

第 2 章

極限 (Limits)

目錄

2.1	變化率	14
2.2	極限的直觀	15
2.3	單側, 在無限遠之極限及無窮極限	15
2.4	極限的性質	17
2.5	極限之綜合例題	18
2.6	極限的定義	20
2.7	漸近線	21
2.8	連續性	22
2.9	中間值定理	23

- (1) 介紹極限的直觀意義
- (2) 介紹各種極限的定義, 及一些計算技巧
- (3) 圖形之漸近線
- (4) 函數的連續性及中間值定理

2.1 變化率(Rate of Changes)

定義 2.1.1. $y = f(x)$ 在 $x \in [x_1, x_2]$ 上的平均變化率(average rate of change) 為 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$, $h = x_2 - x_1$ 。

例 2.1.2. 一顆球從 450 公尺高的 CN 塔上放下,

- (1) 求它在前 5 秒的平均速度。
- (2) 求它在第 5 秒到第 6 秒間的平均速度。
- (3) 求它在第五秒的速度。

例 2.1.3. 討論拋物線 $y = x^2$ 在點 $P(1, 1)$ 切線的斜率。

□

2.2 極限的直觀

例 2.2.1. 討論 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 在 $x = 1$ 附近的行爲。

定義 2.2.2. (直觀) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 表示: 當 x 很靠近 a 時, $f(x)$ 很靠近 L , 而且要多接近, 就有多接近。稱爲 $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限 (limit) 爲 L 。

[註] x 很靠近 a 表示 x 同時從左側及右側很靠近 a , 且 $x \neq a$ 。

例 2.2.3. 討論 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+4}{x+5}$ 。

例 2.2.4. 令 (a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, (c) $h(x) = x + 1$ 。

討論以上三函數在 $x = 1$ 的極限。

[註] 函數在 a 的極限與它在 a 的取值無關。

例 2.2.5. Heaviside 函數定義爲 $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0; \\ 1 & \text{if } t \geq 0. \end{cases}$, 討論在 $x = 0$ 的極限值。

例 2.2.6. 討論在 $x = 0$ 的極限:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \circ$$

$$(2) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases} \circ$$

$$(3) h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \circ$$

例 2.2.7. 猜測 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ 。

例 2.2.8. 猜測 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 。

例 2.2.9. 猜測 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ 。

2.3 單側, 在無限遠之極限及無窮極限

(一) 單側極限 (One-Sided Limits)

例 2.3.1. 函數 $g(x)$ 如圖。討論以下各極限:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$, (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$, (c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, (d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$, (e) $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$, (f) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ 。

例 2.3.2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ 。

例 2.3.3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 。

例 2.3.4. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{if } x > 4; \\ 8-2x & \text{if } x < 4. \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ 。

例 2.3.5. 令 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, 求 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 。

例 2.3.6. 求 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \lfloor x \rfloor$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \lfloor x \rfloor$, $\lim_{x \rightarrow \pi} \lfloor x \rfloor$ 。

定理 2.3.7. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 。

例 2.3.8. $\lim_{x \rightarrow n} \lfloor x - \lfloor x - 1 \rfloor \rfloor$, $n \in \mathbb{Z}$ 。

(二) 無窮極限(Infinite Limits)

例 2.3.9. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ 。

例 2.3.10. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ 。

例 2.3.11. 求 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$ 。

例 2.3.12. 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4}$ 。

例 2.3.13. 求 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x^2-4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x^2-4}$ 。

例 2.3.14. 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ 。

例 2.3.15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ 。

(三) 在無限遠的極限(Limits at infinite)

例 2.3.16. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$ 。

例 2.3.17. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r}$ (r 為整數)。

例 2.3.18. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ 。

例 2.3.19. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$ 。

例 2.3.20. 描繪函數 $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ 的圖形。

例 2.3.21. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x$ 。

例 2.3.22. 求 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$ 。

例 2.3.23. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ 。

例 2.3.24. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$ 。

例 2.3.25. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 。

例 2.3.26. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$ 。

例 2.3.27. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ 。

2.4 極限的性質

四則運算的極限

定理 2.4.1. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, 則

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \lim_{x \rightarrow a} x = a,$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL,$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M,$
- (4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L \cdot M,$
- (5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},$ 若 $M \neq 0,$
- (6) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^\alpha = L^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}, L > 0.$

[註] 只要極限值 L, M 存在, 此定理對 ”單側極限” 及 ”在無限遠的極限” 均成立。

例 2.4.2. 在右圖中, 求 (1) $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + g(x)],$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)],$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}.$

定理 2.4.3. (1) 若 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$

(2) 若 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 為有理式, 且 $Q(a) \neq 0,$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$

例 2.4.4. 求 $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}}.$

例 2.4.5. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}.$

例 2.4.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right\}.$

例 2.4.7. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}.$

例 2.4.8. $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 27}.$

例 2.4.9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{5-x-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}.$

例 2.4.10. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}.$

例 2.4.11. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x+1}{2x^3-1}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x+1}{2x^3-1}.$

例 2.4.12. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}.$

例 2.4.13. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}.$

例 2.4.14. 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[146]{|x|}}{\sqrt[7]{10^7 + \sqrt[3]{10^3 + \sqrt[7]{x + 10^7}}}}.$

三明治定理

定理 2.4.15. (1) 令 $c \in (a, b)$ 。若 $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 且以下極限均存在, 則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 。

(2) [三明治定理, 夾擊定理 (Sandwich Theorem, Squeeze Theorem)] 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 且 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, 則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 。

註 2.4.16. 在 (1) 中, 若 $f(x) < g(x), \forall x \in [a, b], x \neq c$, 仍可能 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 。

定理 2.4.17. 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近為有界, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$ 。

例 2.4.18. 若 $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}, \forall x \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ 。

例 2.4.19. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta$ 。

例 2.4.20. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta$ 。

例 2.4.21. 若 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 。

例 2.4.22. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$ 是否成立?

2.5 極限之綜合例題

三角函數的極限

定理 2.5.1. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ (θ 取弧度)。

例 2.5.2. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{3\theta}$ 。

例 2.5.3. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$ 。

例 2.5.4. $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\sin(\theta-1)}{\theta-1}$ 。

例 2.5.5. $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\sin(\theta-1)^2}{\theta-1}$ 。

例 2.5.6. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$ 。

例 2.5.7. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta^2}$ 。

例 2.5.8. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 。

例 2.5.9. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$ 。

例 2.5.10. 求 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 的極限。

例 2.5.11. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ 。

例 2.5.12. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ 。

例 2.5.13. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2}x$ 。

例 2.5.14. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec \theta - \tan \theta}{\theta - \frac{\pi}{2}}$ 。

綜合例題

例 2.5.15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ 。

例 2.5.16. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ 。

例 2.5.17. 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ 。

例 2.5.18. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$ 。

例 2.5.19. 令 $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

例 2.5.20. 令 $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

例 2.5.21. 令 $f(x) = \frac{|x|-x}{|x|-x^3}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。

例 2.5.22. 令 $f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 3^{-\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^{-\frac{1}{x}}}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 。

例 2.5.23. 令 $f(x) = \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

例 2.5.24. (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x + [x + [x]]]$,
(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x + [x + [x]]]$ 。

例 2.5.25. 令 $f(x) = \frac{[x]}{x}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 。

例 2.5.26. 令 $f(x) = \frac{[x]-2}{[x^2]-4}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 。

例 2.5.27. 令 $f(x) = \frac{[x^2]-[x]^2}{x^2-1}$ 。
求 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

例 2.5.28. 求以下極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} |x| \lfloor x \rfloor,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor \sin x,$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor x,$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor x^2,$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \lfloor x \rfloor}{3x + 4},$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{3x + 2}.$$

2.6 極限的定義(Definitions of Limit)

定義 2.6.1. 令 $f(x)$ 在包含 $x = a$ 的某一開區間上有定義。若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 則稱為 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 時的極限為 L , 記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

註 2.6.2. (1) 定義中的 δ 不為唯一。若對某一 δ 成立, 則對任意 $\delta' < \delta$ 均成立。

(2) 當 $f(x)$ 在 $x = a$ 有極限, 則極限值為唯一。因此 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 是妥善定義的 (well-defined)。

例 2.6.3. 證明 $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ 。

例 2.6.4. 證明 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ 。

例 2.6.5. 證明 $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1} = 2$ 。

例 2.6.6. 證明 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ 。

例 2.6.7. 令 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$ 。證明: 在每一點 $D(x)$ 的極限值均不存在。

定義 2.6.8. (1) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 使得 $f(x)$ 在 a 的右極限為 L , 記為 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 。

(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 使得 $f(x)$ 在 a 的左極限為 L , 記為 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 。

例 2.6.9. 證明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ 。

定義 2.6.10. (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists M$ 使得 $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 則稱 x 趨近 ∞ 時, $f(x)$ 的極限為 L , 記為 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 。

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists M$ 使得 $x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, 則稱 x 趨近 $-\infty$ 時, $f(x)$ 的極限為 L , 記為 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 。

例 2.6.11. 證明 (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

定義 2.6.12. (1) 若 $\forall B > 0$, 則 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > B$, 稱為在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限為無限大, 記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 。

(2) 若 $\forall B < 0$, 則 $\exists \delta > 0$, 使得 $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < B$, 稱為在 x 趨近 a 時, $f(x)$ 的極限為負無限大, 記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 。

例 2.6.13. 證明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ 。

例 2.6.14. 利用極限的定義證明: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$ 。

2.7 漸近線(Asymptotes)

定義 2.7.1. (1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 則 $y = b$ 稱為 $y = f(x)$ 之水平漸近線。

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, 則 $x = a$ 稱為 $y = f(x)$ 之垂直漸近線。

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - (mx + b)| = 0$, 則 $y = mx + b$ 稱為 $y = f(x)$ 的斜漸近線 (Oblique Asymptote)。

註 2.7.2. 斜漸近線 ($m \neq 0$, 且 m 存在。) 之求法: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ 。

例 2.7.3. 在右圖中的函數 $f(x)$, 求無限極限在無窮遠的極限和漸近線。

例 2.7.4. 求 $y = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ 的漸近線。

例 2.7.5. 求 $y = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$ 的漸近線。

例 2.7.6. 求 $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$ 的漸近線。

例 2.7.7. 討論 $f(x) = \sin \frac{1}{x} + 2$ 的漸近線。

例 2.7.8. 求 $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ 之漸近線。

[註] 漸近線可能與曲線交無限多個點。

例 2.7.9. 討論 $y = \tan x$ 及 $y = \sec x$ 的漸近線。

例 2.7.10. 求 $y = e^x$ 及 $y = \ln x$ 的漸近線。

例 2.7.11. 求 $f(x) = \frac{\sqrt{x^6 + 3x^5 + x^3} - 3}{x^2 - x}$ 的所有漸近線。

2.8 連續性(continuity)

定義

例 2.8.1. $y = f(x)$ 如圖。討論 $y = f(x)$ 在哪些點連續?

定義 2.8.2. (1) $y = f(x)$ 若滿足 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 連續。

(2) 若滿足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 為右連續。

(3) 若滿足 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$, 則稱 $f(x)$ 在點 a 為左連續。

註 2.8.3. (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 若且唯若其滿足以下三條件:

(a) $f(a)$ 有定義。 (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。 (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

(2) $f(x)$ 在 $x = a$ 連續, 若且唯若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$ 。

(3) “連續”是局部性概念。

註 2.8.4. 不連續有以下幾類, 如圖

(1) 可除性不連續 (removable discontinuity), 可重新定義 $f(x)$ 在不連續點之值, 以去除此點之不連續性,

(2) 跳動性不連續 (jump discontinuity),

(3) 無限不連續 (infinite discontinuity),

(4) 振盪不連續 (oscillating discontinuity)。

例 2.8.5. 以下函數在哪些點不連續?

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0; \\ 1 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2; \\ 1 & \text{if } x = 2. \end{cases}$$

例 2.8.6. 討論 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 之連續性。

定義 2.8.7. (1) 若 b 為一區間的右端點, 且 $f(x)$ 在點 b 為左連續, 則稱 $f(x)$ 在邊界點 b 連續。

(2) 若 a 為一區間左端點, 且 $f(x)$ 在點 a 為右連續, 則稱 $f(x)$ 在邊界點 a 連續。

定義 2.8.8. (1) 若 $f(x)$ 在一區間 I 在每一點連續, 則稱它在 I 上連續。

(2) 若 $f(x)$ 在其定義域上每一點連續, 則稱其為連續函數 (continuous function)。

例 2.8.9. 證明 $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 連續。

五則運算的連續性

定理 2.8.10. (1) 若 f 及 g 在 $x = a$ 連續, 則 $f + g, f - g, f \cdot g, kf, f^\alpha, \frac{f}{g}$ (若 $g(a) \neq 0$) 均在 $x = a$ 連續。

(2) 若 f 在 $x = a$ 且 g 在 $f(a)$ 連續, 則 $g \circ f$ 在 $x = a$ 連續。

定理 2.8.11. 若 $g(x)$ 在 b 連續且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(b)$ 。

例 2.8.12. 令 $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 \quad \forall x$ 。

則 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))$ 。

定理 2.8.13. (1) 多項式函數, 有理函數, 根式函數均為連續函數。

(2) 三角函數, 反三角函數均為連續函數。

(3) 指數函數, 對數函數均為連續函數。

例題

例 2.8.14. $f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$, $g(x) = \sin(x^2)$, $h(x) = \ln(1 + \cos x)$ 均為連續函數。

例 2.8.15. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)$ 。

例 2.8.16. 若 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{if } x < a; \\ x^2 & \text{if } x \geq a. \end{cases}$, 求 a 使其連續。

例 2.8.17. 令 $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 則 $f(x)$ 在每一點都不連續。

例 2.8.18. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $f(x)$ 在哪些點連續?

例 2.8.19. 若 f 及 g 均在 $x = 0$ 連續, 則 $g \circ f$ 是否在 $x = 0$ 連續?

例 2.8.20. (Dirichlet Ruler 函數) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, (m, n) = 1, n > 0 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 則:

(1) $f(x)$ 在有理點上不連續。

(2) $f(x)$ 在無理點上連續。

2.9 中間值定理 (Intermediate Value Theorem)

定理 2.9.1. (中間值定理) 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 則對 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間每一數均可取值。即對任意介於 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之間的 d , 皆存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = d$ 。

推論 2.9.2. (勘根定理) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號, 則存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$ 。

註. (1) 對不連續函數, 中間值定理不見得成立。

例: $f(x) = \begin{cases} x + 2 & -1 < x \leq 1 \\ x & -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$,
 $f(-2) < 0, f(1) > 0$, 但 $f(x) = 0$ 無解。

(2) 中間值定理只保證根的存在, 根的數目甚至可能有無限多。

例: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,
在 $[-\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}]$ 上有無限多個 x , 滿足 $f(x) = 0$ 。

例 2.9.3. 證明方程式 $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ 在 1, 2 之間有解。

例 2.9.4. 奇數多項式方程式必有實根。

例 2.9.5. 證明曲線 $y = x^3$ 與 $y = 3x + 1$ 必相交。

例 2.9.6. 在地球的赤道上, 必有一對對徑點 (antipodal) 的點, 其氣溫相等。

例 2.9.7. 有一四腿等長之圓桌放在地面上, 此地面高低不平, 但為連續性起伏。證明: 將此圓桌順時針 (或逆時針) 至多轉 90° , 必可使桌子平穩。