

# 作品評語

游森棚教授

國立臺灣師範大學數學系

本篇文章討論一個組合幾何的問題：在一個  $m \times n$  矩形點陣中，最多能將多少個點（記為  $f(m, n)$ ）著色，使得著色點之中任意四點都不形成正方形。

這是屬於組合幾何中的離散極值問題。這一類問題常常都是敘述簡單易懂，但是解答卻非常困難。特別是 Ramsey 理論風格的問題，精確值幾乎是難以求出。本題就是一個例子：事實上這是一個相當困難的問題，目前學界也只能有一些部分的結果。

離散極值的問題既然難以求出精確解，因此就退而求其次，轉而用各種方法來估計上界或下界。本文作者對所有  $m$  不超過 5 時求出了  $f(m, n)$  的精確值。對於一般的  $m, n$  並找到一個方法估計  $f(m, n)$  的上下界。以高中學生的手上工具能處理的程度來說，本文已經是一個相當不錯的作品。

以當代組合幾何研究的觀點來看，此類難以求出精確值的問題，其上下界的估算除了一般組合論證外，更常使用的是分析的手法，特別是機率方法已經是目前組合幾何的一個非常重要的領域。此外亦可用高等代數方法切入，例如零點法（Combinatorial Nullstellensatz）也是一個重要工具。配合電腦高速的計算能力亦是另一個研究趨勢。

尚昱選擇這個問題，展現了高度的企圖心，作品內文也展現了高度的數學能力。口試時展現的對數學的熱情與潛力亦令評審團頗為驚艷。期待尚昱未來在數學的探索能夠更上一層，回過頭來再看這個問題，會有更不同的觀點與體悟。