

第 1 章

函數 (Functions)

目錄

1.1	數、區間、不等式	1
1.2	函數	3
1.3	函數運算	4
1.4	函數圖形	5
1.5	常見之函數類型	5
1.6	函數特性	7
1.7	反函數	7
1.8	指數函數	8
1.9	對數函數	9
1.10	三角函數	10
1.11	反三角函數	13

- (1) 介紹有關函數的一些基本觀念
- (2) 介紹一些基本函數的圖形
- (3) 介紹指數函數, 對數函數, 三角函數與反三角函數

1.1 數 (Numbers)、區間 (Intervals)、不等式 (Inequalities)

數

符號 1.1.1. (1) 我們以下列符號來表示各數系:

- $\mathbb{N}$ 自然數系 (正整數, natural numbers),
- $\mathbb{Z}$ 整數系 (integers),
- $\mathbb{Q}$ 有理數系 (rational numbers),
- $\mathbb{R}$ 實數系 (real numbers),
- $\mathbb{C}$ 複數系 (complex numbers)。

- (2) $\forall$ 表示 “對所有” (for all) ,
- $\exists$ 表示 “存在” (there exists),
- $\exists!$ 表示 “存在唯一” (there is a unique)。

區間

定義 1.1.2. (1) 有限區間:

- (i) 開區間 (open intervals): $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ 。
- (ii) 閉區間 (closed intervals): $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 。
- (iii) 半開區間: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$,
 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 。

- (2) 無限區間: $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$,
 $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$,
 $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$,
 $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ 。

(3) 在以上各區間中, a, b 稱為邊界點 (boundary points)。在各有限區間中 (a, b) 上的點, 或無限區間中 (a, ∞) 及 $(-\infty, b)$ 之點, 稱為內點 (interior points)。

[註] (i) 無限區間 (a, ∞) 不可記為 $(a, \infty]$ 。 (ii) ∞ 不是 (a, ∞) 的邊界點。

定義 1.1.3. 令 $I_1, I_2, I_3, \dots$ 為一序列區間, 則

$$\bigcup_{i=1}^n I_i \text{ 表示 } I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ 表示 } I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots.$$

交集符號也有同樣表法。

例 1.1.4. 求:

- (1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}]$,
- (2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})$,
- (3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$,
- (4) $\bigcup_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ 。

不等式

性質 1.1.5. 令 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 則

- (1) 若 $a < b$, 則 $a + c < b + c$ 。
- (2) 若 $a < b, c < d$, 則 $a + c < b + d$ 。
- (3) 若 $a < b, c > 0$, 則 $ac < bc$ 。
- (4) 若 $a < b, c < 0$, 則 $ac > bc$ 。
- (5) 若 $0 < a < b$, 則 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 。

例 1.1.6. 解以下各不等式:

$$(1) \quad 2x - 3 < x + 4 \leq 3x - 2.$$

$$(2) \quad x^3 > x.$$

$$(3) \quad (2 - x)(1 + x)^2 x^3 \leq 0.$$

$$(4) \quad -2 < \frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1.$$

絕對值

性質 1.1.7. $a, b \in \mathbb{R}$, 則

$$(1) \quad |ab| = |a||b|,$$

$$(2) \quad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$(3) \quad |a| - |b| \leq |a - b|.$$

例 1.1.8. 解下列絕對值不等式:

$$(1) \quad |5 - 2x| < 3,$$

$$(2) \quad |x - 1| - |x - 10| \geq 5.$$

1.2 函數 (Functions)

函數的呈現方式

- 1.2.1. (i) 以文字方式描述。例: (i) 圓面積與半徑的平方成正比; (ii) 小於或等於 x 的質數個數。
 (ii) 以數值方式描述。例: 如人口數圖表。
 (iii) 以圖形方式描述。例: 如地震圖。
 (iv) 以數學式描述。

例 1.2.2. 面積為 25 的直角三角形, 將斜邊長 h 以周長 p 表出。

例 1.2.3. 一個立方體無蓋的盒子體積為 10 立方公尺, 底部的長是寬的兩倍, 底的材料成本是每平方公尺 10 元; 側面的材料成本是 每平方公尺 6 元。將盒子的總成本以底之寬的函數表出。

例 1.2.4. 某地之計程車費率為起跳 75 元, 超過兩公里後每 500 公尺 5 元, 將費用對里程的函數寫出。

函數定義

定義 1.2.5. (1) 函數 (function) $f: A \rightarrow B$ 是一個對應, 滿足: 對所有 $a \in A$, 存在惟一 $b \in B$, 使得 f 將 a 對應到 b 。即 $\forall a \in A, \exists ! b \in B$ 使得 $f(a) = b$ 。

(2) A 稱為 f 的定義域 (domain); B 稱為 f 的對應域 (codomain); $f(A) = \{f(a) | a \in A\} \subset B$ 稱為 f 的值域 (range)。 [註] f 可視為從 A 到 $f(A)$ 的函數。

定義域與值域

註 1.2.6. 若 $f(x)$ 是個以數學式定義的實值函數, 但未指明其定義域, 則其定義域即為使該數學式有意義之所有 x 值。

例 1.2.7. 如圖。(a) 求 $f(1)$ 及 $f(5)$ 之值; (b) f 之定義域及值域分別為何?

例 1.2.8. 令 $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$, 求其定義域與值域。

例 1.2.9. 求函數 $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定義域與值域。

例 1.2.10. 求函數 $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ 的定義域與值域。

一對一與映成

定義 1.2.11. (1) 一個函數 f 若滿足: “ $x_1 \neq x_2$ 則 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ”, 則 f 稱為一對一 (one-to-one) 函數。

(2) 若 f 之值域等於對應域, f 稱為映成 (onto) 函數。

例 1.2.12. 證明 $y = x^3$ 為一對一函數。

例 1.2.13. 令 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。 f 為從 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 對應到 $\mathbb{Z}_+$ 的函數,

$$f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

試證: f 是一對一且映成的函數。

1.3 函數運算

1.3.1. (1) 四則運算:

$$(i) \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \text{Dom}(f \pm g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g.$$

$$(ii) \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g.$$

$$(iii) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{Dom } \frac{f}{g} = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \cap \{x | g(x) \neq 0\}.$$

(2) 合成運算:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \text{Dom}(f \circ g)(x) = \{x \in \text{Dom}(g) | g(x) \in \text{Dom } f\}.$$

例 1.3.2. 設 $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$, 且 $h(x) = (f \cdot g)(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, 則函數 h 的定義域 $\text{Dom } h$ 應為 $\mathbb{R} - \{0\}$, 而非 $\mathbb{R}$ 。

例 1.3.3. 令 $F(x) = \cos^2(x+9)$ 。求函數 f, g, h 使得 $F = f \circ g \circ h$ 。

例 1.3.4. 令 $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x}$, 求 $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ 及它們的定義域。

例 1.3.5. 若 $f_0(x) = \frac{x}{x+1}$ 且 $f_{n+1} = f_0 \circ f_n, n = 0, 1, 2, \dots$, 求 $f_n(x)$ 的公式。

1.4 函數圖形

函數圖形

定義 1.4.1. 若 $A, B \subset \mathbb{R}$, 則 f 稱為實數值函數 (real valued function), 集合 $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ 稱為 f 的圖形 (graph)。

註 1.4.2. (1) 垂直線判別法: 一個圖形是函數圖形的充要條件是任一垂直線與其至多交於一點。

(2) 一個函數是一對一的充要條件為其圖形與每一水平線至多交於一點。

函數圖形的變動

1.4.3. (1) 鉛直方向平移: $y = f(x) + k$ 。

(2) 水平方向平移: $y = f(x + h)$ 。

(3) 鉛直方向伸縮: $y = cf(x)$ 。

(4) 水平方向伸縮: $y = f(cx)$ 。

(5) $y = -f(x)$ 是 $y = f(x)$ 對 x -軸的鏡射。

(6) $y = f(-x)$ 是 $y = f(x)$ 對 y -軸的鏡射。

例 1.4.4. 由 $y = \sqrt{x}$ 之圖形作以下各函數之圖形: $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $y = \sqrt{-x}$ 。

例 1.4.5. 作圖 $f(x) = x^2 + 6x + 10$ 。

例 1.4.6. 作圖 $y = 1 - \sin 2x$ 。

例 1.4.7. 作圖 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 。

例 1.4.8. 作圖 $f(x) = |x^2 - 1|$ 。

例 1.4.9. 對不同的 c 作圖 $f(x) = x^3 + cx$ 。

例 1.4.10. 作圖 $f(x) = \sin 50x$ 。

例 1.4.11. 作圖 $f(x) = \sin x + \frac{1}{100} \cos 100x$

例 1.4.12. 求方程式 $\cos x = x$ 的解。

1.5 常見之函數類型

分段定義的函數

例 1.5.1. (1) $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ -x & , x < 0. \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0, \\ x^2 & , 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & , x > 1. \end{cases}$

(3) 將圖中的函數以數學式寫出。

(4) 最大整數函數, 高斯函數, 地板函數 (greatest integer function, Gauss function, floor function)

$\lfloor x \rfloor = n$, 若 $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ 。 $\lfloor x \rfloor$ 即小於或等於 x 的最大整數。

(5) 天花板函數 (ceiling function)

$\lceil x \rceil = n+1$, 若 $n < x \leq n+1, n \in \mathbb{Z}$ 。 $\lceil x \rceil$ 即大於或等於 x 的最小整數。

例 1.5.2. 如何以 $\lfloor x \rfloor$ 表出 $\lceil x \rceil$?

例 1.5.3. 作圖 $|x-y| + |x| - |y| \leq 2$ 。

例 1.5.4. 作圖 $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$ 。

例 1.5.5. (1) 一個數列 (sequence) $\{a_n\}$ 可視為定義在 $\mathbb{N}$ 上的函數, 即 $f(n) = a_n$ 。

(2) 數列亦可用遞迴公式 (recursive formula) 來定義。例如

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3, \end{cases}$$

此數列稱為 Fibonacci 數列。事實上, 可證明

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

基本函數

1.5.6. (1) 線性函數 (linear function): $f(x) = mx + b$ 。

(2) 冪次函數 (power function): $f(x) = x^n$ 。

(i) $n \in \mathbb{N}$ 。

(ii) $-n \in \mathbb{N}$ 。

(iii) $n = \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ 。

(iv) $n \in \mathbb{R}$ 。

(3) 多項式函數 (polynomial function): $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$, 則 $P(x)$ 的次數 (degree) 為 n 。

若 $n = 2$, 則稱為二次函數 (quadratic function); 若 $n = 3$, 則稱為三次函數 (cubic function)。

(4) 有理函數 (rational function): $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 為多項式。

(5) 代數函數 (algebraic function): 將多項式函數反覆作有限次四則及開方運算而得。

(6) 三角函數 (trigonometric function)。

(7) 反三角函數 (inverse trigonometric function)。

- (8) 指數函數 (exponential function): $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ 。注意, 與冪次函數比較兩者不同之處。
- (9) 對數函數 (logarithmic function): $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ 。
- (10) 超越函數 (transcendental function): 非代數函數。
- (11) 基本函數 (elementary function): 將有理函數, 冪次函數, 三角函數, 反三角函數, 指數函數, 對數函數反覆作有限次四則, 合成及開方運算而得。

[註] 我們將在本章後四節簡要地介紹這些函數。

1.6 函數特性

奇偶性

定義 1.6.1. (1) 若 $\forall x \in \text{Dom } f, f(-x) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱為偶函數 (even function)。

(2) 若 $\forall x \in \text{Dom } f, f(-x) = -f(x)$, 則 $f(x)$ 稱為奇函數 (odd function)。

註 1.6.2. (1) 奇函數之圖形對原點對稱; 偶函數之圖形對 y -軸對稱。

(2) 任一 定義在實數上的函數必可寫成一個奇函數和一個偶函數的和, 且其表法是惟一的。

例 1.6.3. (1) 若 $g(x)$ 為奇函數, 則對 $g(0)$ 可下什麼結論?

(2) 若 $g(x)$ 為偶函數, 則對 $g(0)$ 可下什麼結論?

例 1.6.4. 判斷以下的奇偶性: (a) $f(x) = 4x^5 - 3x$, (b) $f(x) = 4x^6 + \pi x^2 - 3$, (c) $f(x) = 2 + 3x^3$ 。

例 1.6.5. 判斷 $\lfloor x \rfloor$ 的奇偶性。

例 1.6.6. 作圖 $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ 。

昇降性

定義 1.6.7. (1) 若 $\forall x, y \in I, x < y$, 則 $f(x) < f(y)$, 則稱 $f(x)$ 在上 I 為遞增 (或上昇 increasing)。

(2) 若 $\forall x, y \in \text{Dom } f, x < y$, 則 $f(x) > f(y)$, 則稱 $f(x)$ 在上 I 為遞減 (或下降 decreasing)。

1.7 反函數 (Inverse Functions)

定義 1.7.1. 若 f 為一對一函數, 其定義域為 D , 值域為 R , 則其反函數 (inverse function) $f^{-1}: R \rightarrow D$ 定義為 $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$, 其中 $a \in D$ 且 $b \in R$ 。

註 1.7.2. (1) $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ 。

(2) f^{-1} 的定義域= f 的值域; f^{-1} 的值域= f 的定義域。

(3) $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ 。

$$(4) (f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in \text{Dom } f.$$

$$(5) (f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in \text{Dom } f^{-1} = \text{Range } f.$$

(6) 若 f 為 D 上的嚴格上昇 (下降) 函數, 則 $f(x)$ 為一對一且有反函數。

(7) $y = f(x)$ 與 $y = f^{-1}(x)$ 之圖形對 $x = y$ 直線對稱。

例 1.7.3. 求 $f(x) = x^3 + 2$ 之反函數。

例 1.7.4. 求 $y = x^2, x \geq 0$ 之反函數。 $x \leq 0$ 呢?

例 1.7.5. 作 $f(x) = \sqrt{-1-x}$ 及其反函數的圖形。

例 1.7.6. $g(x) = \sin x$:

(i) 定義在 $[0, \pi]$ 上時, 不是一對一;

(ii) 定義在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上時為嚴格遞增, 所以是一對一; 故可定義反函數 $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ 。

1.8 指數函數 (exponential functions)

例 1.8.1. 在 2000 年, 100 元存入銀行, 以 5.5% 的年利率複利計算, 則在 r 年後本利和若干?

註 1.8.2. (1) 現考慮形如 $f(x) = a^x$ 之函數。就不同的 x 值而言, 其意義如下:

$$x = n, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a^n = a \times \cdots \times a.$$

$$x = -n \quad \Rightarrow \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

$$x = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

$$x = q/p, (p, q) = 1, p, q \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a^{q/p} = (\sqrt[p]{a})^q.$$

(2) 若 $a > 0, x = r$ 為無理數, 則先取 x 為有理數, 當 x 越來越接近 r 時, a^x 會越來越接近某定值, 此值即定義為 a^r 。

(3) 綜合上述, 可得到以 a 為底的指數函數 $f(x) = a^x$ 。此定義使得 $f(x)$ 的圖形沒有“孔”或“跳躍”, 即為連續函數。

例 1.8.3. 定義無理指數 $2^{\sqrt{2}}$: 令 a_n 為 $\sqrt{2}$ 的小數點後第 n 位數字, 即 $\sqrt{2} = 1.a_1a_2a_3a_4\cdots$, 則可以定義

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1.a_1a_2\cdots a_n},$$

其中 $1.a_1a_2\cdots a_n$ 均為有理數。

性質 1.8.4. 若 $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$, 則

$$(1) a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

$$(2) a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$(3) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

$$(4) (a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x.$$

$$(5) (a^x) \cdot b^x = (ab)^x.$$

$$(6) \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, b \neq 0.$$

例 1.8.5. (1) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$.

(2) $7^\pi \cdot 8^\pi$.

性質 1.8.6. (1) 自然指數函數為 $y = e^x$ 。其中 e 是一特定數值，使指數函數 $y = e^x$ 與 y -軸相交處的斜率為 1。

(2) 此數值 e 大約為 2.718281828...

(3) 又當 x 很大時， $(1 + \frac{1}{x})^x$ 很接近 e 。

(4) e^x 亦可記為 $\exp(x)$ 。

註 1.8.7. (1) $y = e^{kx}$ ($k \neq 0$) 通常作為指數成長或衰變的模型。

當 $k > 0$, $y = y_0 e^{kx}$ 稱為指數成長；

當 $k < 0$, $y = y_0 e^{kx}$ 稱為指數衰變。

(2) 連續複利：設本金為 A ，年利率為 r 。若計息的時間間隔很短，即 $A(1 + \frac{r}{n})^{nx}$ 中的 n 很大的時候，則在 x 年後，本利和會接近 Ae^{rx} 。因此，連續複利為一種指數成長。

例 1.8.8. 投資公司通常以連續複利計算投資的成長，在 2000 年投資 100 元，年利率 5.5%，估計 2004 年的資金總額。

例 1.8.9. C^{14} 的衰變常數為 $1.2 \cdot 10^{-4}$ 。若原本 C^{14} 的量為 A ，預測在 866 年後，衰變所餘的量為何？

1.9 對數函數 (Logarithm Functions)

定義 1.9.1. 以 a 為底的對數函數定義為 $y = a^x$ 的反函數 ($a \neq 1, a > 0$)，記為 $\log_a x$ 。

註 1.9.2. (1) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ 。

(2) $\log_a(a^x) = x, x \in \mathbb{R}$ 。

(3) $a^{\log_a x} = x, x > 0$ 。

(4) $\log_2 x$ 在計算科學上常用。

(5) $\log_e x$ 常記為 $\ln x$ ，稱為自然對數。

(6) $\log_{10} x$ 常記為 $\log x$ ，稱為常用對數。

性質 1.9.3. 對 $b > 0, x > 0, a > 0, a \neq 1$ ，對數函數滿足：

(1) $\log_a bx = \log_a b + \log_a x$ 。

(2) $\log_a \frac{b}{x} = \log_a b - \log_a x$ 。

$$(3) \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x.$$

$$(4) \log_a x^r = r \log_a x.$$

$$(5) \ln e = 1.$$

$$(6) a^x = e^{x \ln a}.$$

$$(7) \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

例 1.9.4. $5^{-3x} = e^{-3x \ln 5}$ 。

例 1.9.5. 解方程式 $3^{\log_3 7} - 4^{\log_4 2} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$ 。

例 1.9.6. 求方程式 $e^{5-3x} = 10$ 的解。

例 1.9.7. 作圖 $y = \ln(x - 2) - 1$ 。

例 1.9.8. Sarah 拿 1000 元投資, 年利率 5.5%, 以連續複利計息, 則何時可達到 2500 元?

例 1.9.9. 鈾 210 的衰變常數為 5×10^{-3} , 求半生期 (half life)。

例 1.9.10. 證明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函數, 並求其反函數。

1.10 三角函數(Trigonometric Functions)

定義 1.10.1. (三角函數 Trigonometric Functions)

(1) 銳角 (acute angles):

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, & \cos \theta &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, & \tan \theta &= \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}, \\ \cot \theta &= \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}, & \sec \theta &= \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}, & \csc \theta &= \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}. \end{aligned}$$

(2) 一般角 (general angles):

$$\begin{aligned} \sin \theta &= y, & \cos \theta &= x, & \tan \theta &= \frac{y}{x}, \\ \cot \theta &= \frac{x}{y}, & \sec \theta &= \frac{1}{x}, & \csc \theta &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

性質 1.10.2. (1) 特別角函數值:

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	x	1	x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	x	0	x	1

(2) 函數正負:

(3) 定義域與值域:

$$\begin{aligned}\sin &: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], & \cos &: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \\ \tan &: \mathbb{R} - \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \rightarrow \mathbb{R}, & \cot &: \mathbb{R} - \{n\pi\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \sec &: \mathbb{R} - \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 1), & \csc &: \mathbb{R} - \{n\pi\} \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 1).\end{aligned}$$

(4) 圖形:

(5) 週期:

$$\sin, \cos, \sec, \csc : \text{最小週期 } 2\pi; \quad \tan, \cot : \text{最小週期 } \pi.$$

(6) 奇偶性:

$$\sin, \tan, \cot, \csc : \text{奇函數}; \quad \cos, \sec : \text{偶函數}.$$

(7) 換角公式:

$$\begin{aligned}f(n\pi + \theta) &= \pm f(\theta), \\ f\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \theta\right) &= \pm \operatorname{cof}(\theta).\end{aligned}$$

($\pm$ 之決定: 假設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 視 f 在 $n\pi + \theta$ 處之正負值而定。)

(8) 倒數公式:

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \quad \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}.$$

(9) 平方公式:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta, \quad \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta.$$

(10) 和角公式 (addition and subtraction formula):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.\end{aligned}$$

(11) 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

(12) 半角公式:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, & \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.\end{aligned}$$

(正負號視左式的正負值而定。)

(13) 三倍角公式:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

(14) 和差化積:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

(15) 積化和差:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].\end{aligned}$$

定理 1.10.3. 令 $\angle A, \angle B, \angle C$ 為一三角形的三個角, a, b, c 分別為其對應邊之長, 則

(1) 正弦定律 (law of sines):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

(2) 餘弦定律 (law of cosines):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

(3) 面積公式:

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

定理 1.10.4. (n 倍角公式)

$$\begin{aligned}(1) \sin n\alpha &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} \alpha \sin^{2k+1} \alpha \\ &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cos \alpha \sin^{n-1} \alpha, & n \text{ 為偶數} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n \alpha, & n \text{ 為奇數} \end{cases} \\ (2) \cos n\alpha &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} \alpha \sin^{2k} \alpha \\ &= \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \cdots + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \alpha, & n \text{ 為偶數} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha \sin^{n-1} \alpha, & n \text{ 為奇數} \end{cases}.\end{aligned}$$

[註] $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

1.11 反三角函數 (Inverse Trigonometric Functions)

定義 1.11.1. 以下函數

- (1) $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$,
- (2) $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$,
- (3) $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty)$,
- (4) $\cot x : (0, \pi) \rightarrow (-\infty, \infty)$,
- (5) $\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$,
- (6) $\csc x : (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

爲一對一，因此有反函數。分別爲

$$y = \sin^{-1} x, y = \cos^{-1} x, y = \tan^{-1} x, y = \cot^{-1} x, y = \sec^{-1} x, y = \csc^{-1} x.$$

註 1.11.2. (1) $\sin^{-1} x$ 又可寫爲 $\arcsin x$ 。

(2) $(\sin x)^{-1}$ 表示 $\frac{1}{\sin x}$ 。

(3) $\sin^n x = (\sin x)^n, n \in \mathbb{N}$;
 $\sin x^n = \sin(x^n), n \in \mathbb{Z}$.

(4) $\sin^{-2} x$ 表示什麼意思?

例 1.11.3. 求函數 $f(x) = (\sin^{-1}(x^{-1}))^{-1}$ 的定義域。

例 1.11.4. 求值 $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ 。

例 1.11.5. 求值 $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ 。

例 1.11.6. 求值 $\tan(\arcsin \frac{1}{3})$ 。

例 1.11.7. 若 $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ，求 $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha, \sec \alpha$ 及 $\csc \alpha$ 。

性質 1.11.8. (1) $\sin^{-1}(\sin x) = x; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad \cos^{-1}(\cos x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$ 。

(2) $\sin(\sin^{-1} x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad \cos(\cos^{-1} x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$ 。

(3) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ 。

(4) $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$ 。

例 1.11.9. 化簡 $\cos(\tan^{-1} x)$ 。

例 1.11.10. 求 $\sec(\tan^{-1} \frac{x}{3})$ 。

例 1.11.11. 令 $f(x) = \sin(\sin^{-1} x), g(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ 。

(1) 求 f, g 的定義域。

(2) 化簡 $f(x)$ 及 $g(x)$ 。

(3) 作 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 之圖形。