4

微分的應用

4.2 均值定理

均值定理

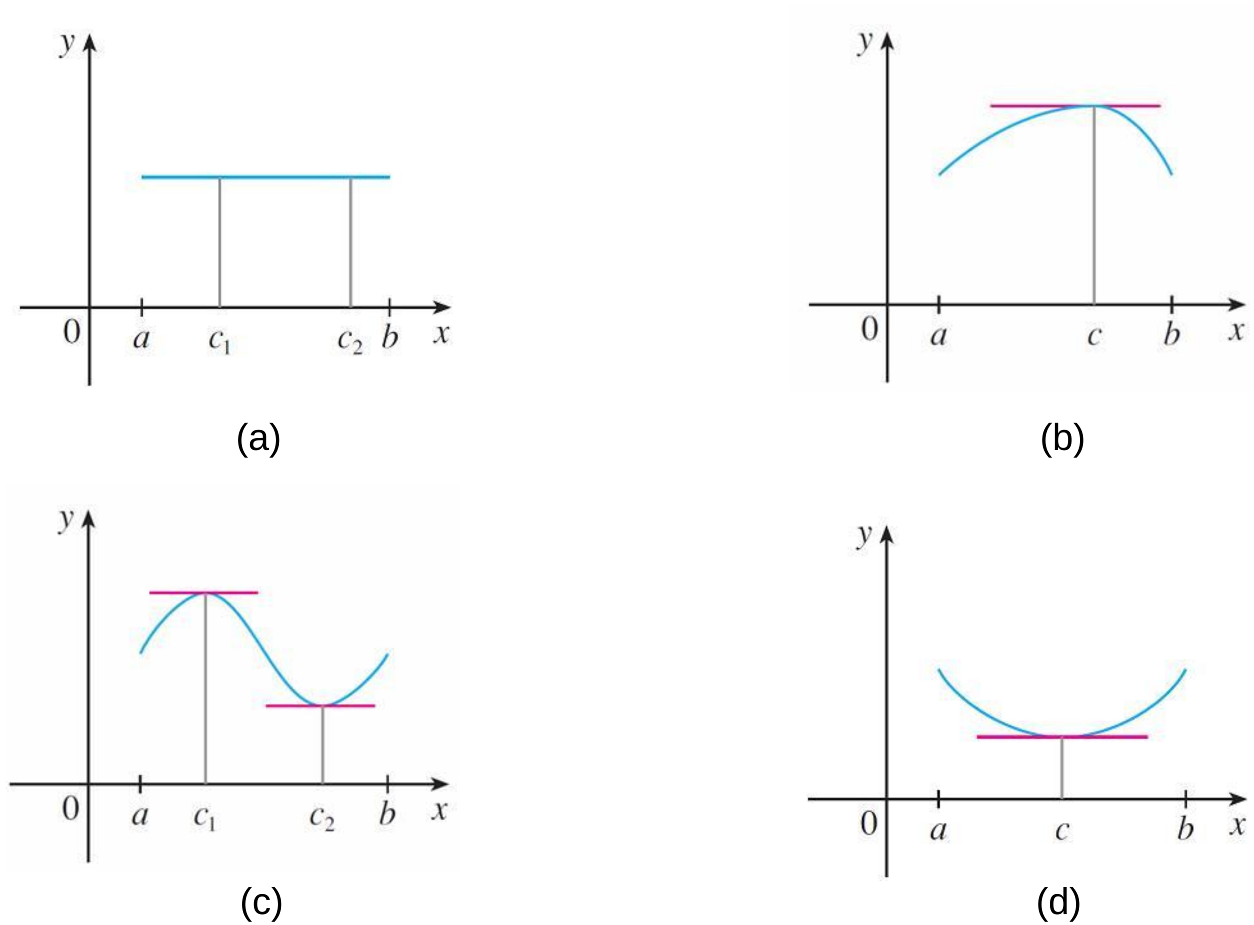
均值定理 (或者稱平均值定理, Mean Value Theorem) 是在微積分中重要性僅次於微積分基本定理的重要定理，它可以推導出許多重要的成果。在這之前我們需要先了解另外一個定理：

> [定理] (羅爾定理, Rolle’s theorem) f 滿足下列三個條件
>
> (1) f 在 [a,b] 閉區間上連續
> (2) f 在 (a,b) 開區間上可微
> (3) $f(a) = f(b)$
>
> 則存在 (a,b) 中一點 c, 滿足 $f'(c) = 0$.

其實我們可以先從圖形來觀察為何這個定理會成立。

均值定理

下列幾種不同函數的圖形滿足前述的三個條件。



圖一

均值定理

我們可以從上圖看到，不論是哪一種函數的圖形，一定會有至少一點，其切線剛好是水平線，也就是切線斜率 $f'(c) = 0$ 。

至少從這些圖形來看，羅爾定理的結果是合理的。

範例二

證明 $x^3 + x - 1 = 0$ 只有恰好一個實根

解:

首先我們可以利用連續函數的中間值定理，證明至少有一根存在。

考慮 $f(x) = x^3 + x - 1$ ，則有 $f(0) = -1 < 0$ 以及 $f(1) = 1 > 0$ 。

由於 f 為多項式，因此是連續函數，利用中間值定理可知道在 0,1 之間存在點 c 使 $f(c) = 0$ 。

範例二 / 解

cont'd

接著為了證明沒有其他實根，我們將利用反證法。

假設存在兩個根 p, q ，不失一般性下可假設 $p < q$，則此時有 $f(p) = 0 = f(q)$ 。

由於 f 為多項式，可知 f 在 $[p, q]$ 上連續，在 (p, q) 上可微。

根據羅爾定理，存在 (p,q) 上一點 r 滿足 $f'(r) = 0$ 。

但一方面， $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ 為恆正。因此我們得到矛盾。

是故 $f(x)$ 最多只有一個根。

均值定理

現在我們利用羅爾定理來證明這個重要的定理。這個均值定理一開始是由法國數學家 約瑟夫·拉格朗日 (Joseph Lagrange) 所提出：

[定理] (均值定理, The Mean Value Theorem) 給定 f 滿足下面條件

(1) f 在 [a,b] 閉區間上連續
(2) f 在 (a,b) 開區間上可微

則存在 (a,b) 上一點 c 滿足

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

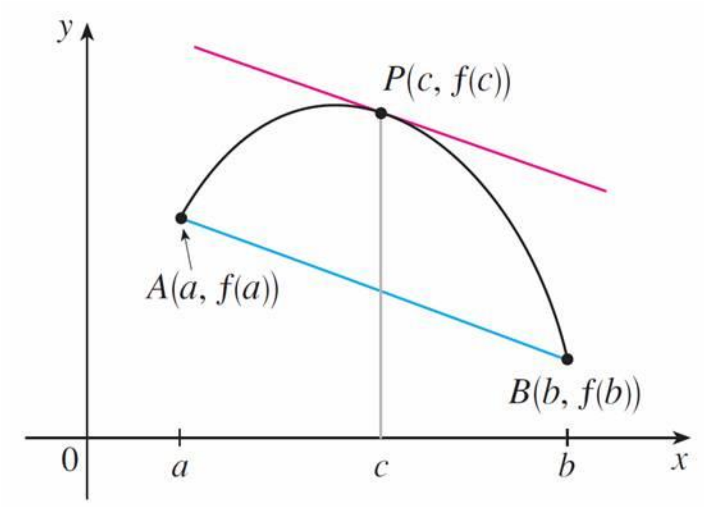
或者等價地我們可以寫成

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

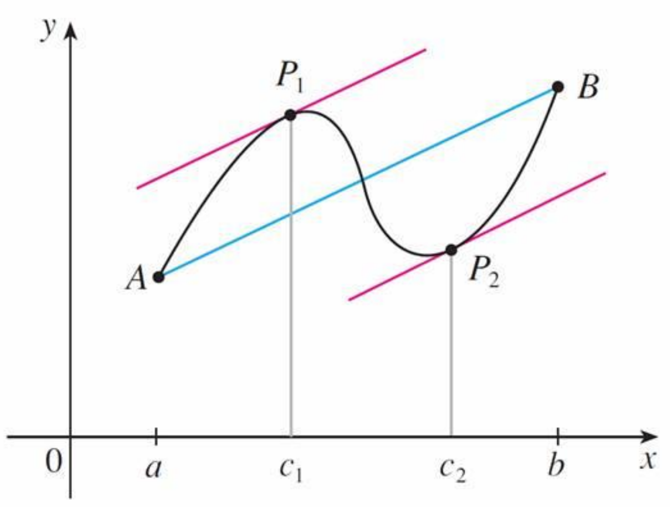
均值定理

我們可以先從幾何的觀點來看：在 (a,f(a)) 與 (b,f(b)) 我們可以連上連接兩點圖形的割線。於是均值定理的意思便是：存在點 c 其切線斜率恰好等於 a, b 間的割線斜率。

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



圖三



圖四

範例三

接著我們舉一個例子來體會一下均值定理，假設

$$f(x) = x^3 - x,\ a = 0,\ b = 2.$$

同樣，因為 f 為多項式因此我們可知 f 在 [0,2] 上連續，在 (0,2) 上可微分。

根據均值定理的敘述，我們希望可以找到 (0, 2) 上一點 c ，滿足

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

範例三

cont'd

計算 $f(2) = 6$,

$f(0) = 0$,

$f'(x) = 3x^2 - 1$

因此我們希望有

$$6 - 0 = (3c^2 - 1)(2 - 0)$$

$$= 6c^2 - 2$$

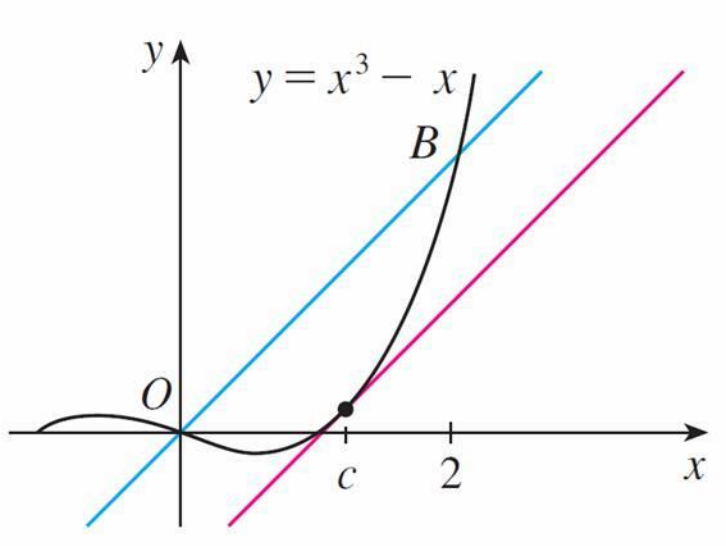
因此可算出 $c^2 = \frac{4}{3}$, 開方得 $c = \pm 2/\sqrt{3}$. 但由於在 (0,2) 上，取正有 $c = 2/\sqrt{3}$.

範例三

cont’d

下圖可以描繪這個取 c 的過程

在 c 點的切線恰好平行 OB 割線。



圖六

均值定理

[定理的證明]

定義新函數 $g(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$

由 f 條件可知，

(1) g 在 [a,b] 上連續, 在 (a,b) 上可微

(2) g(a) = f(a), g(b) = f(a) 相等

因此由羅爾定理可知，存在 (a,b) 上的 c 點，滿足 g’(c) = 0

所以有

$$f'(c) - \frac{1}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) = 0$$

最後得到證明。

範例五

接著我們看這個定理的一些應用。假設 $f(0) = -3$ ，對任意 x 有 $f'(x) \le 5$ 。則 f(2) 可能的最大值為？

解:

假設 f 可微分，也因此處處為連續。

特別的我們考慮在閉區間 [0, 2] 上的均值定理，因此存在 c 滿足

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

範例五 / 解

故 $$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

由於 $f'(x) \leq 5$ ，所以 $f'(c) \leq 5$ 。

因此有

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

可知 $f(2)$ 可能的最大值便是 7 。

在這一題裡面我們藉由均值定理，從已知函數導數的範圍，可以對這個函數的變化作一個估計。

均值定理

另外從均值定理我們可以推導出一些基本常用的性質：

[定理]

(1) 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上處處為 0 ，則 f 在 (a,b) 上為常數。

(2) 若在 (a,b) 上有 $f'(x) = g'(x)$ ，則 $f(x)$ 和 $g(x)$ 只相差一個常數。

均值定理

注意到在這個性質中，函數在整條區間上的可微跟連續性都是必要條件，我們假設現在有這樣的函數

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

f 之定義域為 $D = \{x \mid x \neq 0\}$ ，且在 D 上恆有 $f'(x) = 0$ 。但顯然 f 並非常數函數。