

計算及理由必需寫明, 否則不以計分。(共九題, 100分)

1. (10%)求下列極限值:(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

2. (10%)一距火箭發射台 4000 英尺遠之攝影機, 對準垂直升空之火箭拍攝其升空過程。若火箭高度達 3000 英尺時的速度為 600 英尺/秒, 問於該瞬間攝影機之仰角變化應多快方可拍攝該過程?

3. (10%)求 $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \sin t \, dt$.

4. (10%)定義

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x \cos x - \sec x & x \leq 0 \\ ax + b & x > 0 \end{cases}$$

(a) 已知函數 $f(x)$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上可微, 試求常數 a, b 之值。

(b) 函數 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處是否二次可微?

5. (10%)求曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 上一點 (x_0, y_0) 之切線被 x 及 y 軸截出的線段長度。

6. (10%)當 $y = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x - 2}$ 時, 繪出其草圖, 需指出其升降之處, 凹凸之處, 反曲點, 極值及漸近線。

7. (10%)

(a) 求 $\int_{-\pi/4}^0 \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec x}} \, dx$

(b) 證明 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. (15%)設 $P(a, a^2)$ 為落在拋物線 $y = x^2$ 上距離點 $Q(4, 2)$ 最近之點。

(a) 證明 a 滿足方程式 $2a^3 - 3a - 4 = 0$ 。

(b) 證明方程式 $2a^3 - 3a - 4 = 0$ 恰有一實根。

(c) 證明點 Q 落在拋物線 $y = x^2$ 於點 P 的法線上。

9. (10%)如圖, 某人橫持一長為 l 之鐵棍走在一寬為 a 之長廊, 長廊盡頭右接一寬為 b ($b < a$) 的走廊, 試問該鐵棍可被橫持走進寬為 b 走廊的最大棍長為何?



