1032微乙01-05班期末考解答和評分標準

1. (12%) 求解微分方程：$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=x$，滿足初值條件 $y(2)=1$。

Solution:

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{4x}{(x^2+1)}y=\frac{x}{(x^2+1)}$

let $u=e^{\int\frac{4x}{(x^2+1)}dx}=e^{\ln(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2$ (5%)

$\Rightarrow (\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{(x^2+1)}y=\frac{x}{(x^2+1)})\times u$

$\Rightarrow (x^2+1)^2\frac{dy}{dx}+4x(x^2+1)y=x(x^2+1)$

$\Rightarrow ((x^2+1)^2y)'=x^3+x$

$\Rightarrow (x^2+1)^2y=\int(x^3+x)dx$

$\Rightarrow (x^2+1)^2y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C$ (4%)

$\because y(2)=1\Rightarrow (2^2+1)^2\times 1=\frac{2^4}{4}+\frac{2^2}{2}+C$

$\Rightarrow 25=4+2+C\Rightarrow C=19$ (3%)

$\Rightarrow y=\frac{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+19}{(x^2+1)^2}$

評分標準:

1.不論使用甚麼方法，式子有出來並算對的得五分，式子錯了或公式亂用則直接不給分。

2.將方程式解出，得四分。

3.將常數C解出，得三分。

*中間如果有錯誤，會依整體完成度、對積分的基本概念、筆誤造成的錯誤程度酌量加減分。

2. (12%) (a) 求解微分方程：$\frac{dy}{dt} = \lambda y(y-1)$，$0 < y < 1$ 其中 $\lambda > 0$ 是常數，滿足初值條件 $y(0) = \frac{1}{2}$。

(b) 求 $\lim_{t\to\infty} y(t)$。

Solution:

(a)

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(y-1)$$

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \lambda dt \qquad 2\%$$

$$\int \Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\Big) dy = \int \lambda dt \qquad 1\%$$

$$\ln\Big|\frac{y-1}{y}\Big| = \lambda t + C \qquad 3\%$$

$$\because y(0) = \frac{1}{2}, \quad \therefore C = 0 \qquad 1\%$$

$$\Rightarrow \ln\Big|\frac{y-1}{y}\Big| = \lambda t$$

(b)

$$\Big|\frac{y-1}{y}\Big| = e^{\lambda t}$$

$$\because 0 < y < 1, \quad \therefore \frac{y-1}{y} = e^{\lambda t}$$

$$y(t) = \frac{1}{1+e^{\lambda t}} \qquad 2\%$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+e^{\lambda t}} = 0 \qquad 3\%$$

If $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ is written down without any explanation from $\Big|\frac{y-1}{y}\Big| = e^{\lambda t}$,

no credit will be given.

3. (12%) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+4x}dx$. (可用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.)

Solution:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+4x}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+4x-4+4}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2)^2+4}\mathrm{d}x \\ &= e^4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2)^2}\mathrm{d}x \\ &= e^4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u \\ &= e^4\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

配分方式：配方法(4%)、換變數(4%)、答案(4%)

4. (12%) 在一 Poisson 過程中 $P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ 表示在時間區間 $[0,t]$ 中有 k 次事件發生之機率。令 W 表示在以上之 Poisson 過程中由開始到第 2 次事件發生之時間。

(a) 求 $P(W > t)$。

(b) 求 W 之機率密度函數 $f_W(t)$。

Solution:

(a) 求 $P(W > t)$ [6pts]。

令 $N(t)$為一Poisson分布的隨機變數，表示在時間區間 $[0,t]$ 的發生次數。

$$
\begin{aligned}
P(W > t) &= P(N(t) \le 1) && [3pts] \\
&= \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t} && [1pts] \\
&= (1 + \lambda t)\, e^{-\lambda t} && [2pts]
\end{aligned}
$$

(b) 求 W 之機率密度函數 $f_W(t)$ [6pts]。

$$
\begin{aligned}
f_W(t) &= (F_W(t))' = (P(W \le t))' && [1pts] \\
&= (1 - P(W \ge t))' && [1pts] \\
&= \left(1 - (1 + \lambda t)\, e^{-\lambda t}\right)' && [2pts] \\
&= \lambda^2\, t\, e^{-\lambda t} && [2pts]
\end{aligned}
$$

5. (16%) 隨機變數 X，密度函數為 $f(x) = \frac{A}{x^2}$, $1 \le x \le e$，其中 A 是常數。

(a) (6%) 求 A.

(b) (5%) 求 $\mathrm{E}(X)$.

(c) (5%) 求 $\mathrm{Var}(X)$.

Solution:

(a) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{A}{x^2}dx = 1 \Longrightarrow \left(-x^{-1}A\right)\Big|_1^e = 1 \Longrightarrow A = \frac{e}{e-1}$

(b) $E(X) = \int_1^e xf(x)dx = \int_1^e \frac{A}{x}dx = A = \frac{e}{e-1}$

(c) $E(X^2) = \int_1^e x^2 f(x)dx = A(e-1) = e \Longrightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e - (\frac{e}{e-1})^2$

Grading Criteria:
If formulas and integrals state right, get 3 points, with correct calculations, get full points.

6. (16%) 丟一次公正骰子，定義兩個隨機變數，$X = \begin{cases} 1 & \text{偶數} \\ 0 & \text{奇數} \end{cases}$, $Y = \begin{cases} 1 & \text{小: } 1,2,3 \text{ 點} \\ 0 & \text{大: } 4,5,6 \text{ 點} \end{cases}$，令 $Z = X + Y$。

(a) (6%) X, Y 獨立否?

(b) (5%) 求 E(Z).

(c) (5%) 求 Var(Z).

Solution:

(a)

P(X=1)P(Y=1)=$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$=P(X=1,Y=1),
since X and Y are not independent.

(b)

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= 0 \times P(Z=0) + 1 \times P(Z=1) + 2 \times P(Z=2) \quad (2pts) \\
&= 0 \times P(Z=0) + 1 \times (P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0)) + 2 \times P(Z=2) \quad (2pts) \\
&= 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + 2 \times \frac{1}{6} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
Var(Z) &= E((X - E(X))^2) \quad (2pts) \\
&= (0-1)^2 \times P(Z=0) + (1-1)^2 \times P(Z=1) + (2-1)^2 \times P(Z=2) \quad (2pts) \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + 1 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

7. (10%) 若 X, Y 獨立並都遵守指數分配，$\lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$. 求 $Z = X + Y$ 之機率密度函數 $f_Z(t)$.

Solution:
由題意有:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

故:

$$f_X(x) f_Y(y) > 0 \quad \text{當} \quad x \geq 0 \quad \text{且} \quad y \geq 0 \quad \text{之時}$$

因此，當$t < 0$時，其和 $Z = X + Y$ 的機率密度為:

$$f_Z(t) = 0, \quad t < 0 \qquad (2\ \text{分})$$

而當$t \geq 0$時，其和 $Z = X + Y$ 的機率密度為:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \int_0^t f_X(s) f_Y(t-s) ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \qquad (3\ \text{分}) \\ &\text{(需完全正確才會得到分數。積分範圍沒寫，寫錯，均不予計分)} \\ &= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t} ds \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t ds \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} t \qquad (5\ \text{分}) \end{aligned}$$

我們得到和 $Z = X + Y$ 的機率密度為:

$$f_Z(t) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda t} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

8. (10%) 若隨機變數 X 有機率密度函數 $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$。令 $W = X^2$，求 W的機率密度函數 $f_W(t)$.

Solution:

$F_W(t) = P(W \le t) = P(X^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s) ds$

$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds$

$f_W(t) = F'_W(t) = \frac{d}{dt}(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d(\sqrt{t})} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds \frac{d(\sqrt{t})}{dt} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(\sqrt{t})^2} \frac{1}{2} t^{\frac{-1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t}$

配分方式:

1: 寫出W的CDF函數形式 1%

2: 轉換成正確的X變數範圍 2%

3: 利用X的機率密度函數寫出W的CDF函數積分形式: 2%

4: 知道**W**的CDF微分等於**W**的機率密度函數 1%

5: 利用微積分基本定理將**C D F**微分: 4%