91學年下學期微甲二組期末考

1. (15%)令 D 為三度空間中, 由 $1 \le x \le 2$, $0 \le xy \le 2$, $0 \le z \le 1$ 所定義出的區域。應用座標變換 $u = x$, $v = xy$, $w = 3z$, 求算

$$\int\int\int_D \left(x^2y + 3xyz\right)\ dxdydz.$$

2. (15%)求圓柱面 $x^2 + y^2 = a^2$, 落在另一個圓柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 裡面部份之面積。

3. (12%)計算面積分 $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2+z^2=a^2} z^4\ d\sigma.$

4. (12%)令 S 為上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 其法向量有正的 $\mathbf{k}$ 分量。令 $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$。計算面積分 $\displaystyle\int\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{n} d\sigma$。

5. (12%)

   (a) 求下列向量場之位能函數。

$$\mathbf{F} = 2\cos y\mathbf{i} + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}$$

   (b) 令 C 為由點 $(0, 2, 1)$ 到點 $(1, \frac{\pi}{2}, 2)$ 之任一曲線。求線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 之值。

6. (12%)令 S 為上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, 其法向量有正的 $\mathbf{k}$ 分量。令 $\mathbf{F} = 2y^2\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$。求 $\displaystyle\int\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{n}\ d\sigma$。(提示:div $\mathbf{F} = 0$。)

7. (12%)令 S 為曲面 $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$,其法向量有正的 $\mathbf{k}$ 分量。令 $F = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$。求 $\displaystyle\int\int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot \mathrm{n}\ d\sigma$。

8. (15%)求通過原點之平面方程式使得向量場 $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 和此平面相交之圓上, 其環流量 (及線積分) 為最大。

9. (15%)

   (a) 求向量場

$$\mathbf{F} = \left(-x^2 - 4xy\right)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k},$$

   通過長方體 $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le 1$ 表面之外流量。

   (b) 求 a, b 使得此外流量為最大。