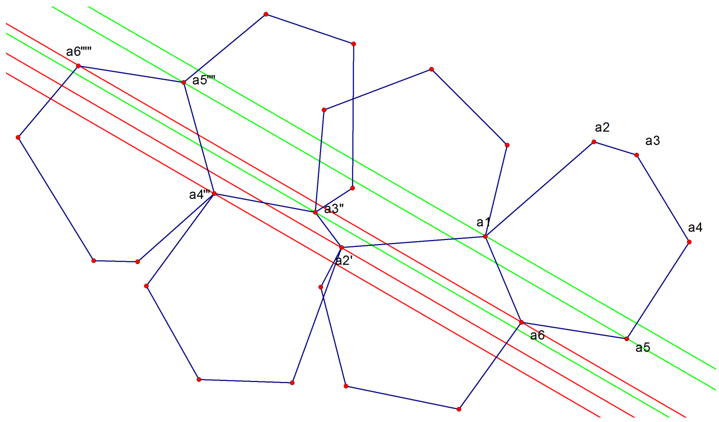

圖 25:

說明: 若此四邊形有解, 則必須找一 $\overline{a_n a_n{}'^{(n-1)}}$ $(\overline{a_6 a_6{}'^{(5)}})$ 的平行線通過

$$\overline{a_n a_1}, \overline{a_1 a_2{}'}, \cdots, \overline{a_{n-1}{}'^{(n-2)} a_n{}'^{(n-1)}} \left(\overline{a_6 a_1}, \overline{a_1 a_2{}'}, \cdots, \overline{a_5{}'^{(4)} a_6{}'^{(5)}}\right),$$

也就是必須找一 $\overline{a_n a_n{}'^{(n-1)}}$$(\overline{a_6 a_6{}'^{(5)}})$ 的平行線將紅線與綠線分開, 而由於上下卡點交錯排列, 代表此平行線不可能存在.

接下來討論其退化解: 將一兩組間角和相等的凸 n 邊形 $(n = 2k, k \in \mathbb{N})$ 鏡射 $2n-1$ 次後可得圖 26 (圖以六邊形為例):

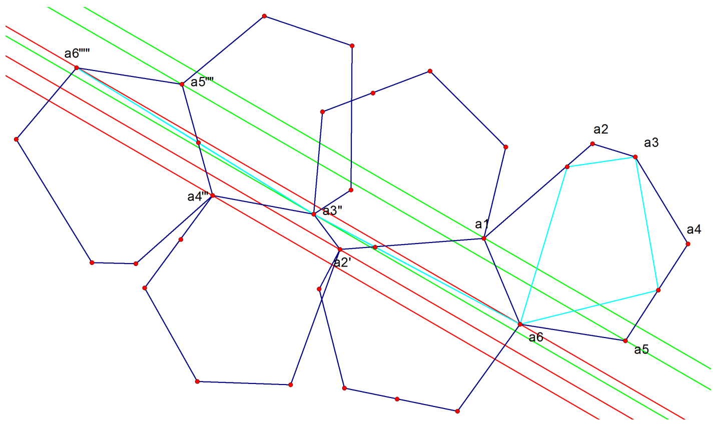

圖 26:

如果下卡點在過上卡點所作之最下面一條平行線之上, 則此卡點會卡到, 如果上卡點在過下卡點所作之最上面一條平行線之下, 則此卡點會卡到, 也就是說, 在最下方的綠線上方之所有紅線所對應的卡點皆會卡到, 在最上

方的紅線下方之所有綠線皆會卡到, 而有一綠線在紅線的下方, 就代表至少有一紅線在一綠線的上方, 因此圓內接凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) 可能趨近圖形為一 $n-2$ 邊形, $n-3$ 邊形, $n-4$ 邊形, $\cdots$, $\frac{n}{2}$ 邊形 (若為四邊形則為對角線之兩倍).

2.2.7 凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) 兩組間角和不相等的情況:

將一非圓內接凸 n 邊形 ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) 鏡射 $2n-1$ 次後可以得到圖 27 (圖以六邊形為例), 其中 H 為 $\overline{a_n a_{n-1}}$ 的任意點:

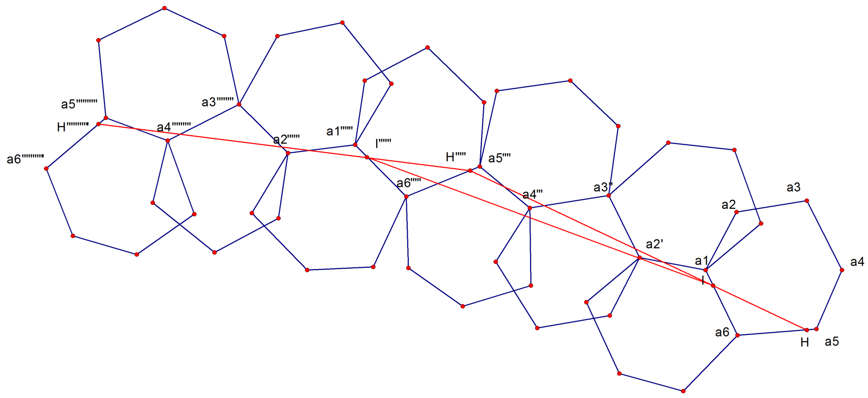

圖 27:

$\because$ 此凸 n 邊形為一非圓內接凸 n 邊形
$\therefore \overline{a_n a_{n-1}}$ ($\overline{a_6 a_5}$) 不平行 $\overline{a_n{}'^{(n-1)} a_{n-1}{}'^{(n-2)}}$ ($\overline{a_5{}'^{(4)} a_6{}'^{(5)}}$)
$\Rightarrow \angle H'^{(n-1)} H a_n \neq \angle H H'^{(n-1)} a_{n-1} (\Rightarrow \angle H'^{(5)} H a_5 \neq \angle H H'^{(5)} a_5)$.

又

$$\angle H'^{(n-1)} H a_n = \angle H'^{(2n-1)} H'^{(n-1)} a_n{}'^{(n-1)}$$
$$(\angle H'^{(5)} H a_5 = \angle H'^{(11)} H'^{(5)} a_6{}'^{(5)})$$
$$\Rightarrow \angle H'^{(2n-1)} H'^{(n-1)} a_n{}'^{(n-1)} \neq \angle H H'^{(n-1)} a_{n-1}{}'^{(n-2)}$$
$$(\angle H'^{(11)} H'^{(5)} a_6{}'^{(5)} \neq \angle H H'^{(5)} a_5{}'^{(4)})$$

$\Rightarrow \angle H'^{(2n-1)} H'^{(n-1)} a_n{}'^{(n-1)}$ 與 $\angle H H'^{(n-1)} a_{n-1}{}'^{(n-2)}$ 不互為對頂角
($\angle H'^{(11)} H'^{(5)} a_6{}'^{(5)}$ 與 $\angle H H'^{(5)} a_5{}'^{(4)}$ 不互為對頂角)
$\Rightarrow H H'^{(n-1)} H'^{(2n-1)}$ ($H H'^{(5)} H'^{(11)}$) 三點不可能共線.

因此, $HH'^{(n-1)}H'^{(2n-1)}$ $(HH'^{(5)}H'^{(11)})$ 必會形成一非平角的角度, 此時對應的凸邊形周長

$$
\begin{aligned}
&= \overline{HH'^{(n-1)}}(\overline{HH'^{(5)}})\\
&= \overline{IH'^{(n-1)}} + \overline{H'^{(n-1)}I'^{(n)}}(\overline{IH'^{(5)}} + \overline{H'^{(5)}I'^{(6)}}).
\end{aligned}
$$

若我們將 $\overline{II'^{(n)}}$ $(\overline{II'^{(6)}})$ 連接, 則會發現所對應的凸 n 邊形周長必定會小於 $\overline{IH'^{(n-1)}} + \overline{H'^{(n-1)}I'^{(n)}}$ (三角形兩邊和大於第三邊) $(\overline{IH'^{(5)}} + \overline{H'^{(5)}I'^{(6)}})$, 因此我們將原本 $\overline{HH'^{(n-1)}}$ $(\overline{HH'^{(5)}})$ 上的各點移到 $\overline{II'^{(n)}}$ $(\overline{II'^{(6)}})$ 上, 可得圖 28:

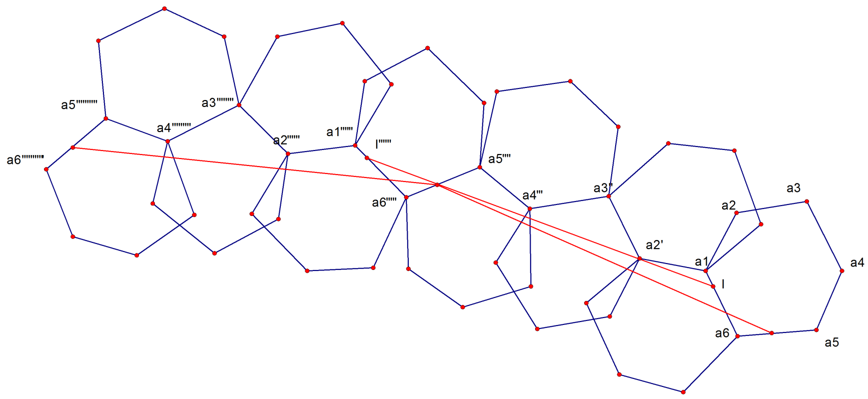

圖 28:

此時新的周長

$$
\begin{aligned}
&= \overline{II'^{(n)}}(\overline{II'^{(6)}})\\
&= \overline{IH'^{(n-1)}} + \overline{HI}(\overline{IH'^{(5)}} + \overline{HI})\\
&> \overline{HH'^{(n-1)}}\ (\overline{HH'^{(5)}}).
\end{aligned}
$$

此時又可將 $\overline{II'^{(n)}}$ $(\overline{II'^{(6)}})$ 上的各點移到 $\overline{HH'^{(n-1)}}$ $(\overline{HH'^{(5)}})$ 上, 如此將不斷循環, 直到 $\overline{II'^{(n)}}$, $\overline{HH'^{(n-1)}}$ $(\overline{II'^{6}}$, $\overline{HH'^{(5)}})$ 超出凸邊形, 當 $\overline{II'^{(n)}}$ 或 $\overline{HH'^{(n-1)}}$ $(\overline{II'^{(6)}}$ 或 $\overline{HH'^{(5)}})$ 超出凸 n 邊形時便取 $\overline{II'^{(n)}}$ 或 $\overline{HH'^{(n-1)}}$ $(\overline{II'^{(6)}}$ 或 $\overline{HH'^{(5)}})$ 碰到的卡點, 而此點為趨近於凸 n 邊形個頂點之一, 因此非圓內接凸 n 邊形內接最小凸 n 邊形不存在, 證畢.

接下來討論其退化解: 將兩組間角和不相等的凸 n 邊形 $(n = 2k, k \in \mathbb{N})$ 鏡射 $2n-1$ 次後可得圖 29 (圖以六邊形為例):

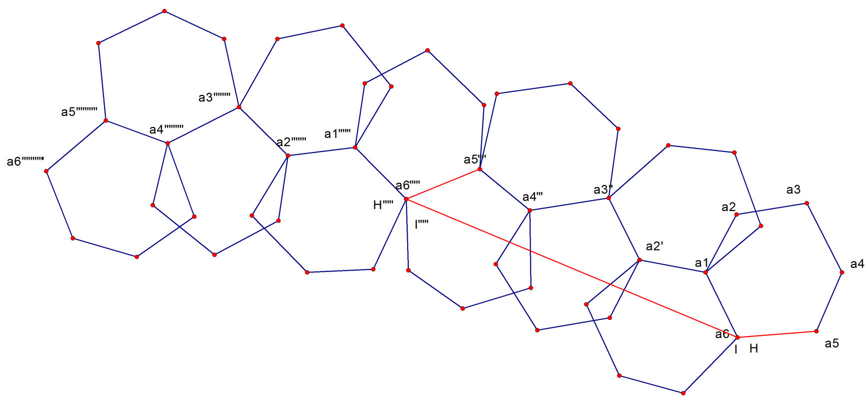

圖 29:

由引理 2.2 可得知, 當

$$\angle a_2 + \angle a_4 + \cdots + \angle a_n > \angle a_1 + \angle a_3 + \cdots + \angle a_{n-1}$$
$$(\angle a_2 + \angle a_4 + \angle a_6 > \angle a_1 + \angle a_3 + \angle a_5)$$

時, $\overline{a_{n-1}a_n}$ 與 $\overline{a_{n-1}'^{(n-2)}a_n'^{(n-1)}}$ ($\overline{a_5a_6}$ 與 $\overline{a_5'^{(4)}a_6'^{(5)}}$) 的交點會在上圖的左方, 也就是 $\overline{II'^{(n)}}$ 或 $\overline{HH'^{(n-1)}}$ ($\overline{II'^{(6)}}$ 或 $\overline{HH'^{(5)}}$) 將持續往較短的左方趨近直到碰到下卡點 $a_2, a_4, \cdots, a_n$ (a_2, a_4, a_6). 而當 $\angle a_n a_2' a_4'''$ ($\angle a_6 a_2' a_4'''$) 在凸 n 邊形內的角 $\geq 180°$ 時會卡到 a_1, 又

$$\angle a_n a_2' a_4''' = \angle a_1 a_2' a_3'' + \angle a_n a_2' a_1 + \angle a_4''' a_2' a_3'' = 2\angle a_2 - \angle a_6 a_2 a_4$$
$$(\angle a_6 a_2' a_4''' = \angle a_1 a_2' a_3'' + \angle a_6 a_2' a_1 + \angle a_4''' a_2' a_3'' = 2\angle a_2 - \angle a_6 a_2 a_4)$$

$\Rightarrow$ 若 $2\angle a_2 - \angle a_6 a_2 a_4 \geq 180°$ 時會卡到 a_2, $2\angle a_2 - \angle a_6 a_2 a_4 < 180°$ 則不會卡到.

同理, 當 $2\angle a_{k-1}a_k a_{k+1} - \angle a_{k-2}a_k a_{k+2} \geq 180°$ 時會卡到 a_k, $2\angle a_{k-1}a_k a_{k+1} - \angle a_{k-2}a_k a_{k+2} < 180°$ 則不會卡到.

$\Rightarrow$ 當非圓內接凸 n 邊形較大的 $\frac{n}{2}$ 個間角有 t 個角不符合 $2\angle a_{k-1}a_k a_{k+1} - \angle a_{k-2}a_k a_{k+2} < 180°$ 時, 它的內接最小凸 n 邊形會趨近於一 $n-t$ 邊形, 且 $n-t$ 邊形在凸 n 邊形頂點上的角, 會在不符合 $2\angle a_{k-1}a_k a_{k+1} - \angle a_{k-2}a_k a_{k+2} < 180°$ 的 t 角上. 而若 $\angle a_2 + \angle a_4 + \cdots + \angle a_n < \angle a_1 + \angle a_3 + \cdots + \angle a_{n-1}$ 時, 則 $\overline{a_{n-1}a_n}$ 與 $\overline{a_{n-1}'^{(n-2)}a_n'^{(n-1)}}$ ($\overline{a_5a_6}$ 與 $\overline{a_5'^{(4)}a_6'^{(5)}}$) 的交點會在上圖的右方, 也就是 $\overline{II'^{(n)}}$ 或 $\overline{HH'^{(n-1)}}$ ($\overline{II'^{(6)}}$ 或 $\overline{HH'^{(5)}}$) 將持續往較短的右方趨近, 直到碰到上卡點 $a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}$ (a_1, a_3, a_5), 其他以此類推.

2.2.8 凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$)－作圖後未能與每一鏡射邊皆有交點:

由於凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 的解只有唯一, 故當下圖的綠線與任一邊無法相交或交於頂點, 則此凸 n 邊形 ($n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) 的內接最小凸 n 邊形無解, 退化解可連接各個最接近的頂點求得, 如圖 30, 紅線即為其退化解:

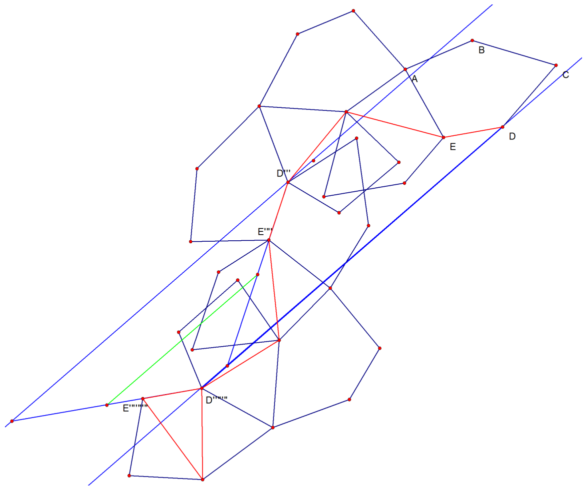

圖 30:

2.2.9 凹 n 邊形:

事實上, 上面所推導的各項結論也適用於凹 n 邊形 (凹 n 邊形的定義為有一個以上的內角大於 180°), 但都不會有解, 凹 n 邊形 $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ 鏡射時 180° 的那個角會造成圖形重疊使得解的那條直線無法在不彎曲的情況下到達第 n 個圖形的對應邊, 因此必為一過卡點的折線而非直線, 而凹 n 邊形 $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ 時, 大於 180° 的那個角永遠都無法分成兩個範圍在 $0 \sim 90°$的 $\angle k_i, \angle k_{i+1}$ (因為不可能兩個都小於 90°), 而會趨近的圖形也符合先前所推出的結論.

2.2.10 凸四邊形內接周長最小三角形:

凸四邊形內接周長最小三角形無解, 會趨近於何圖形經比較過後即可得知.

求證. 要求出凸四邊形內接周長最小三角形, 我們必須在四邊形中選取三邊上找一頂點形成一三角形, 然後比較哪個三角形最小, 因此我們先將不用的

一邊去掉後, 可以分三種情況討論:

1. 去掉的一邊之兩鄰邊於去掉的一邊方向延長後會相交: 若去掉的一邊之兩鄰邊於於去掉的一邊方向延長後會相交, 則可將去掉的邊之兩鄰邊延長形成一新的三角形, 然後作三邊的垂足, 即是此種情況對應的最短內接三角形了, 如圖 31:

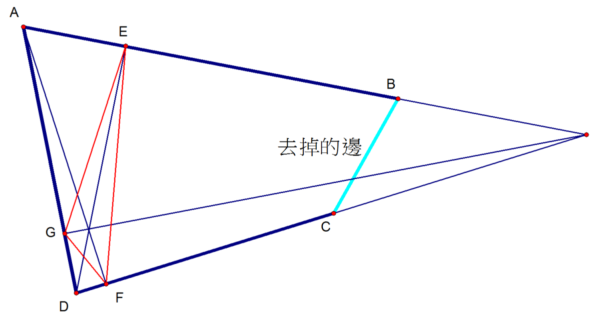

圖 31:

若垂足落在原四邊形內的邊上有解, 而若垂足未落在原四邊形內的邊上, 則必須將剩下三邊依序鏡射五次後, 連接未落在原四邊形內的邊上的頂點 (圖以 B 為範例) 之鏡射 $\overline{B'B'^{(4)}}$ 以找出其新的對應點, 如圖 32, 紅色線段為解:

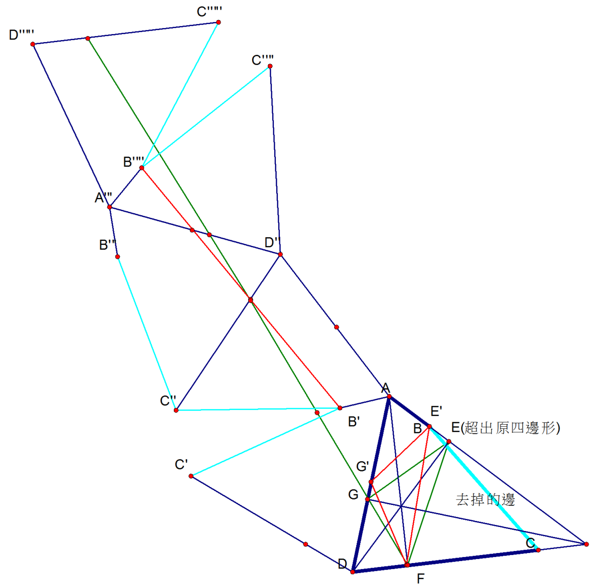

圖 32:

2. 去掉的一邊之兩鄰邊於去掉一邊方向延長後不相交, 有一剩下頂點小於 90°: 設 $\angle B < 90°$, 首先在剩下的三邊上各取一點, 對 C 點作 $\overline{EG}$ 的平行線, 如圖 33:

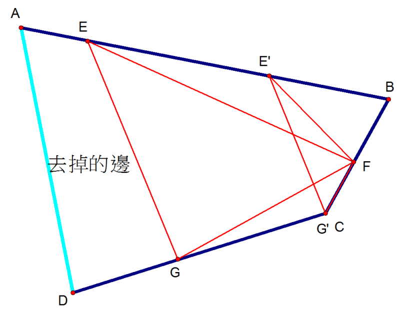

圖 33:

由圖我們不難發現,

$$\overline{E'G'} \leq \overline{EG}, \overline{E'F} \leq \overline{EF}, \overline{G'F} \leq \overline{GF}$$

(等號在重疊時成立)

$\Rightarrow \triangle E'FG'$ 的周長一定小於等於 $\triangle EFG$ 的周長, 因此我們將 E, G 移到E', G' 上, 如下圖:

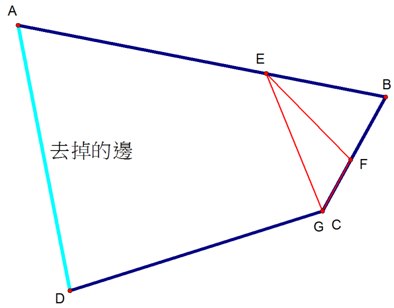

圖 34:

由於兩點間最短距離為直線, 因此當 F 越接近 C 時周長會越小, 也就是 $\triangle EFG$ 的周長越趨近於 $\overline{EG}$ 兩倍時周長會越短, 而當 $\overline{EG}$ 為過 C 且與 $\overline{AB}$ 垂直之線段時會最短, 故當去掉的一邊之兩鄰邊於去掉一邊方向延長後不相交, 有一剩下頂點小於 $90°$ 時, 內接三角形會趨近於過 C 且與 $\overline{AB}$ 垂直之線段之兩倍, 如圖 35:

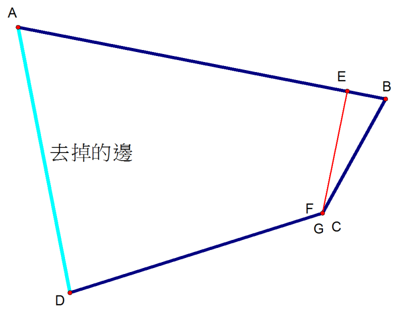

圖 35:

而若過 C 且與 $\overline{AB}$ 垂直之線段無法落在 $\overline{AB}$ 則取最接近的 $\overline{AC}$ 之兩倍,如圖 36, 紅色線段之兩倍為解:

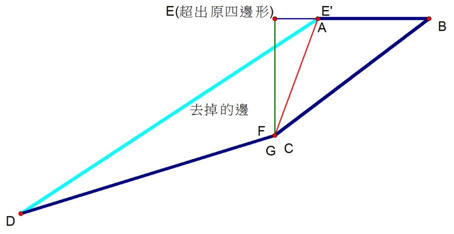

圖 36:

3. 去掉的一邊之兩鄰邊於去掉一邊方向延長後不相交, 剩下兩頂點皆大於 90°: 同 2. 的方法, 只是這種情況會趨近於去掉的一邊之對邊的兩倍 (下圖為 $\overline{CD}$ 之兩倍), 而 F 為 $\overline{CD}$ 上的任意點, 如圖37:

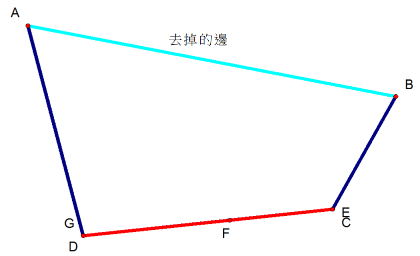

圖 37:

將四邊依序去掉後利用上述三種方法找到去掉四邊各自的最小內接三角形後, 再比較去掉四邊後哪一種周長最短即可得到四邊形內接周長最短三角形, 而除了情況 1. 中可以在邊上作出垂足為最小外, 其他狀況都是無解的, 但事實上情況 1. 永遠不可能最小, 因為去掉第一種狀況的對邊 (去掉此對邊後不可能視為情況 1.) 所趨近的解永遠小於情況 1. 的解, 原因如下:

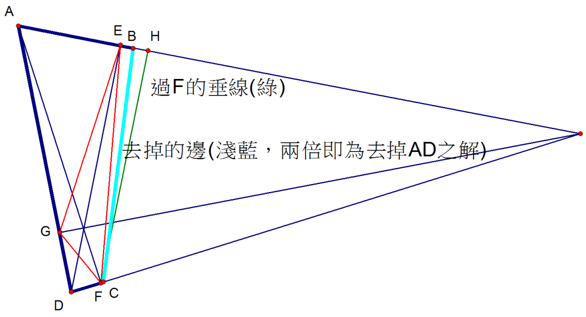

圖 38:

如圖 38 所示, 由於去掉的邊只要在範圍內就不影響情況 1. 作出來的三角形, 而 $\overline{BC}$ 的兩倍或過 B 或 C 之垂線的兩倍即是去掉情況 1. 的對邊的解, 因此我們可以將 B, C 隨意的在邊上移動使其增長, 如果我們想讓 $\overline{BC}$ 增長勢必要讓 B, C 其中一點無限趨近形成最小內接三角形的一頂點才行, 不失一般性, 圖 38 讓 C 趨近於 F, 而 B 必須在過 F 垂線的垂足 H 與 E 之間, 否則解就會趨近 $\overline{FH}$ 的兩倍, 而 F, E, H 會形成一斜邊為 $\overline{EF}$ 之直角三角形 (若讓 B 趨近 E 則形成另一直角三角形有同樣的結果),

$$2\overline{BC} \leq 2\overline{EF} < \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GE}$$

$\Rightarrow$ 去掉情況 1. 的對邊所趨近的解永遠小於情況 1. 的解

$\Rightarrow$ 四邊形內接最小三角形不可能有解.

Appendices

附錄 .A　無解的定義:

當此凸 n 邊形內接周長最小 n 邊形其中一頂點趨近於原凸 n 邊形其中一個頂點時, 我們稱此凸 n 邊形無解 (因為永遠可以找到更接近原凸 n 邊形其中一個頂點的點).

附錄 .B　$'$ 的數目的意義:

其中 $'$ 的數目代表此點所在之 n 邊形, 是第幾個被鏡射出的 n 邊形, 若此點同時出現在兩個 n 邊形上, 則取較小的數目, 如下圖的 D''' 及代表位在第三

個被鏡射出來的四邊形上的 D, 而圖中的 C'' 同時位在第三個及第二個被鏡射出來的四邊形上, 故 $'$ 的數目取 2.

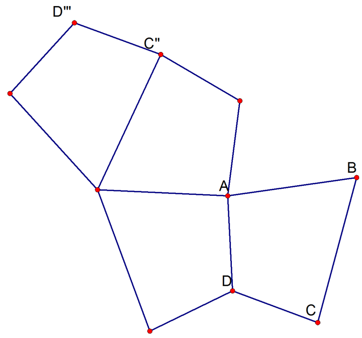

圖 39:

附錄 .C　上下卡點的定義:

如果我們將, A, B, C, $\cdots$ 分別編號為 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, 若凸 n 邊形 $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$時, 則上卡點為 a_{n-1}, a_1, a_3'', $\cdots$, ${a_{n-1}}'^{(n-2)}$ 與 ${a_1}'^{n}$, ${a_3}'^{(n+2)}$, $\cdots$, ${a_{n-1}}'^{(2n-2)}$, 下卡點為 a_n, a_2', a_4''', $\cdots$, ${a_n}'^{(n-1)}$ 與 ${a_2}'^{(n+1)}$, ${a_4}'^{(n+3)}$, $\cdots$, ${a_n}'^{(2n-1)}$, 若凸 n 邊形 $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ 時, 則上卡點為 a_{n-1}, a_1, a_3'', $\cdots$, ${a_n}'^{(n-2)}$ 與 ${a_2}'^{(n+1)}$, ${a_4}'^{(n+3)}$, $\cdots$, ${a_{n-1}}'^{(2n-2)}$, 下卡點為 a_n, a_2, a_4''', $\cdots$, $a_n - 1'^{(n-2)}$ 與 ${a_1}'^{n}$, ${a_3}'^{(n+2)}$, $\cdots$, ${a_n}'^{(2n-1)}$. 如圖 40, 為 $n = 5$ 的情況:

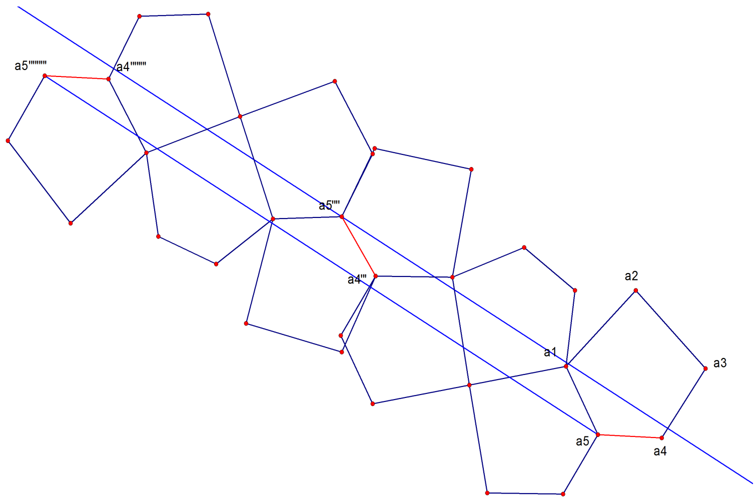

圖 40:

參考文獻

[1] 《幾何明珠》, 黃家禮先生主編, 九章出版社, 第二章光反射定理, 中華民國九十四年七月出版.

[2] 《高中數學競賽教程》, 嚴鎮軍主編, 史濟懷, 李炯生, 李尚志, 余紅兵, 常庚哲, 單墫, 謝盛剛, 蘇淳, 嚴鎮軍編著, 九章出版社, 中華民國九十六年五月出版.

[3] 《n 邊形內具有最小周長的內接 n 邊形》, 第 29 屆全國科展高中組數學科第三名, 作者王偉華, 莊徐瑞, 劉智龍.

[4] 《鏡射乾坤》, 第 38 屆國中數學科展作品第二名, 作者何思賢, 康雅婷, 陳瓏方.

[5] Marcel Berger; *Geometry I*, Springer-Verlag 1987. 出版.

[6] 私下討論 (關於引理 2.2的證明) , 曾達.