94 學年下學期微積分甲統一教學二組期末考

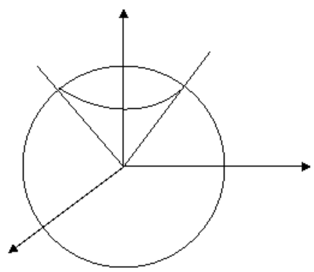
(12%) 1. 求積分 $\displaystyle\iint_D |y|\,dA$, 其中 D 是曲線 $r = 4 + 3\cos\theta$ 之內部區域。

Solution:

$$\begin{aligned}
\iint_D |y|\,dA &= 2\int_0^{\pi}\int_0^{4+3\cos\theta} r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sin\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{4+3\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi}(4+3\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{9}\int_1^7 u^3\,du = \frac{2}{9}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_1^7 = \frac{1}{18}(7^4-1)
\end{aligned}$$

(12%) 2. 求積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$。

Solution:



改為球面座標 $z = \sqrt{16-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4$。

$z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{3}\rho\sin\varphi \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}$。

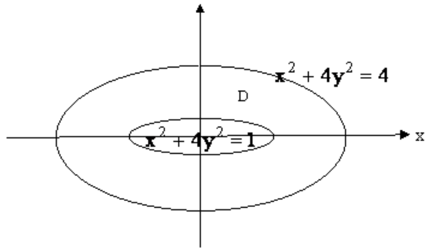
交線為 $x^2+y^2+3(x^2+y^2) = 16 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$

故範圍為 $0 \le \rho \le 4,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$。

$$\begin{aligned}
\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho &= \int_0^4\rho^3\,d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\,d\varphi \\
&= 128\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

(12%) 3. 求積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+4y^2}\,dA$, 其中 D 是兩橢圓 $x^2+4y^2 = 1$, $x^2+4y^2 = 4$ 之間的區域。

Solution:



Use transformation $x = r\cos\theta, y = \frac{1}{2}r\sin\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi, 1 \le r \le 2)$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & frac12r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_D \frac{x^2}{x^2+4y^2}\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}\cdot\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_1^2 r\,dr \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 1+\cos 2\theta\,d\theta\cdot\int_1^2 r\,dr \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\pi\frac{1}{2}(2^2-1^2) = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

(12%) 4. 設 $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$。

(a) 找出一函數 $f(x,y,z)$, 使得 $\nabla f = \mathbf{F}$。

(b) 求 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 其中 C 是從 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的線段。

Solution:

(a)

$$f_x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$f = \int\frac{x\,dx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)+g(y,z).$$

發現 $f = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$ 滿足 $\nabla f = \mathbf{F}$.

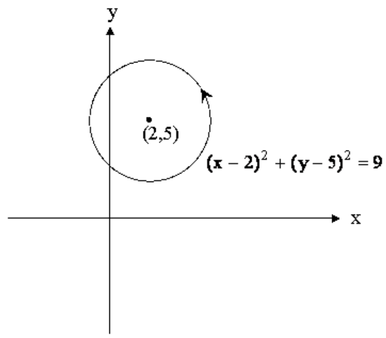
(b)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(2,3,4) - f(1,1,1) = \frac{1}{2}(\ln 29 - \ln 3).$$

(12%) 5. 求積分 $\oint_C (4y+3x+\sin y)\,dx + (3y+2x+x\cos y)\,dy$,

C 為圓 $(x-2)^2+(y-5)^2=9$。

Solution:



$$
\begin{aligned}
&\oint_C (4y+3x+\sin y)\,dx + (3y+2x+x\cos y)\,dy \\
\underset{\text{(Green)}}{=}\ & \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(3y+2x+x\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(4y+3x+\sin y)\,dA \\
=\ & \iint_D 2+\cos y-(4+\cos y)\,dA \\
=\ & -2\mathrm{A}(D) = -2\cdot\pi\cdot 3^2 = -18\pi
\end{aligned}
$$

(14%) 6. 設曲線 C 為 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$。把 C 上的每個點 $(x(t), y(t), z(t))$ 和 $(0,0,z(t))$ 用線段連起來, 構成曲面 S, 其法向量指向正 z-方向。設 $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, 求 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

Solution:

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_t = <\sin t, -\cos t, u> .$$

So

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = tu\,dt\,du.$$

So

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^{2\pi} t\,dt\cdot\int_0^1 du = \pi^2.$$

(12%) 7. $\mathbf{F}(x,y,z)=y\,\mathbf{i}+z\,\mathbf{j}+x\,\mathbf{k}$, S 為曲面 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, 其法向量指向正 z-方向。試求 $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。

Solution:

$$C: x^2+y^2=1$$
$$\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+0\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'(t)=-\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}+0\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)=-\sin^2 t$$

[解一]: 用 Stokes 定理

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}-\sin^2 t\,dt=-4\cdot\frac{\pi}{4}=-\pi$$

[解二]: 直接算

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=-\iint_S x+y+z\,dS\\
&\quad \left(y=\sqrt{1-x^2-y^2},\ \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\\
&= -\iint_D \left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dA,\ D: x^2+y^2\le 1\\
&\quad (x,\ y\ \text{皆奇函數})\\
&= -\iint_D 1\,dA=-\pi
\end{aligned}$$

(14%) 8. 設曲面 S 為 $x^2+y^2+z^2=1$。

(a) 試求一函數 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 使得在 S 上 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=x^4+y^4+z^4$。

(b) 求 $\iint_S (x^4+y^4+z^4)\,dS$。

<u>Solution:</u>

(a) $\mathbf{F}(x,y,z)=x^3\,\mathbf{i}+y^3\,\mathbf{j}+z^3\,\mathbf{k}$
則 on S,
$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=x^4+y^4+z^4.$

(b)

$$\begin{aligned}
\iint_S x^4 + y^4 + z^4 \, dS &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\
&\overset{\text{Divergence Theorem}}{=} \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV, \; E : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\
&= 3 \iiint_E x^2 + y^2 + z^2 \, dV \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{12}{5}\pi
\end{aligned}$$