95 上微積分甲統一教學二組

期中考參考答案

一、(18%) 求極限：

（a）$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin(\frac{1}{x})}{\sin(x^2)}$

解法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})(\frac{x^2}{\sin x^2})$$

$\because |x\sin\frac{1}{x}|<|x|$ $\therefore$由夾擠定理得 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})(\frac{x^2}{\sin x^2})=0\cdot 1=0$

解法二：

$\because$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}x\cdot\dfrac{x^2}{\sin x^2}=0$ and $|\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}|<|\dfrac{x^3}{\sin x^2}|$

$\therefore$ 由夾擊定理得 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}=0$.

（b）$\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x})$

Sol：$\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x})=\lim_{x\to 0}(\dfrac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x})=\lim_{x\to 0}(\dfrac{\sin x\cos x-x}{x\sin^2 x+x^2\sin x\cos x})$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{\sin^2 x+4x\sin x\cos x+x^2\cos^2 x-x^2\sin^2 x})$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x+4x\sin x\cos x+x^2\cos^2 x-x^2\sin^2 x})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{1+4\frac{x}{\sin x}\cos x+\frac{x^2}{\sin^2 x}\cos^2 x-x^2}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

二、(18%)

（a）令 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{3x+5}}$，求 $f'(1)=?$

解法一：

$$f'(x)=\frac{(3x+5)^{1/3}-x\cdot 1/3\cdot(3x+5)^{-2/3}\cdot 3}{(3x+5)^{2/3}} \Rightarrow f'(1)=\frac{2-1\cdot\frac{1}{4}}{4}=\frac{7}{16}.$$

解法二：

$$f(x)=x\cdot(3x+5)^{-1/3} \Rightarrow f'(x)=(3x+5)^{-1/3}-\frac{1}{3}x\cdot(3x+5)^{-4/3}\cdot 3$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^4}=\frac{7}{16}.$$

（b）求 $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\sin^2 x+\cos(x^2)}=?$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\sin^2 x+\cos(x^2)}=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos(x^2))^{-1/2}\cdot(2\sin x\cos x-2x\sin(x^2)).$$

三、(12%) 求出 $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-1}$ 的所有漸近線 (asymptotes).

解法一：

$$y=x+1+\frac{2x+1}{x^2-1}=x+1+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)}$$

漸近線： $y=x+1$

$x=-1,\ x=1.$

解法二：

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)=1$$

故斜漸近線 $y=x+1$

鉛直漸近線 $x=-1,\ x=1.$

四、(12%) 考慮曲線 $xy+2x-y=0$. 求出曲線上的點 P, 使其法線與 $2x+y=0$ 平行。

（曲線上 P 點之法線是與 P 點切線垂直之直線）

$$y'=\frac{-y-2}{x-1}=\frac{1}{2},\qquad P(3,-3),\qquad \text{or } P(-1,-1)$$

五、(12%)曲線 C 爲 $x^3 - xy + y^3 = 4,\ x \ge 2.$ 有一粒子在 C 上向右移動，其 x 座標(單位爲 m)以 5m/s 之等速度增加. 試問：在點 $(2,-2)$ 處 y 座標變化的速度及加速度。

Sol： 以 x', y' 分別表示 $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$.

$3x^2x' - x'y - xy' + 3y^2y' = 0 \Rightarrow (3x^2 - y)x' + (3y^2 - x)y' = 0$

令 $(x, y) = (2, -2), x' = 5$ 代入得 $14 \times 5 + 10y' = 0 \Rightarrow y' = -7$

因 $x' = 5 \Rightarrow x'' = 0$

故 $6x(x')^2 - x'y' - x'y' - xy'' + 6y(y')^2 + 3y^2y'' = 0$

以 $x' = 5, y' = -7$ 代入 $\Rightarrow$ $218 - 10y'' = 0 \Rightarrow y'' = \dfrac{109}{5}$ ·

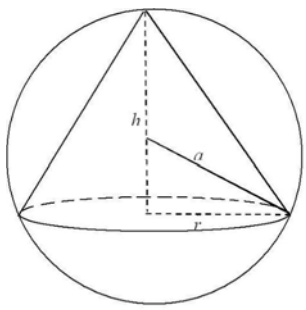
六、(12%)在內接於半徑爲 a 之球的所有直圓錐中，求體積最大之直圓錐的高與底半徑.

解法一：

$r^2 + (h-a)^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = 2ah - h^2$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(2ah - h^2)h$， $0 \le h \le 2a$.

$\Rightarrow V'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(4ah - 3h^2), V''(h) = \dfrac{1}{3}\pi(4a - 6h)$



$V'(h) = 0 \Rightarrow h = \dfrac{4}{3}a, 0$

$\because$ $V''(\dfrac{4}{3}a) < 0$ 故 $h = \dfrac{4}{3}a$ 有極大值，且 $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a, V = \dfrac{32}{81}\pi a^3$.

(或 $V(0) = V(2a) = 0$，故 $h = \dfrac{4}{3}a$ 有極大值，且 $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a, V = \dfrac{32}{81}\pi a^3$.)

解法二：令 h 爲球心到圓錐底的距離

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2(a+h) = \dfrac{1}{3}\pi(a^2 - h^2)(a+h) = \dfrac{1}{3}\pi(a-h)(a+h)^2$

利用算術平均≧幾何平均

$$\frac{\frac{a+h}{2} + \frac{a+h}{2} + (a-h)}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{(a+h)^2(a-h)}{4}}$$

$\Rightarrow$ $(a+h)^2(a-h) \le \dfrac{32}{27}a^3 \Rightarrow V \le \dfrac{32}{27}\pi a^3$

當 $\dfrac{a+h}{2} = a - h \Rightarrow h = \dfrac{1}{3}a \Rightarrow$ 高＝$\dfrac{4}{3}a$，底半徑 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$　V 有極大值 $\dfrac{32}{81}\pi a^3$

七、(16%)作出函數 $y = x^{\frac{2}{3}}(\frac{5}{2} - x)$ 之圖. 並指出升降區間, 凹凸(concavity)區間, 極值及反曲點(轉折點, inflection point).

$y = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$

$y' = \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x)$ ；Critical Points x=0, 1

$y'' = -\frac{5}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{5}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1+2x)$ ； x=0, $-\frac{1}{2}$ 可能爲反曲點

升 (0,1)

降 ($-\infty$,0) 及 (1,∞)

凹 ($-\infty$, $-\frac{1}{2}$)

凸 ($-\frac{1}{2}$, 0) 及(0,∞)

極大值 (1,$\frac{3}{2}$)

極小值 (0,0) (尖點)

反曲點 ($-\frac{1}{2}$,$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$)