

微積分甲統一教學 (II) 期中考試題 (2002/11/9)

計算及理由必需寫明, 否則不以計分. (共9題, 120分)

1. (共20%, 各10%) 求下列極限: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{|3x-2| - |x+2|}$ 及
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 5^n)^{1/n}$, 此處 n 是整數.
2. (共15%) (a) 設函數 $y = y(x)$ 滿足 $y(1) = 1$ 及 $x^3 - 3x^2y + y^4 + 1 = 0$. 求 $y'(1)$ 及 $y''(1)$ 之值. (各5%) (b) 設 $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$. 求 dy/dx 在 $t = \pi/6$ 之值. (5%)
3. (10%) 求 $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{t^3 + 2}$.
4. (10%) 求 $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 + \tan \theta}}$ 之值.
5. (10%) 有一球狀水珠, 其蒸發速率和表面積成正比. 設在開始時間 $t = 0$ 時, 半徑 $r = 1$. 而在 $t = 1$ 時, 水珠失去原體積的 $7/8$. (a) 求在任意 t 時, 水珠之半徑. (b) 問在 t 為多少時, 水珠完全消失.
6. (15%) 設 $f(0) = 0$, 而對 $x \neq 0$, 定義 $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$. 求 $f'(0)$ 及 $f''(0)$ 之值. 若是不存在, 請說明理由.
7. (10%) 在 $y = f(x)$ 之圖上, 連接 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 兩點的線段叫做絃. 若 $f(a) = f(b)$, 則此絃叫做水平絃. 求 $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, 所有水平絃之平均長度.
8. (15%) 設 $f(x) = x^4 + 2x^3/3 - 8x^2 - 8x + 13$. 請指出其升降之處, 凹凸之處, 並繪出其草圖.
9. (15%) 如圖, 有長方形紙條, $\overline{AB} = 1$ 而 \overline{AD} 很長很長. 把點 A 折到線 \overline{BC} 上. (因此 $\triangle PAR \cong \triangle PQR$.) 求 $x = \overline{AP}$ 使得 $\triangle PQR$ 之面積為最小.