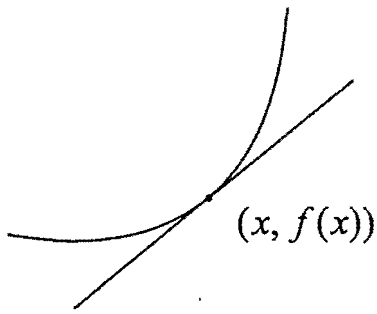
萊布尼茲設計微積分符號

張海潮

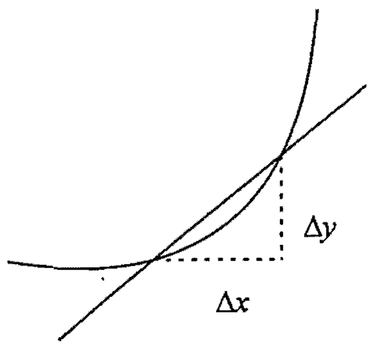
國立臺灣大學數學系教授

微積分這門學問通用的符號是德國人萊布尼茲(1646~1716)設計的。以微分來說，微分是用來求函數 $y=f(x)$ 圖形切線的斜率，如圖一：



▲圖一

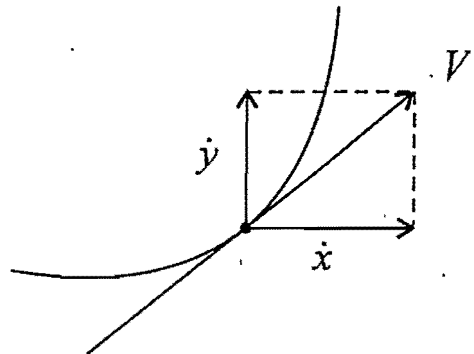
萊布尼茲將 $(x,\ f(x))$ 這一點的切線的斜率記為 $\dfrac{dy}{dx}$。萊布尼茲的想法大致是“切線是割線的極限位置”，而割線的斜率是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，如圖二：



▲圖二

式中 Δy（或 Δx）分別代表 y（或 x）方向的差額；當割線靠向切線時，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 就會趨近切線的斜率。在這個趨近的過程裏，萊布尼茲把代表差額的大寫希臘字母 Δ (delta)演化成小寫的拉丁字母 d，因此記成 $\dfrac{dy}{dx}$。這樣的記法和英國人牛頓(1642~1727)設計的符號差很大。

牛頓的出發點是運動學，他把 $y=f(x)$ 的圖形想成是一個質點運動的軌跡。軌跡的水平坐標 x 和鉛直坐標 y 分別是時間 t 的位置函數，牛頓以 $\dot{x},\dot{y}$ 分別表示水平和鉛直的速度（如果用萊布尼茲的符號表達 $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\ \dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$），如圖三：



▲圖三

圖中質點的平面速度向量是 $V=(\dot{x},\dot{y})$，所以 V 的斜率就是 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$。以 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 來理解切線斜率的辦法叫做流數法，為牛頓所發明，$x,\ y$ 稱為流量，$\dot{x},\dot{y}$ 稱為流數。如果將 $\dot{x},\dot{y}$ 分別以 $\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}$ 表達，牛頓對曲線斜率的表述，根據連鎖規則，其實就是：

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}$$

換句話說，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ 同樣是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\Big/\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限。不過由於額外的帶進一個參數 t 來表達斜率，牛頓的符號幾乎不被採用，倒是在物理的教科書中只要碰到對 t 的微分，經常還是用頭上加一點來表示，例如水平速度是 $\dot{x}$，加速度是 $\ddot{x}$ 以示對牛頓的尊崇。

從上面這兩種思想衍生出來的計算方法也大有差異。以 $y=x^2$ 為例，如果是萊布尼茲，計算如下：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+(\Delta x)$$

令 Δx 趨近於零，就會得到 $\dfrac{dy}{dx}=2x$，稱為解析方法。

至於牛頓，他的想法是當 x 走到 $x+0\dot{x}$ 時（此處的 0 是牛頓用的記號，不是零，只是代表一段很短的時間），相應的 y 走到 $y+0\dot{y}$，因此

$$y+0\dot{y}=(x+0\dot{x})^2$$

或 $$y+0\dot{y}=x^2+2x0\dot{x}+00\dot{x}^2$$

將$y=x^2$自兩邊消去，只保留一個0的項（00太小不計）：

$$0\dot{y}=2x0\dot{x}$$

再消去0，得到$\dot{y}=2x\dot{x}$或$\dot{y}/\dot{x}=2x$，稱為代數方法。

至少對多項式，例如$y=x^n$而言，兩個方法都很容易得到y對x的微分是nx^{n-1}。不過，如果$y=\sin x$（x是弧度），那牛頓的辦法就複雜的多，原因是當x變成$x+0\dot{x}$，y變成$y+0\dot{y}$時，不容易從$y+0\dot{y}=\sin(x+0\dot{x})$中將$\dot{x}$完整的抽離出來，此時，牛頓的解決方案是利用無窮級數，他把$\sin x$成功的表成：

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

這樣的寫法可以說是將多項式的概念推展到無窮多項，從這裏也可以看出牛頓方法的繁瑣。

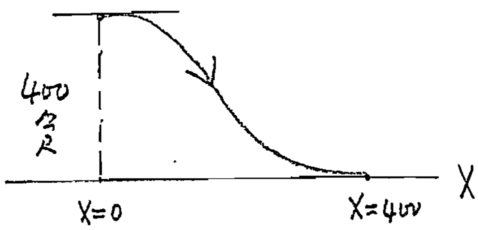
牛頓的符號還有一個麻煩，那就是如果要再對$\dfrac{dy}{dx}$進行微分時，萊布尼茲的記號是將二次微分$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$的上、下合併寫成$\dfrac{d^2y}{dx^2}$這樣一個清爽的式子，乃至於更進一步將$n$次微分記成$\dfrac{d^ny}{dx^n}$。但是牛頓怎麼記?一次微分如前所述是$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$，二次微分只好寫成$\left(\dfrac{\overset{0}{\dot{y}}}{\dot{x}}\right)\Big/\dot{x}$，那三次微分還得了，特別是在那個時代，可能連印刷都成問題。所以，千萬不要小看萊布尼茲的設計，設計本身充滿了創意，從那時到現在，公認是表達微分概念最具啟發的符號。

萊布尼茲在 1684 年出版微積分的論文及他所設計的符號。牛頓雖然早在1669年就在他的朋友中散發微積分的論文，正式的出版（一部分）卻延到1693年，完整的出版是在1704年。但是從1699年之後，萊布尼茲開始受到牛頓追隨者的攻訐，說他剽竊了牛頓的研究成果。萊布尼茲不堪其擾，在1711年請求英國皇家學會糾正（此時學會的主席正是牛頓）。學會在1712年組了一個委員會進行調查，結果委員會確認萊布尼茲的剽竊罪，牛頓雖然假裝保持中立，但是卻暗中起草了一份調查報告交給委員會整理發佈。

由於萊布尼茲和牛頓各擁門徒，這個案子引發了英國和歐陸數學家之間的決裂，英國學界甚至拒絕使用萊布尼茲的符號和解析方法，自絕於歐洲大陸長達100年，直到1820年警覺到遠遠落後歐陸之後才恢復交流。最諷刺的是牛頓處理微積分的方法雖然不及萊布尼茲，但是牛頓將數學應用到物理的偉大成就反而啟發了許多歐陸的數學家們，他們應用萊布尼茲的解析方法，在力學上得到重大的成就。

在這 100 年中，世界上出現了下面這些重要的數學家：伯努利（瑞士 1667~1748）、尤拉（瑞士 1707~1783）、拉格朗日（意大利 1736~1813）、拉普拉斯（法國 1749~1827）、蒙日（法國 1746~1818）、傅里葉（法國 1768~1830）、高斯（德國 1777~1855）、柯西（法國 1789~1857）、雅可比（德國 1804~1851），其中沒有一個是英國人。

一、飛機進入機場降落時，如圖：在 $X=0$ 的上方400公尺處帶有一水平速度，



接著立刻下降到 $X=400$ 時以水平速度接觸跑道，假設在 $X=0$ 到 $X=400$ 這一段飛行的路徑是一個三次多項式的圖形

$$y = ax^3+bx^2+cx+d$$

求 a,b,c,d.

二、已知 $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$，$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

求 $\frac{d}{dx}(\tan x)$，$\frac{d}{dx}(\sec x)$

三、反函數的微分

(1) $X \longrightarrow X^2=y$

(2) $X \longrightarrow \sin X = y$

$X^2=y$，$X=\sqrt{y}$

求 $\frac{dX}{dy} = 1/\frac{dy}{dx} = 1/2X = \frac{1}{2\sqrt{y}}$