

3

函數的導數



3.5

隱函數的微分

隱函數的微分

之前我們所定義的函數，都是有指明對應關係或者直接寫下表示式的函數，例如

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \text{ 或 } y = x \sin x$$

一般就是寫成函數關係 $y = f(x)$ 。

然而有些時候我們知道變數與應變數的部分關係式，並不是明確的函數關係，例如：

$$x^2 + y^2 = 25$$

或者

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

隱函數的微分

有些時候我們可以從部分的關係式，解出 y 對 x 的表示式。

例如前述的例子 $x^2 + y^2 = 25$ ，若直接解 y ，可以得到

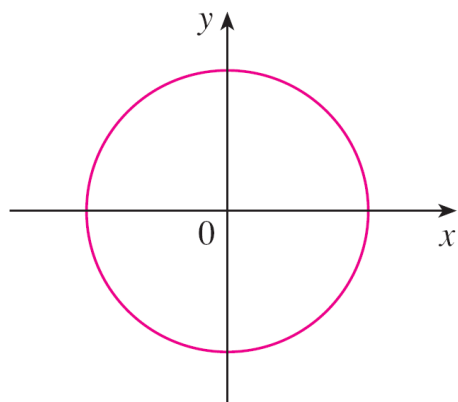
$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

也就是，這個方程式決定了兩個函數：

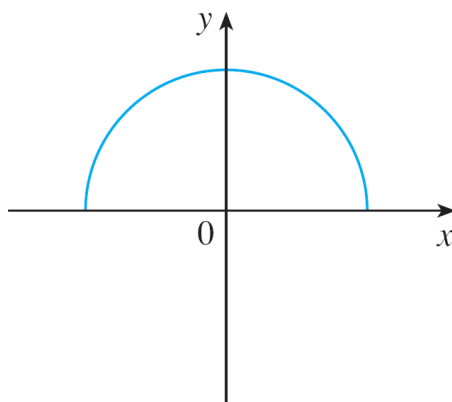
$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

隱函數的微分

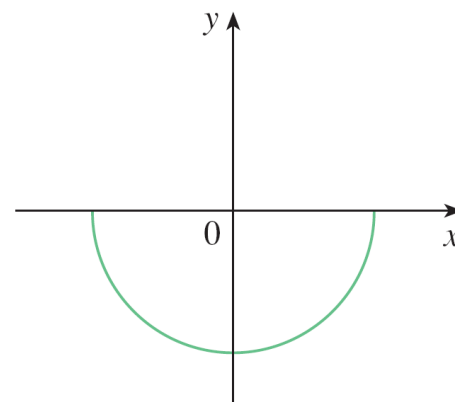
$f(x)$ 跟 $g(x)$ 的函數圖形剛好是方程式 $x^2 + y^2 = 25$ 的解圖形，以 $(0,0)$ 為圓心半徑為 5 的圓，的上、下兩部分：



(a) $x^2 + y^2 = 25$



(b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$



(c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

圖一

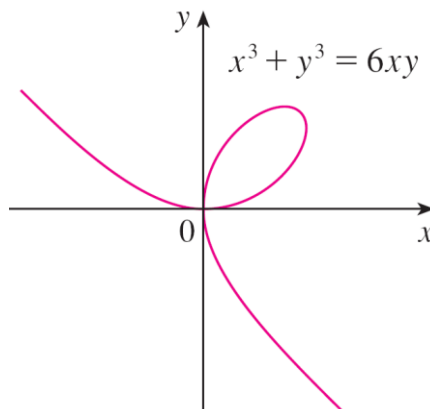
隱函數的微分

另外一個例子是 x, y 的三次式

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

想用 x 去解 y ，事實上不是那麼好解。

然而利用電腦繪圖我們還是可以大致上描點得到以下的圖形。
這個方程式的解圖形稱為迪卡兒葉形線 (**folium of Descartes**)，可以分成幾個部分的函數圖形。

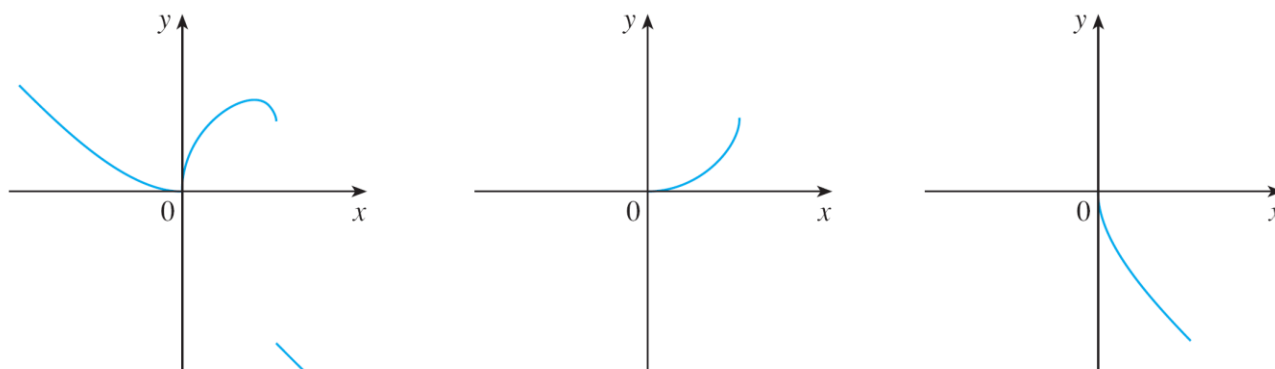


迪卡兒葉形線

圖二

隱函數的微分

其中一種分法，三個函數圖形如下圖所示：



將迪卡兒葉形線分成三個函數圖形

圖三

此時我們稱這三個圖形所代表的函數，為迪卡兒葉形線方程式

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

所隱含的函數關係。

隱函數的微分

不過如果只是要求這些函數的微分，我們不必要真的把 y 對 x 的函數表示式解出來，取而代之的是，我們可以使用隱函數的微分法。

隱函數的微分法，是將等式兩邊同時微分，將等式兩邊的式子視為 $x, y(x)$ 的合成函數，在微分後利用 $(x, y(x))$ 的值，解 $y'(x)$ 。

注意到隱函數關係並不一定能夠寫成一個完整的函數，而有可能拆成幾個不同的函數所組成，也因此在使用隱函數的微分需要注意到不同函數部分各自的定義域與值域。例如前述範例中，圓的上半部分跟下半部分的定義域均為 $(-5, 5)$ ，但對應到的值域不同。

範例一

(a) 若 $x^2 + y^2 = 25$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

(b) 求過圓 $x^2 + y^2 = 25$ 上點 $(3, 4)$ 之切線。

解:

(a) 對式子的兩邊同時微分 $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} (25)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2) = 0$$

範例一 / 解

cont'd

注意到 y 是 x 的函數，我們將 y^2 看成合成函數，使用連鎖率：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} \\ &= 2y \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

代回原式，再解得 dy/dx 之值：

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

範例一 / 解

cont'd

(b) 在點 (3, 4) ，我們便直接將 $x = 3, y = 4$ 代入前式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

利用點斜式可以得到

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \quad \text{or} \quad 3x + 4y = 25$$

解二：

(b) 直接解出函數表示式 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ ，觀察到我們關心的點 (3, 4) 式在上半圓函數圖形上 $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ，因此直接微分計算斜率，再代入點斜式即可，算式如後頁

範例一 / 解

cont'd

利用連鎖率對 f 微分

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx} (25 - x^2) \\ &= \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

代入 (3,4)

$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

得到跟前一個解同樣的結果 $3x + 4y = 25$ 。