整數分拆 — 整數邊不全等三角形個數的延伸討論

國立臺南第一高級中學　高旭宏
指導老師　周博信

Abstract

The integer partition problem is to partition a positive integer m into unordered sums of positive integers. The goal of the problem is to count the number of such partitions. Since introduced by Leibniz, the problem has been widely studied by many others. This article considers a variation of the integer partition problem. More precisely, it is the problem of partitioning a positive integer m into n positive integers such that any of the numbers is less than the sum of the remaining $n-1$ numbers. Equivalently, these n positive integers are the lengths of the sides of an n-polygon. The problem with $n = 3$ is to count the number of integer-side triangles of perimeter m. Previous studies already gave a solution to this case. This article first offers two new and shorter derivations for the result of the triangle case. It then uses a similar, but more delicate, method to obtain the result for the case when $n = 4$. As for the case of $n \geq 5$, it only gives recurrence relations and a generating function, while precise formulas remain to study in the future.

中文摘要

整數分拆問題是要將一個正整數 m 表示成一些正整數的無序和，目標是要對固定的 m 計算分拆的數目；這個問題自萊布尼茲提出以來，已經有許多研究。本研究主要在探討整數分拆的一個變型問題，精確地說，是要將一正整數 m，分拆為 n 個正整數的和，使得任一數小於其他 $n-1$ 數的和，亦即使得這 n 個正整數是某一 n 邊形的邊長。這個問題當 $n = 3$ 的時候，就是在計算周長為 m、邊長為整數的不全等三角形的個數，前人已經有答案。本論文首先用兩種不同、但更簡便的方法，重新證明前人有關三數分拆的結果。接著，我們用類似的方法，但涉及更多複雜的計算，得到四數分拆的結果。至於五數或以上的分拆，則列出遞迴關係，求出相關的生成函數，精確的公式有待後續發展。

1　簡介

整數分拆問題是數論與組合學中的一個重要問題，它是要將一個正整數 m 分成若干個正整數的無序和。例如 5 可以分拆成

$$5 \text{、} 1+4 \text{、} 2+3 \text{、} 1+1+3 \text{、} 1+2+2 \text{、} 1+1+1+2 \text{、} 1+1+1+1+1$$

等 7 種，所以 5 的無序分拆數 $p(5)$ 是 7。整數分拆問題最先由萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646 ∼ 1716) 提出，1699 年他給約翰・伯努利 (John Bernoulli, 1667 ∼ 1748) 的信中認為「這個問題我看並不容易」，這在他未發表的手稿中也曾多次提及。後來歐拉 (L. Euler, 1707 ∼ 1783) 將它發展成一種完整的分拆理論，在 1741、1748 年都有重要工作發表。德國組合學派的興登堡 (C. F. Hindenburg, 1741 ∼ 1808) 以及英國的赫謝爾 (J. F. W. Herschel, 1792 ∼ 1871)、第摩根 (A. De Morgan, 1806 ∼ 1871) 、希爾沃斯特 (J. J. Sylvester, 1814 ∼ 1897)、凱利 (A. Cayley, 1821 ∼ 1891) 、麥克馬洪 (P. A. MacMahon, 1854 ∼ 1929) 等人陸續提出貢獻，現已有一套較完整的理論，只是並沒有用描述的簡單公式。

如果把正整數 m 分拆限制為拆成特定的 n 部分，除了 n 比較小的情況，其分拆數 $p(m,n)$ 跟 $p(m)$ 一樣難找。在有關 5 的分拆中，可以看出來 $p(5,1)=p(5,4)=p(5,5)=1$ 及 $p(5,2)=p(5,3)=2$。一般來說 $p(m,1)=1$ 、$p(m,2)=[m/2]$，其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。精確來說，對於正整數 m 和 n，我們用 $p(m,n)$ 表示滿足下面兩個條件的正整數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的個數。

$(P1)$ $a_1+a_2+\cdots+a_n=m$ 。
$(P2)$ $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$ 。

這篇文章主要的目的是要研究，進一步除了條件 $(P1)$ 和 $(P2)$ 之外，再加入第三個條件 $(P3)$ ，而成為有條件整數分拆問題。我們用 $f(m,n)$ 表示滿足 $(P1)$ 、$(P2)$ 、$(P3)$ 這三個條件的正整數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的個數。

$(P3)$ $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}>a_n$ 。

滿足 $(P1)$、$(P2)$、$(P3)$ 的正整數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 恰好可以構成 n 邊形的邊長 (不計較邊的次序)，所以 $f(m,3)$ 其實就是周長為 m 的整數邊不全等三角形的個數。

法國數學家 Louis Comtet 在 1974 年出版的 ⟨Advanced Combinatorics⟩ 書中，在一道習題中明確地提到了周長為 m 的整數邊不全等三角形共有

$$\left[\frac{1}{48}\left(m^2+3m+21+(-1)^{m-1}3m\right)\right]$$

個。上海市華東師範大學學生蔡雅靜、鐔鎮鵬、晁福剛、任韓四人，在 2015 年發表的《整數邊三角形個數的組合與幾何證明方法》一文中，利用 Ferrers 圖與生成函數法以及空間隔點等等的概念，給了兩種不同的方法，證明了 Comtet 所述的公式。

這篇論文的目標是要進一步研究一般的 $f(m,n)$ 。本論文首先用兩種不同於前人、但更簡便的方法，重新證明 Comtet 所述的公式。接著，我們用類似的方法，但涉及更多複雜的計算，得到四數分拆的結果

$$f(m,4)=\left[\frac{1}{288}\left(m^3+\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m+128+(-1)^{m+1}\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{15}{2}m\right)\right)\right] 。$$

至於五數或以上的分拆，則列出遞迴關係，求出相關的生成函數，精確的公式有待

後續發展。

2 三數的整數分拆

我們首先討論，這一節將用兩種不同於前人的方法再度證明 Comtet 的公式

$$f(m,3)=\left[\frac{1}{48}\left(m^2+3m+21+(-1)^{m-1}3m\right)\right]\text{ 。}$$

為了符號上的簡省，我們不使用下標，而將三正整數所成的數列表示為 (a,b,c)，其中 a、b、c 即為三角形的三邊長。不失一般性，我們不妨假設 $c\geq b\geq a$。因為 $b+c>a$ 且 $a+c>b$ ，故此假設只須再考慮 $a+b>c$ 。

舉例來說，周長為 3 而且各條邊的長度都是正整數的三角形，其邊長組合僅有 $(1,1,1)$ 一組，因此 $f(3,3)=1$ 。經由窮舉，可以得到下面的數據。

$m=3$			$m=4$			$m=5$			$m=6$			$m=7$			$m=8$		
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1				1	2	2	2	2	2	1	3	3	2	3	3
												2	2	3			
$m=9$			$m=10$			$m=11$			$m=12$			$m=13$			$m=14$		
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	4	4	2	4	4	1	5	5	2	5	5	1	6	6	2	6	6
2	3	4	3	3	4	2	4	5	3	4	5	2	5	6	3	5	6
3	3	3				3	3	5	4	4	4	3	4	6	4	4	6
						3	4	4				3	5	5	4	5	5
												4	4	5			

根據這些數據，可以得到表（一）的結果。觀察此表可以發現：當 $m\leq 12$ 且 m 為偶數時，$f(m,3)<f(m+1,3)$ 。

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f(m,3)$	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3	5	4

表（一）

2.1 推導 $f(m,3)$ 的第一種方法

先來看推導 $f(m,3)$ 的第一種方法。對於一般的正整數 m 來說，因為 $1\leq a\leq b\leq c$，所以可以知道 $3a\leq a+b+c=m$，進而得到 $a\leq\dfrac{m}{3}$，所以 a 的範圍是：

$$1\leq a\leq\frac{m}{3}\text{ ，也就是 }1\leq a\leq\left[\frac{m}{3}\right]\text{ 。}$$

固定 a 之後，因為 $m-a-c=b\le c$，所以可以知道 $m-a\le 2c$，也就是 $\dfrac{m-a}{2}\le c$。另一方面，因為 $c+1\le a+b=m-c$，所以可以知道 $2c\le m-1$，進而得到 $c\le\dfrac{m-1}{2}$，也就是 $c\le\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$。又因為 $m-a-c=b\ge a$，可以知道 $c\le m-2a$。因此得到兩個 c 的上界，由於兩者皆須滿足，故進一步比較這兩個上界的大小關係。由於 $\left[\dfrac{m-1}{2}\right]\le m-2a$ 等同於 $2a\le m-\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$ 、也就是 $a\le\left[\dfrac{m+2}{4}\right]$。所以 c 的範圍是：

(1) 當 $a\le\left[\dfrac{m+2}{4}\right]$ 時，$\dfrac{m-a}{2}\le c\le\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$、也就是 $\left[\dfrac{m+1-a}{2}\right]\le c\le\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$。

(2) 當 $a\ge\left[\dfrac{m+6}{4}\right]$ 時，$\dfrac{m-a}{2}\le c\le m-2a$、也就是 $\left[\dfrac{m+1-a}{2}\right]\le c\le m-2a$。

因此我們就可以得到

$$
\begin{aligned}
& f(m,3)\\
={}& \sum_{a=1}^{\left[\frac{m+2}{4}\right]}\left(\left[\frac{m-1}{2}\right]-\left[\frac{m+1-a}{2}\right]+1\right)+\sum_{a=\left[\frac{m+6}{4}\right]}^{[m/3]}\left(m-2a-\left[\frac{m+1-a}{2}\right]+1\right)\\
={}& \sum_{a=1}^{[m/3]}\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]-\left[\frac{m+1-a}{2}\right]\right)-\sum_{a=\left[\frac{m+6}{4}\right]}^{[m/3]}\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]-m+2a-1\right)\\
={}& S_1-S_2\ \text{。}
\end{aligned}
$$

當 m 是偶數的時候，S_1 是 $0,1,1,2,2,3,3,\ldots$（總共有 $x=[m/3]$ 項）的和；分兩種情況討論，若 $x=2y$，則 $S_1=0+1+1+2+2+\cdots+(y-1)+(y-1)+y=y^2=x^2/4$；若 $x=2y+1$，則 $S_1=0+1+1+2+2+\cdots+(y-1)+(y-1)+y+y=y(y+1)=(x^2-1)/4$。當 m 是奇數的時候，S_1 是 $1,1,2,2,3,3,\ldots$（總共有 $x=[m/3]$ 項）的和；分兩種情況討論，若 $x=2y$，則 $S_1=1+1+2+2+\cdots+y+y=y(y+1)=x(x+2)/4$；若 $x=2y+1$，則 $S_1=1+1+2+2+\cdots+y+y+(y+1)=(y+1)^2=(x+1)^2/4$。

S_2 是一等差級數的和，此等差級數的項數為 $z=[m/3]-[(m+2)/4]$，公差為 2，首項為

$$\left[\frac{m+1}{2}\right]-m+2\left[\frac{m+6}{4}\right]-1=\left[\frac{4\left[\frac{m+6}{4}\right]-m-1}{2}\right]=\left[\frac{w}{2}\right]\text{、}$$

其中當 $m\equiv 0,1,2,3 \pmod 4$ 時 w 分別為 $3,2,5,4$，也就是首項分別為 $1,1,2,2$。當 $m\equiv 0,1 \pmod 4$ 時，$S_2=(1+2z-1)z/2=z^2$；當 $m\equiv 2,3 \pmod 4$ 時，

$S_2 = (2+2z)z/2 = z(z+1)$。

由於 S_1、S_2 與 $\left[\frac{m}{3}\right]$、$\left[\frac{m+2}{4}\right]$ 有關，我們可以將 m 分為在 mod 12 下的 12 種情形，討論如下。

m	$\left[\frac{m}{3}\right]$	S_1	$z = \left[\frac{m}{3}\right] - \left[\frac{m+2}{4}\right]$	S_2	$f(m,3) = S_1 - S_2$
$12t$	$4t$	$4t^2$	$4t-3t=t$	t^2	$3t^2 = m^2/48$
$12t+1$	$4t$	$t(4t+2)$	$4t-3t=t$	t^2	$3t^2+2t = (m^2+6m-7)/48$
$12t+2$	$4t$	$4t^2$	$4t-(3t+1) = t-1$	$t(t-1)$	$3t^2+t = (m^2-4)/48$
$12t+3$	$4t+1$	$(2t+1)^2$	$(4t+1)-(3t+1)=t$	$t(t+1)$	$3t^2+3t+1 = (m^2+6m+21)/48$
$12t+4$	$4t+1$	$t(4t+2)$	$(4t+1)-(3t+1)=t$	t^2	$3t^2+2t = (m^2-16)/48$
$12t+5$	$4t+1$	$(2t+1)^2$	$(4t+1)-(3t+1)=t$	t^2	$3t^2+4t+1 = (m^2+6m-7)/48$
$12t+6$	$4t+2$	$(2t+1)^2$	$(4t+2)-(3t+2)=t$	$t(t+1)$	$3t^2+3t+1 = (m^2+12)/48$
$12t+7$	$4t+2$	$(t+1)(4t+2)$	$(4t+2)-(3t+2)=t$	$t(t+1)$	$3t^2+5t+2 = (m^2+6m+5)/48$
$12t+8$	$4t+2$	$(2t+1)^2$	$(4t+2)-(3t+2)=t$	t^2	$3t^2+4t+1 = (m^2-16)/48$
$12t+9$	$4t+3$	$(2t+2)^2$	$(4t+3)-(3t+2)=t+1$	$(t+1)^2$	$3t^2+6t+3 = (m^2+6m+9)/48$
$12t+10$	$4t+3$	$(2t+1)(2t+2)$	$(4t+3)-(3t+3)=t$	$t(t+1)$	$3t^2+5t+2 = (m^2-4)/48$
$12t+11$	$4t+3$	$(2t+2)^2$	$(4t+3)-(3t+3)=t$	$t(t+1)$	$3t^2+7t+4 = (m^2+6m+5)/48$

根據這 12 條公式，即可歸納出

$$
\begin{aligned}
f(m,3) &= \frac{1}{48}\left(m^2+3m+(-1)^{m-1}3m+f'(m,3)\right)\\
&= \left[\frac{1}{48}\left(m^2+3m+21+(-1)^{m-1}3m\right)\right]
\end{aligned}
$$

其中 $f'(m,3)$ 如下表所示。事實上，上式中的 21 可以用任何 21 $\sim$ 31 之間的任一整數取代。

m mod 12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f'(m,3)$	0	-7	-4	21	-16	-7	12	5	-16	9	-4	5

2.2 推導 $f(m,3)$ 的第二種方法

接著來看推導 $f(m,3)$ 的第二種方法。回憶到，$f(m,3)$ 是要求滿足 $a \le b \le c$ 以及 $a+b>c$ 的正整數所成數列 (a,b,c) 的個數。這些數列可以分為兩種，一種滿足 $a+b=c+1$ ，另一種滿足 $a+b \ge c+2$。

對於第一種情況 $a+b=c+1$，因為 $a+b+c=m$，所以 m 一定是奇數、$a+b=\dfrac{m+1}{2}$、$c=\dfrac{m-1}{2}$。在此情況下，因為 $a \le b$，所以共有 $\left[\dfrac{m+1}{4}\right]$ 組解。

對於第二種情況 $a+b \ge c+2$，因為 $c \ge b$，所以 $a+b \ge b+2$、而有 $a \ge 2$。考慮正整數數列 (a',b',c')，其中 $a'=a-1$、$b'=b-1$、$c'=c-1$，它滿足 $a'+b'+c'=m-3$、$a' \le b' \le c'$ 及 $a'+b'>c'$，這對應到 $f(m-3,3)$ 的一個解。

綜合以上兩種情況，可以得到：當 m 是偶數時 $f(m,3)=f(m-3,3)$，當 m 是奇數時 $f(m,3)=f(m-3,3)+\left[\dfrac{m+1}{4}\right]$。

更進一步來說，當 m 是偶數時，$m-3$ 是奇數、$m-6$ 是偶數，所以

$$\begin{aligned} f(m,3)=f(m-3,3)= {} & f(m-6,3)+\left[\frac{m-2}{4}\right] \\ &= f(m-12,3)+\left[\frac{m-8}{4}\right]+\left[\frac{m-2}{4}\right] = f(m-12,3)+\frac{m-6}{2} \quad ; \end{aligned}$$

最後一個等式成立是因為 $\left[\dfrac{m-2}{4}\right]+\left[\dfrac{m-8}{4}\right]=\dfrac{(m-8)+(m-2)-2}{4}$。類似地，當 m 是奇數時，$m-3$ 是偶數、$m-6$ 是奇數，所以

$$\begin{aligned} f(m,3)=f(m-3,3)+\left[\frac{m+1}{4}\right] = {} & f(m-6,3)+\left[\frac{m+1}{4}\right] \\ &= f(m-12,3)+\left[\frac{m-5}{4}\right]+\left[\frac{m+1}{4}\right] = f(m-12,3)+\frac{m-3}{2} \text{。} \end{aligned}$$

最後一個等式成立是因為 $\left[\dfrac{m-5}{4}\right]+\left[\dfrac{m+1}{4}\right]=\dfrac{(m-5)+(m+1)-2}{4}$。我們也可以將兩個式子合寫成一個式子 $f(m,3)=f(m-12,3)+\dfrac{m-m'}{2}$，其中，當 m 是偶數時 $m'=6$，當 m 是奇數時 $m'=3$。令 $m=12t+r$，其中 $0 \le r \le 11$，則

$$\begin{aligned} f(m,3) = {} & f(m-12,3)+\frac{m-m'}{2} \\ = {} & f(m-24,3)+\frac{m-12-m'}{2}+\frac{m-m'}{2} \\ = {} & f(m-36,3)+\frac{m-24-m'}{2}+\frac{m-12-m'}{2}+\frac{m-m'}{2} \\ = {} & \cdots \\ = {} & f(r,3)+\frac{(12+r)-m'}{2}+\cdots+\frac{m-24-m'}{2}+\frac{m-12-m'}{2}+\frac{m-m'}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(r,3) + \frac{m-r}{24} \cdot \frac{12 + r - m' + m - m'}{2} \\
&= \frac{m^2 + (12-2m')m - r(r+12-2m') + 48f(r,3)}{48} ,
\end{aligned}
$$

其中，當 m 是偶數的時候有 $12-2m'=0$、當 m 是奇數的時候有 $12-2m'=6$，所以 $(12-2m')m = 3m + (-1)^{m-1}(3m)$。至於常數項 $f'(m,3) = -r(r+12-2m') + 48f(r,3)$ 則可由表（一）的數據計算如下。

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(r,3)$	0	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	4
$f'(m,3)$	0	-7	-4	21	-16	-7	12	5	-16	9	-4	5

所以也可以得到

$$
\begin{aligned}
f(m,3) &= \frac{1}{48}\left(m^2 + 3m + (-1)^{m-1}3m + f'(m,3)\right) \\
&= \left[\frac{1}{48}\left(m^2 + 3m + 21 + (-1)^{m-1}3m\right)\right] 。
\end{aligned}
$$

3 四數的整數分拆

在這一節我們將使用兩種不同的方法推導 $f(m,4)$。為了方便書寫，假設四個正整數是 a、b、c、d，並滿足 $a+b+c+d=m$、$1 \leq a \leq b \leq c \leq d$、$a+b+c>d$，使其恰好可以構成四邊形的四段邊長（不討論邊的次序）。

3.1 推導 $f(m,4)$ 的第一種方法

先來看推導 $f(m,4)$ 的第一種方法。我們將四正整數 a、b、c、d 由小到大依序表示為 (a,b,c,d)，而其必須滿足 $a+b+c>d$，且 $a+b+c+d=m$。

首先，我們知道 $4a \leq a+b+c+d = m$，所以 $4a \leq m$，也就是 $a \leq \left[\frac{m}{4}\right]$。另外，為了方便計算，我們將 b、c、d 分別寫為 $a-1+x$、$a-1+y$、$a-1+z$。如此一來 $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$ 中 (a,b,c,d) 的解個數便等於 (a,x,y,z) 正整數解的個數。又因為 $a+b+c+d=m$，所以 $x+y+z=m-4a+3$。以下將 $f(m,4)$ 分為 $x+y>z$ 及 $x+y \leq z$ 兩種情況討論。

當 $x+y>z$ 時，$a+b+c = 3a-2+x+y > 3a-2+z > 2a-2+z \geq a-1+z = d$，且 $1 \leq x \leq y \leq z$，$x+y+z = m-4a+3$。因此共有

$$
\sum_{i=1}^{[m/4]} f(m-4i+3,3) \text{ 組解。}
$$

當 $x+y \leq z$ 時，因為 $a+b+c = 3a-2+x+y > d = a-1+z$，故 $x+y > z-2a+1$。得 $z-2a+1 < x+y \leq z$ 且 $x+y+z = m-4a+3$ 。令 $x+y = z-r$，

則 $2z-r=m-4a+3$。我們知道，當 m 為偶數時，r 須為奇數，z 方有整數解；m 為奇數時，r 須為偶數，z 方有整數解，因此更進一步來說，可分為兩種情況討論。

當 m 為偶數時，令 $m=2k$。$a=n$ 時，$z-2n+1<x+y\leq z$，知 $x+y=z-1,z-3,\ldots,z-(2n-3)$ 時，(x,y,z) 有整數解。又因為 $x+y+z=m-4n+3$，故 $x+y=z-1,z-3,\ldots,z-(2n-3)$ 時，(x,y,z) 的整數解分別有

$$\left[\frac{k-(2n-1)}{2}\right],\ \left[\frac{k-2n}{2}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{k-(3n-3)}{2}\right] \quad \text{組。}$$

而其中對於 $2n-1\leq j\leq 3n-3$，若 $k-j<0$，表示 $x+y<0$，不合。為了方便，令

$$[n]^{+}=\begin{cases}[n]\text{，} & \text{若 } n\geq 0\text{；}\\ 0\text{，} & \text{若 } n<0\text{。}\end{cases}$$

我們知道 $x+y\leq z$，$m=2k$ 時，共有 $\sum\limits_{i=2}^{[m/4]}\left(\sum\limits_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}\right)$ 組解。根據上述可知 $m=2k$ 時，

$$f(m,4)=\sum_{i=1}^{[m/4]}f(m-4i+3,3)+\sum_{i=2}^{[m/4]}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}\right)\text{。}$$

更進一步來說，令 $m=12t+r$，$r=0,2,4,6,8,10$，可進一步計算如下

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{[m/4]}f(m-4i+3,3)\\ =\ & f(m-1,3)+f(m-5,3)+f(m-9,3)+\cdots+f(m+3-4\,[m/4]\,,3)\\ =\ & \sum_{i=0}^{t-1}\Big(f(12i+a,3)+f(12i+b,3)+f(12i+c,3)\Big)+m'\ ,\end{aligned}$$

其中

$r=$	0	2	4	6	8	10
$[m/4]$	$3t$	$3t$	$3t+1$	$3t+1$	$3t+2$	$3t+2$
$m+3-4\,[m/4]$	3	5	3	5	3	5
(a,b,c)	$(3,7,11)$	$(5,9,13)$	$(7,11,15)$	$(9,13,17)$	$(11,15,19)$	$(13,17,21)$
m'	0	0	$f(3,3)$	$f(5,3)$	$f(3,3)+f(7,3)$	$f(5,3)+f(9,3)$

配合三數的整數分拆，可得到：

$r=$	0	2	4
$\sum_{i=1}^{[m/4]} f(m-4i+3,3)$	$\sum_{i=0}^{r-1} 9i^2+15i+7$	$\sum_{i=0}^{r-1} 9i^2+12i+4$ $+(3r^2+2r)$	$\sum_{i=0}^{r-1} 9i^2+15i+7$ $+(3r^2+3r+1)$
$r=$	6	8	10
	$\sum_{i=0}^{r-1} 9i^2+12i+4$ $+(6r^2+6r+1)$	$\sum_{i=0}^{r-1} 9i^2+15i+7$ $+(6r^2+8r+3)$	$\sum_{i=0}^{r-1} 9i^2+12i+4$

再看到 $\sum_{i=2}^{[m/4]}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}\right)$。對於所有滿足 $2n-1\leq k\leq 3n-3$ 的正整數 n，令 n 的最小值為 α_1、最大值為 β_1，則我們可以知道，當 $2\leq i\leq \alpha_i-1$ $(i\in\mathbb{N})$ 時，將有 $j=2i-1,2i,\ldots,3i-3$ 使得 $\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}=\left[\frac{k-j}{2}\right]$。並當 $k\geq 3$ 時，令 $\left[\frac{k-3}{2}\right]=x$。令 $\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]=g(i)$。則可得

$$\sum_{i=2}^{[m/4]}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}\right)=\sum_{i=2}^{\alpha_1-1}g(i)+\sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}\right),$$

對於所有 $i\geq\beta_1+1$，將使得 $\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^{+}=0$。更進一步討論 $\sum_{i=2}^{\alpha_i-1}g(i)$，可分為兩種狀況。

第一種狀況 k 為偶數時，我們知道 $\left[\frac{k-(2n+1)}{2}\right]=\left[\frac{k-(2n+2)}{2}\right]$ $(2n+2\leq k)$，故可得下表：

$g(2)$	x
$g(3)$	$(x-1)+(x-1)$
$g(4)$	$(x-2)+(x-2)+(x-3)$
$g(5)$	$(x-3)+(x-3)+(x-4)+(x-4)$
$g(6)$	$(x-4)+(x-4)+(x-5)+(x-5)+(x-6)$

同理可得：$g(i)=\begin{cases}(i-1)x+\left(\frac{5}{4}i^2-4i+3\right), & i\text{ 為偶數；}\\ (i-1)x+\left(\frac{5}{4}i^2-4i+\frac{11}{4}\right), & i\text{ 為奇數。}\end{cases}$ 為了計算方便，可再分為以下兩種情況。

α_1 為偶數時：

$$\sum_{i=2}^{\alpha_1-1} g(i) = \sum_{\gamma=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}} \Big((2\gamma-1)x-(5\gamma^2-8\gamma+3)\Big) + \sum_{\delta=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}} \Big(2\delta x-(5\delta^2-3\delta)\Big)$$
$$= \sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}} \Big[4x\epsilon^2 - x - 10\epsilon^2+11\epsilon-3\Big] = \sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}} \Big((-10)\epsilon^2+(4x+11)\epsilon-(x+3)\Big) \text{。}$$

α_1 為奇數時：

$$\sum_{i=2}^{\alpha_1-1} g(i) = \sum_{\gamma=1}^{\frac{\alpha_1-1}{2}} \Big((2\gamma-1)x-(5\gamma^2-8\gamma+3)\Big) + \sum_{\delta=1}^{\frac{\alpha_1-3}{2}} \Big(2\delta x-(5\delta^2-3\delta)\Big)$$
$$= \sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}} \Big[(-10)\epsilon^2+(4x+11)\epsilon-(x+3)\Big] + (\alpha_1-2)x - \frac{5}{4}(\alpha_1-1)^2 + 4(\alpha_1-1) - 3 \text{。}$$

第二種狀況 k 為奇數時，與 k 為偶數時同理可得：

$$\sum_{i=2}^{\alpha_1-1} g(i) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}} \Big[(-10)\epsilon^2+(4x+9)\epsilon-(x+2)\Big] \text{，} & \text{當 } \alpha_1 \text{ 為偶數；} \\ \displaystyle\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-3}{2}} \Big[(-10)\epsilon^2+(4x+9)\epsilon-(x+2)\Big] & \\ \quad + \Big[(\alpha_1-2)x - \frac{5}{4}(\alpha_1-1)^2 + \frac{7}{2}(\alpha_1-1) - 2\Big] \text{，} & \text{當 } \alpha_1 \text{ 為奇數。} \end{cases}$$

最後討論 $\displaystyle\sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1} \left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3} \left[\frac{k-j}{2}\right]^+ \right)$ 亦可分為兩種狀況。

第一種狀況 k 為偶數時，令 $a_{p,g}$ 為 $i=p$ 的第 q 個 j，其值為 $(2p-1)+q-1$，如下表：

i	j	$a_{p,q}$
2	3	$a_{2,1}$
3	5、6	$a_{3,1}$、$a_{3,2}$
4	7、8、9	$a_{4,1}$、$a_{4,2}$、$a_{4,3}$
5	9、10、11、12	$a_{5,1}$、$a_{5,2}$、$a_{5,3}$、$a_{5,4}$

令 $k = a_{\alpha_1,\omega_1} = a_{\alpha_1+1,\omega_2} = \cdots = \alpha_{\beta_1,\omega_\sigma}$，對於 $a_{\alpha_1,\tau}$ $(\tau > \omega_1)$ 時，$\left[\dfrac{k-a_{\alpha_1,\tau}}{2}\right]^+ = 0$，與此同理，故我們只討論上表中與 k 同列並在其前行的 $a_{p,q}$，我們可得下表。

i	j	$\left[\frac{k-j}{2}\right]^+$
β_1	$2\beta_1-1$、$a_{\beta_1,\omega_\sigma}(k)$	0、0
β_1-1	$2\beta_1-3$、$2\beta_1-2$、$2\beta_1-1$、$a_{\beta_1-1,\omega_{\sigma-1}}(k)$	1、1、0、0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_1	$2\alpha_1-1$、$2\alpha_1$、$\cdots$、$a_{\alpha_1,\omega_1}(k)$	$\frac{k-2\alpha_1}{2}$、$\frac{k-2\alpha_1}{2}$、$\cdots$、0

由上表可知，所求

$$\begin{aligned}\sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\sum_{j=2i-1}^{2i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^+\right) &= \sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1} 2\left(0+1+2+\cdots+\frac{k-2i}{2}\right) \\ &= \sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{k-2i+2}{2}\right)\left(\frac{k-2i}{2}\right) 。\end{aligned}$$

第二種狀況 k 為奇數時，同理可得

$$\sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\sum_{j=2i-1}^{2i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^+\right) = \sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{k-2i+1}{2}\right)^2 。$$

綜合上述可得 $\sum_{i=2}^{[m/4]}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{k-j}{2}\right]^+\right)$ 其值，以下整理：

1. k 為偶數時，

$$\sum_{i=2}^{t}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{2t-j}{2}\right]^+\right) = \sum_{i=2}^{\alpha_1-1} g(i) + \sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{k-2i+2}{2}\right)\left(\frac{k-2i}{2}\right) 。$$

$$\sum_{i=2}^{\alpha_1-1} g(i) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}}\left[(-10)\epsilon^2+(4x+11)\epsilon-(x+3)\right] ， & \text{當 } \alpha_1 \text{ 為偶數；} \\ \displaystyle\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}}\left[(-10)\epsilon^2+(4x+11)\epsilon-(x+3)\right] & \\ \quad +\left[(\alpha_1-2)x-\frac{5}{4}(\alpha_1-1)^2+4(\alpha_1-1)-3\right] ， & \text{當 } \alpha_1 \text{ 為奇數。} \end{cases}$$

2. k 為奇數時，

$$\sum_{i=2}^{t}\left(\sum_{j=2i-1}^{3i-3}\left[\frac{2t+1-j}{2}\right]^{+}\right)=\sum_{i=2}^{\alpha_1-1}g(i)+\sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{k-2i+1}{2}\right)^2 \text{。}$$

$$\sum_{i=2}^{\alpha_1-1}g(i)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}}\left[(-10)\epsilon^2+(4x+9)\epsilon-(x+2)\right]\text{，} & \text{當 } \alpha_1 \text{ 為偶數；}\\ \displaystyle\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-3}{2}}\left[(-10)\epsilon^2+(4x+9)\epsilon-(x+2)\right] & \\ \quad+\left[(\alpha_1-2)x-\frac{5}{4}(\alpha_1-1)^2+\frac{7}{2}(\alpha_1-1)-2\right]\text{，} & \text{當 } \alpha_1 \text{ 為奇數。}\end{cases}$$

綜合上述，再將 m 以 $12t+r$ 分別代入。例如 $r=0$ 時，$\alpha_1=2t+1$、$\beta_1=3t$、$x=3t-2$，經計算可得

$$\begin{aligned}&f(12t,4)\\
=&\left(\sum_{i=0}^{r-1}9i^2+15i+7\right)+\sum_{\epsilon=1}^{\frac{\alpha_1-2}{2}}[(-10)\epsilon^2+(4x+11)\epsilon-(x+3)]\\
&+(\alpha_1-2)x-\frac{5}{4}(\alpha_1-1)^2+4(\alpha_1-1)-3+\sum_{i=\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{k-2i+2}{2}\right)\left(\frac{k-2i}{2}\right)\\
=&\frac{9(t-1)t(2t-1)}{6}+15\frac{t(t-1)}{2}+7t+\frac{(-10)(t-1)t(2t-1)}{6}+(12t+3)\frac{(t-1)t}{2}\\
&-(3t+1)(t-1)+(2t-1)(3t-2)-5t^2+8t-3+\frac{3t(3t+1)(6t+1)}{6}\\
&-\frac{2t(2t+1)(4t+1)}{6}-(6t+1)\frac{(5t+1)t}{2}+3t(3t+1)t\\
=&6t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t \text{ 。}\end{aligned}$$

同理可得

r	0	2	4
$f(12t+r,4)$	$6t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t$	$6t^3+\frac{9}{2}t^2+\frac{3}{2}t$	$6t^3+\frac{15}{2}t^2+\frac{7}{2}t+1$
$f(m,4)$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{96}m^2+\frac{1}{24}m$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{96}m^2+\frac{1}{24}m-\frac{11}{72}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{96}m^2+\frac{1}{24}m+\frac{4}{9}$
r	6	8	10
$f(12t+r,4)$	$6t^3+\frac{21}{2}t^2+\frac{13}{2}t+1$	$6t^3+\frac{27}{2}t^2+\frac{21}{2}t+3$	$6t^3+\frac{33}{2}t^2+\frac{31}{2}t+5$
$f(m,4)$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{96}m^2+\frac{1}{24}m-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{96}m^2+\frac{1}{24}m+\frac{2}{9}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{96}m^2+\frac{1}{24}m+\frac{5}{72}$

利用一樣的方法可討論 m 為奇數時的解。

r	1	3	5
$f(12t+r,4)$	$6t^3+\frac{9}{2}t^2+\frac{1}{2}t$	$6t^3+\frac{15}{2}t^2+\frac{5}{2}t$	$6t^3+\frac{21}{2}t^2+\frac{11}{2}t+1$
$f(m,4)$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{48}m^2-\frac{1}{96}m-\frac{1}{72}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{48}m^2-\frac{1}{96}m-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{48}m^2-\frac{1}{96}m+\frac{7}{72}$
r	7	9	11
$f(12t+r,4)$	$6t^3+\frac{27}{2}t^2+\frac{19}{2}t+2$	$6t^3+\frac{33}{2}t^2+\frac{29}{2}t+4$	$6t^3+\frac{39}{2}t^2+\frac{41}{2}t+7$
$f(m,4)$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{48}m^2-\frac{1}{96}m-\frac{5}{36}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{48}m^2-\frac{1}{96}m-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{288}m^3+\frac{1}{48}m^2-\frac{1}{96}m-\frac{1}{36}$

根據上述，可以歸納得

$$f(m,4)=\left[\frac{1}{288}\left(m^3+\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m+128+(-1)^{m+1}\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{15}{2}m\right)\right)\right] 。$$

3.2 推導 $f(m,4)$ 的第二種方法

再來看推導 $f(m,4)$ 的第二種方法。類似第 2.2 節中推導 $f(m,3)$ 的第二種方法，對於正整數 m 來說，四正整數 a、b、c、d 滿足 $a+b+c+d=m$，且 $a+b+c\geq d+1$ 可分為三種情形討論。

(3.1) 當 $a+b+c=d+1=\dfrac{m+1}{2}$ 時，易知 m 為奇數時，a、b、c、d 方有正整數解，且共有 $p\left(\dfrac{m+1}{2},3\right)=p\left(\left[\dfrac{m+2}{2}\right],3\right)$ 組解。

(3.2) 當 $a+b+c=d+2=\dfrac{m+2}{2}$ 時，易知 m 為偶數時 a、b、c、d 方有正整數解，且共有 $p\left(\dfrac{m+2}{2},3\right)=p\left(\left[\dfrac{m+3}{2}\right],3\right)$ 組解。

(3.3) 當 $a+b+c\geq d+3$ 時，若 $a=1$ 則有 $b+c\geq d+2\geq c+2$，知 $b\geq 2$，故可改寫為 $(b-1)+(c-1)\geq(d-1)+1$，共有 $f(m-4,3)$ 組解；若 $a\geq 2$，則可改寫為 $(a-1)+(b-1)+(c-1)\geq(d-1)+1$，共有 $f(m-4,4)$ 組解。故 $a+b+c\geq d+3$ 時共有 $f(m-4,3)+f(m-4,4)$ 組解。

綜合上述三點可知：

$$f(m,4)=f(m-4,4)+f(m-4,3)+p\left(\left[\frac{m+2}{2}\right],3\right) 。$$

為了推導 $f(m,4)$ 的需要，接下來模仿推導 $f(m,3)$ 的第二種方法，推導 $p(m,3)$ 如下。回憶到，$p(m,3)$ 是要求滿足 $a\leq b\leq c$ 的正整數所成數列 (a,b,c) 的個數。這些數列可以分為兩種，一種滿足 $a=1$，另一種滿足 $a\geq 2$。

對於第一種情況 $a=1$，因為 $a+b+c=m$ 相當於 $b+c=m-1$，其中 $1\leq b\leq c$，所以共有 $p(m-1,2)=\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$ 組解。對於第二種情況 $a\geq 2$，考慮正整數數列 (a',b',c')，其中 $a'=a-1$、$b'=b-1$、$c'=c-1$，它滿足 $a'+b'+c'=m-3$、$a'\leq b'\leq c'$，這對應到 $p(m-3,3)$ 的一個解。綜合以上兩種情況，可以得到 $p(m,3)=p(m-3,3)+\left[\dfrac{m-1}{2}\right]$。更進一步來說，

$$
\begin{aligned}
p(m,3) = &\ p(m-3,3)+\left[\frac{m-1}{2}\right] = \ p(m-6,3)+\left[\frac{m-1}{2}\right]+\left[\frac{m-4}{2}\right] \\
= &\ p(m-6,3)+\frac{m-1+m-4-1}{2} \\
= &\ p(m-6,3)+(m-3) \text{ 。}
\end{aligned}
$$

令 $m=6t+r$，其中 $0\leq r\leq 5$，則

$$
\begin{aligned}
p(m,3) = &\ p(m-6,3)+(m-3) \\
= &\ p(m-12,3)+(m-3)+(m-9) \\
= &\ \cdots \\
= &\ p(r,3)+(m-3)+(m-9)+\cdots+(m-6t+3) \\
= &\ p(r,3)+\frac{m-r}{6}\,\frac{(m-3)+(m-6t+3)}{2} \\
= &\ \frac{m^2-r^2+12p(r,3)}{12} \text{ ，}
\end{aligned}
$$

其中，$p'(m,3)=-r^2+12p(r,3)$ 計算如下表。

r	0	1	2	3	4	5
$p(r,3)$	0	0	0	1	1	2
$p'(m,3)=-r^2+12p(r,3)$	0	-1	-4	3	-4	-1

所以可以得到 $p(m,3)=\dfrac{1}{12}\Big(m^2+p'(m,3)\Big)=\left[\dfrac{1}{12}(m^2+3)\right]$。其實 m^2+3 中的 3 可以用 $3\sim 7$ 中任一數取代。

有了 $p(m,3)$ 的公式，再加上前一節 $f(m,3)$ 的答案，就可以接著計算 $f(m,4)$

如下。

$$
\begin{aligned}
f(m,4) = \ & f(m-4,4)+f(m-4,3)+p\left(\left[\frac{m+2}{2}\right],3\right) \\
= \ & f(m-8,4)+f(m-8,3)+p\left(\left[\frac{m-2}{2}\right],3\right) \\
& \quad +f(m-4,3)+p\left(\left[\frac{m+2}{2}\right],3\right) \\
= \ & f(m-12,4)+f(m-12,3)+p\left(\left[\frac{m-6}{2}\right],3\right) \\
& \quad +f(m-8,3)+p\left(\left[\frac{m-2}{2}\right],3\right)+f(m-4,3)+p\left(\left[\frac{m+2}{2}\right],3\right) \\
= \ & f(m-12,4)+f^{\star}(m,4) \quad ,
\end{aligned}
$$

其中 $f^{\star}(m,4)=A+B$ 而且

$$
\begin{aligned}
A = \ & \frac{1}{48}\left((m-12)^2+3(m-12)+(-1)^{m-12-1}3(m-12)+4\left[\frac{m-6}{2}\right]^2\right) \\
& +\frac{1}{48}\left((m-8)^2+3(m-8)+(-1)^{m-8-1}3(m-8)+4\left[\frac{m-2}{2}\right]^2\right) \\
& +\frac{1}{48}\left((m-4)^2+3(m-4)+(-1)^{m-4-1}3(m-4)+4\left[\frac{m+2}{2}\right]^2\right) \\
= & \begin{cases} \frac{1}{48}(6m^2-60m+268) \text{ ，} & \text{當 } m \text{ 是偶數時，} \\ \frac{1}{48}(6m^2-48m+139) \text{ ，} & \text{當 } m \text{ 是奇數時，} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B = \ & \frac{1}{48}\left(f'(m-12,3)+4p'\left(\left[\frac{m-6}{2}\right],3\right)+f'(m-8,3)+4p'\left(\left[\frac{m-2}{2}\right],3\right)\right. \\
& \left.+f'(m-4,3)+4p'\left(\left[\frac{m+2}{2}\right],3\right)\right) \quad 。
\end{aligned}
$$

用下表來計算 B 得知，當 m 是偶數時 $B=\dfrac{1}{48}(-28)$，當 m 是奇數時 $B=\dfrac{1}{48}(-1)$。遂有

$$
f^{\star}(m,4)=\begin{cases} \frac{1}{48}(6m^2-60m+240) \text{ ，} & \text{當 } m \text{ 是偶數，} \\ \frac{1}{48}(6m^2-48m+138) \text{ ，} & \text{當 } m \text{ 是奇數。} \end{cases}
$$

$m-12 \bmod 12$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f'(m-12,3)$	0	-7	-4	21	-16	-7	12	5	-16	9	-4	5
$m-8 \bmod 12$	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
$f'(m-8,3)$	-16	-7	12	5	-16	9	-4	5	0	-7	-4	21
$(m-4) \bmod 12$	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
$f'(m-4,3)$	-16	9	-4	5	0	-7	-4	21	-16	-7	12	5
$\left[\frac{m-6}{2}\right] \bmod 6$	3	3	4	4	5	5	0	0	1	1	2	2
$4p'\left(\left[\frac{m-6}{2}\right],3\right)$	12	12	-16	-16	-4	-4	0	0	-4	-4	-16	-16
$\left[\frac{m-2}{2}\right] \bmod 6$	5	5	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$4p'\left(\left[\frac{m-2}{2}\right],3\right)$	-4	-4	0	0	-4	-4	-16	-16	12	12	-16	-16
$\left[\frac{m+2}{2}\right] \bmod 6$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	0	0
$4p'\left(\left[\frac{m+2}{2}\right],3\right)$	-4	-4	-16	-16	12	12	-16	-16	-4	-4	0	0
$48B$	-28	-1	-28	-1	-28	-1	-28	-1	-28	-1	-28	-1

接著假設 $m = 12t + r$，其中 $0 \le r < 12$，則

$$
\begin{aligned}
& f(m,4) \\
= \ & f(m-12,4) + f^\star(m,4) \\
= \ & f(m-24,4) + f^\star(m-12,4) + f^\star(m,4) \\
= \ & \cdots \\
= \ & f(r,4) + \sum_{i=0}^{t-1} f^\star(m-12i,4) \\
= \ & f(r,4) + \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{48}\Big(6(m-12i)^2 - 60(m-12i) + 240\Big) \text{，} & \text{當 } m \text{ 是偶數時，} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{48}\Big(6(m-12i)^2 - 48(m-12i) + 138\Big) \text{，} & \text{當 } m \text{ 是奇數時。} \end{cases} \\
= \ & \begin{cases} \dfrac{1}{288}\Big(m^3 + 3m^2 + 12m - r^3 - 3r^2 - 12r + 288f(r,4)\Big) \text{，} & \text{當 } m \text{ 是偶數時，} \\ \dfrac{1}{288}\Big(m^3 + 6m^2 - 3m - r^3 - 6r^2 + 3r + 288f(r,4)\Big) \text{，} & \text{當 } m \text{ 是奇數時。} \end{cases}
\end{aligned}
$$

這個答案的 288 倍，當做 m 的三次多項式，其常數項 $f'(m,4)$ 計算如下表。

$m \bmod 12$	0	1	2	3	4	5
$-r^3-3r^2-12r$	0		-44		-160	
$-r^3-6r^2+3r$		-4		-72		-260
$f(r,4)$	0	0	0	0	1	1
$288f(m,4)$	0	-4	-68	-72	128	28
$m \bmod 12$	6	7	8	9	10	11
$-r^3-3r^2-12r$	-396		-800		-1420	
$-r^3-6r^2+3r$		-616		-1188		-2024
$f(r,4)$	1	2	3	4	5	7
$288f(m,4)$	-108	-40	64	-36	20	-8

根據上述，可以歸納得

$$\begin{aligned} f(m,4) = & \frac{1}{288}\left(m^3+\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m+f'(m,4)+(-1)^{m+1}\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{15}{2}m\right)\right) \\ & \left[\frac{1}{288}\left(m^3+\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m+128+(-1)^{m+1}\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{15}{2}m\right)\right)\right] \text{。} \end{aligned}$$

4 推導五數以上的方法

在這節我們將延伸推導三數的第二種方法與推導四數的第二種方法，將其用來推導五數以上的整數分拆方法。首先探討 $p(m,n)$，接著進一步將其引入 $f(m,n)$ 的推導過程。

4.1 推導 $p(m,n)$ 的方法

為了推導 $p(m,n)$ 的需要，可以模仿推導 $f(m,3)$ 的第二種方法，推導 $p(m,n)$。回憶到，$p(m,n)$ 是要在正整數 m,n 中滿足

$$1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$$

的正整數數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 個數。這種數列可以分為兩種，一種滿足 $a_1=1$，另一種滿足 $a_1 \ge 2$。

對於第一種情況 $a_1=1$，因為 $a_1+a_2+\cdots+a_n=m$ 相當於 $a_2+\cdots+a_n=m-1$，其中 $1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$，所以共有 $p(m-1,n-1)$ 組解。

對於第二種情況 $a_1 \ge 2$，考慮到正整數數列 $(a'_1,a'_2,\ldots,a'_n)$，其中對於 $i=1,2,\ldots,n$，滿足 $a'_i=a_i-1$，則它滿足 $a'_1+a'_2+\cdots+a'_n=m-n$，$1 \le a'_1 \le a'_2 \le \ldots a'_n$，這對應到 $p(m-n,n)$ 的一個解。

綜合上述兩種情況，可以得到 $p(m,n) = p(m-n,n) + p(m-1,n-1)$。進一步來說，

$$\begin{aligned} p(m,n) =\ & p(m-n,n) + p(m-1,n-1) \\ =\ & p(m-2n,n) + p(m-n-1,n-1) + p(m-1,n-1) \\ =\ & p\left(m - \left[\frac{m}{n}\right] n, n\right) + \sum_{i=1}^{[m/n]} p(m-in+n-1,n-1) \\ =\ & \sum_{i=1}^{[m/n]} p(m-in+n-1,n-1) \text{ 。} \end{aligned}$$

最後一個等式成立是因為 $\frac{m}{n} - 1 < \left[\frac{m}{n}\right] \leq \frac{m}{n}$ 相當於 $0 \leq m - \left[\frac{m}{n}\right] n < \mathrm{n}$。

上式根據遞迴關係可以將 $p(m,n)$ 化簡，再代入 $p(m,2) = \left[\frac{m}{2}\right]$ 即可求得其值。

4.2 $p(m,n)$ 的生成函數

在這個分節中，我將嘗試以生成函數的角度來探討 $p(m,n)$。首先回憶到，$p(m,n)$ 是要在正整數 m,n 中滿足

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

的正整數數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 個數。假設對於 $i = 1,2,\ldots,n$，$b_i = a_i - a_{i-1}$、其中 $a_0 = 1$，則正整數數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 個數相當於非負整數數列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 個數，$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 相當於 $b_1,b_2,\ldots,b_n \geq 0$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$ 相當於 $nb_1 + (n-1)b_2 + \cdots + 1 \cdot b_n = m - n$。

滿足 $nb_1 + (n-1)b_2 + \cdots + 1 \cdot b_n = m - n$ 的非負整數數列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 個數，相當於函數 $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots(1 + x^n + x^{2n} + \cdots)$ 的 x^{m-n} 係數，這是因為 $nb_1 = 0,n,2n,\ldots$ 、$(n-1)b_2 = 0,(n-1),(n-2),\ldots$ 、$\cdots$ 、$1 \cdot b_1 = 0,1,2,\ldots$。

試著將上述結果簡化。$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots(1 + x^n + x^{2n} + \cdots)$ 的 x^{m-n} 係數，相當於 $x^n(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots(1 + x^n + x^{2n} + \cdots)$ 的 x^m 係數。又經由泰勒展開式可得

$$x^n(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)\cdots(1 + x^n + x^{2n} + \cdots) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x}{1 - x^i} \text{ 。}$$

因此 $\prod_{i=1}^{n} \frac{x}{1 - x^i}$ 中的 x^m 係數即為非負整數數列 $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 的個數，也就是正整數數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的個數。

綜合上述，可得到的生成函數為

$$p(m,n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x}{1-x^i}\quad 。$$

4.3 推導 $f(m,n)$ 的方法

接著討論 $f(m,n)$，我們可以模仿推導 $f(m,3)$ 以及 $f(m,4)$ 的方法推導 $f(m,n)$。回憶到，$f(m,n)$ 是在正整數 m,n 中要滿足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}>a_n\ \text{，也就是}\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\geq a_n+1$$

的正整數數列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 個數。這種數列也可以分成 $n-1$ 種情況，分別是 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+1$、$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+2$、$\cdots$、$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+(n-2)$ 以及 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\geq a_n+(n-1)$。又可歸納為以下三種類型。

對於第一種類型 $k=1,2,\ldots,\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 時，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+(2k-1)=\dfrac{m+2k-1}{2}$，易知 m 為奇數時 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 方有正整數解，且共有 $p\left(\dfrac{m+2k-1}{2},n-1\right)$ 組解。

對於第二種類型 $k=1,2,\ldots,\left[\dfrac{n-2}{2}\right]$ 時，$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=a_n+2k=\dfrac{m+2k}{2}$，易知 m 為偶數時 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 方有正整數解，且共有 $p\left(\dfrac{m+2k}{2},n-1\right)$ 組解。

對於第三種類型 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\geq a_n+(n-1)$，若 $a_1=1$ 則有 $a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}\geq a_n+(n-2)$，以下證明共有 $\sum_{i=3}^{n-1}f(m-n,i)$ 組解。

證明. 考慮 $n=4$ 時，$a_2+a_3\geq a_4+2$，因為 $a_2=1$ 時有 $a_3\geq a_4+1$ 不合，故 $a_2\geq 2$ 且 $(a_2-1)+(a_3-1)\geq(a_4-1)+1$，有 $f(m-4,3)$ 組解。假設 $n=k$ 時 $a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}\geq a_k+(k-2)$ 有 $\displaystyle\sum_{i=3}^{k-1}f(m-k,i)$ 組解。考慮 $n=k+1$ 時 $a_2+a_3+\cdots+a_k\geq a_{k+1}+(k-1)$，若 $a_2=1$ 則有 $a_3+a_4+\cdots+a_k\geq a_{k+1}+(k-2)$，有 $\displaystyle\sum_{i=3}^{k-1}f(m-1-k,i)$ 組解。若 $a_2\geq 2$ 則有 $(a_2-1)+(a_3-1)+\cdots+(a_k-1)\geq(a_{k+1}-1)+1$，有 $f(m-1-k,k)$ 組解。因此 $n=k+1$ 時有 $\displaystyle\sum_{i=3}^{k}f(m-1-k,i)$ 個解。經由數學歸納法可得證，當 $a_1=1$ 時，$a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}\geq a_n+(n+2)$ 共有 $\displaystyle\sum_{i=3}^{n-1}f(m-n,i)$ 組解。 □

若 $a_1 \geq 2$，則可改寫為 $(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_{n-1}-1) \geq (a_n-1)+1$ 共有 $f(m-n,n)$ 組解。

故第三種類型 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} \geq a_n+(n-1)$ 時共有 $\sum_{i=3}^{n} f(m-n,i)$ 組解。

根據以上三點討論可得：

$$\begin{cases} \text{當 } m \text{ 為偶數時，} \ f(m,n)=\sum_{i=3}^{n} f(m-n,i)+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} p\left(\frac{m+2k}{2},n-1\right) \ \text{；} \\ \text{當 } m \text{ 為奇數時，} \ f(m,n)=\sum_{i=3}^{n} f(m-n,i)+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} p\left(\frac{m+2k-1}{2},n-1\right) \ \text{。} \end{cases}$$

5 參考資料

一、 蔡雅靜、鐔鎮鵬、晁福剛、任韓 (2015)，《整數邊三角形個數的組合與幾何證明方法》，上海市：華東師範大學、上海市：上海市核心數學與實踐重點實驗室。

二、 Louis Comtet (1974), Advanced Cmbinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions.

三、 維基百科，整數分拆。

四、 維基百科，Integer Triangle 。

五、 維基百科，母函數。