懷念陳省身教授——
20世紀的幾何大師

微分幾何大師陳省身於 2004 年 12 月 3 日悄然逝世，這位當代數學巨擘不僅以陳氏類影響後代至深至遠，治學與處事的態度更是許多數學家心中永遠的楷模典範。

王金龍

編按：為了紀念去年底辭世的數學大師陳省身，本刊特地邀請目前任職中央大學數學系、曾事師丘成桐的王金龍教授撰寫專文已表懷念。

2004年12月17日至22日，第三屆世界華人數學家大會在香港中文大學召開。高齡93歲的陳省身教授原已允諾為大會開啟序幕。許多他的學生，後進與朋友也都遠從世界各地，準備齊聚中文大學，參與這場為他慶生的盛會。然而就在12月3日的夜間，傳來他已於天津的南開數學所安祥辭世的消息。從此，陳省身一詞進入了歷史，在幾何學的世界裡，與高斯、黎曼、卡當同為後世永久追隨與懷念。

永遠的良師楷模

陳省身教授是一位偉大的數學家與推動數學研究的巨擘，他個人宏偉的學術成就，仍持續對數學乃至於物理學產生深刻的影響。而他在數學世界樹立了以友誼與關懷為本的為學之道，同樣令人動容。如果只能用一句話來形容他的歷史地位，我引用陳省身的愛徒——丘成桐教授在香港紀念陳省身的餐敘中，應答時的一句話：「陳氏類（Chern classes）不只會影響至五百年之後，他將永恆地與數學長存。」如果能再多加一句，就如許多數學家曾不約而同地表白：他是永遠的良師與楷模。

2004年終，受邀為文以紀念陳省身教授。作為一位幾何學的愛好者，這無疑是一項榮譽與挑戰。然而，我對於陳教授生平事略的所有了解，除了來自曾與他接觸過的數學家所談及的零碎片段，幾乎全得自於文獻上的記載，個人則從未有與他直接接觸的經驗（除了聽過一次陳省身的訪台系列演講）。事實上，丘成桐教授曾編有《陳省身——20世紀的幾何大師》〔註〕，收錄了36篇精采的第一手文稿。那些珍貴的事蹟，都是當代名家如R. Bott、L. Nirenberg、I. M. Singer、A. Weil、丘成桐、朱經武、吳文俊、楊振寧……等大師與陳教授親身交往的紀實，非常值得一讀再讀。

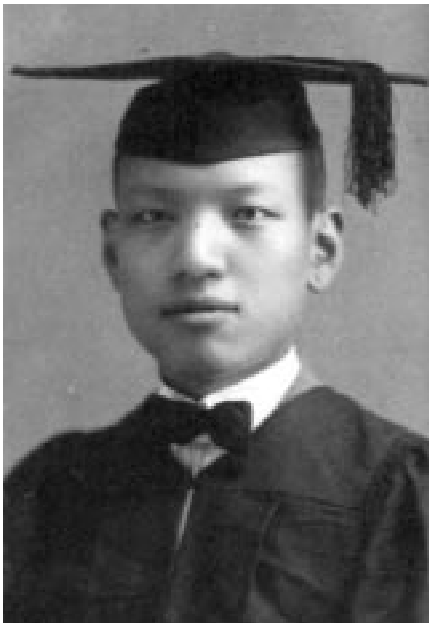
幾經思索，我覺得先以一位80年代台灣學子的經歷，來闡述陳省身教授有形或無形中帶來的影響，也許能帶起相同背景讀者的共鳴。我也企圖用白話的方式介紹陳教授一部分的偉大成就。受限於所學，我為任何（史料上或是數學上的）可能產生的謬誤先行致歉。畢竟陳教授的四大冊論文集，以及數本經典教本及講義，才是有心讀者欲一窺大道之不二途徑。

唯一一次接觸

我約在1984年(高一暑期)立定從事數學工作的志向。印象中，我的高中數學老師曾跟我提起陳省身、華羅庚、丘成桐等名字。當時除了華羅庚教授的中文著作，如《數學分析導引》、《複變函數導引》、《數論導引》等能在一般書局的架上見到，我對其他人完全沒有任何概念。事實上由於政治因素，華的書也是用其他名字出版。我和一些後來唸數學的朋友，在那個階段多少都曾依賴華的書，得以在數學的學習過程中成長。

1986年進台大數學系就讀時，出現了一個轉變——陳省身即將訪台。這是記憶中台灣數學界最大的盛事。當時張海潮教授召集了一些對數學有熱忱的一二年級學生並安排了先期課程。他希望我們在面對大師的演講時不要空手而回。張教授引導我們讀江澤涵的組合拓樸學。我們並同時讀外微分式以及Stokes定理。演講前夕他還企圖幫我們惡補關於矢量叢與陳氏類的基本知識。

最後演講終於到來，如果沒記錯應該至少有兩場。令我印象深刻是：大講堂裡擠的人山人海，水洩不通；而演講結束後有人問一些很突兀的問題，如某某華人數學家的歷史定位等；關於內容的部分，陳教授似乎是從更一般的纖維叢出發，他企圖說服大家那是極自然又有用的幾何結構。最後還談了著名的陳-Gauss-Bonnet公式。



1930年陳省身畢業於天津南開大學。

對我當時而言，那幾場演講的細節是太難了。但我清楚地目睹，眼前這位75歲眼神堅定而語氣和藹的老紳士，即是Elie Cartan的繼承者，是活動標架法、外微分式以及大域微分幾何的一代開創宗師。這種感覺著實令人震撼。後來陳教授於1990年曾再度訪台，那時我已畢業入伍，無緣躬逢其盛。

長久以來，歷史給予我們一種沉重的刻板印象——近代華人的科學研究遠遠落後於歐美，我們幾乎自己懷疑是否有能力能夠迎頭趕上。在當時，陳省身的存在破除了我的這種疑慮，因為他成長於動蕩的年代，卻成就至高的學問。

多年之後我赴美投入丘成桐教授門下學習，赫然發覺丘教授早年就讀中文大學時，也同樣因為報紙刊載關於陳教授的事蹟而受到鼓舞。丘教授是陳教授在加州柏克萊大學的傑出門生，隨後也同樣成為幾何界的泰斗。這些因緣讓我深刻的認識到，種族、地域、語言乃至於時空，都不能真正限制一個人追求理想，成就大業。也因此，進一步了解陳省身教授的生平與為學態度，必定可以讓我們受益更多。

1943~44 年陳省身與 S. Lefschetz 於普林斯頓的合影。

陳省身的生平

求學過程（1911~1936 年）

陳省身於 1911 年 10 月 28 日生於浙江嘉興。9 歲前在家自習算術與國文，僅讀了小學的後兩年。1922年遷居天津，就讀扶輪中學。1926 年，15 歲考入南開大學。他曾修習姜立夫的幾何課，用的教本是W. Blaschke的曲線曲面論（姜立夫是當時中國極少數擁有哈佛大學博士學位的教師）。畢業之後，為了爭取清華的公費留學，於1930年考進清華研究院。1932年Blaschke訪問北京，進行六場 Web Geometry 系列演講，這激起了陳省身留學德國的意念。1934年畢業時，才發覺兩年公費僅供留美，最後在代理系主任楊武之（楊振寧之父）的協助下，終能一圓留德心願。1934 年赴漢堡大學，在 Blaschke 指導下學習 Cartan 理論，研究微分幾何，並參與 E. Kaehler 的討論班。值得一提的是，陳省身是唯一參與到最後的聽眾。之間他也聽了許多Artin與Hecke的數論課，當時他的同伴中，還有後來知名的代數幾何學家周煒良。

1936 年陳省身獲得博士學位，立即得到清華與北大的聘約。但他選擇了接受中華文化基金會一年的資助，在 Blaschke 所建議的Emil Artin與Elie Cartan兩位大師之間，選擇赴巴黎跟隨 Cartan 從事博士後研究。Cartan 是20世紀前期的幾何泰斗，但是他所作的研究也是出名的難懂。在眾多訪客與學生中，陳省身獲得了隔週到 Cartan 家中與他討論一小時的難得機會。這一年對於陳省身是重要的一年。他努力學習 Cartan 的思想，包括外微分式、活動標架與等價方法，同時也完成了三篇精采的論文。

亂世中的成長（1937~1949 年）

1937年，陳省身受聘於清華大學。但由於中日戰爭爆發，清華、北大與南開遂組成聯合大學，先從長沙再遷至昆明，即著名的西南聯大。這是一段如陳省身所自述的：數學上與世隔絕的時期（~1943年）。然而，由於昆明變成為中國的知識界中心，許多人才如華羅庚、許寶騄、吳大猷等便也因而匯集一堂。許多後來傑出的科學家，如王憲鍾與楊振寧，便是當時聯大的學生。

值此沒有期刊、沒有書、通訊困難的惡劣環境，幸有 Cartan 寄給陳省身的許多個人文章為伴。迫於環境，陳省身將這些艱澀的論文都讀遍了，是造化與努力，陳省身成了Cartan思想的繼承人，並將之發揚光大。

1943年，不顧戰爭航行的危險，陳省身應Voblen的邀請，遠赴美國普林斯頓高等研究院從事研究。這是一個最重大的決定。因為在 1943~1945 這兩年之中，陳省身完成了任意維數的 Gauss-Bonnet 定理的內在證明（非內在證明由Allendoerfe和Weil在稍早前證出），進而發現了陳氏類。當陳省身對數學界宣布這些驚人的成果時，如 H. Hopf 所言，屬於陳省身的大域微分幾何時代已經來臨。

陳省身在 1946 年初回到中國，協助政府成立中央研究院數學研究所。短短不到三年間孕育出許多傑出人才，如吳文俊、陳

國才等。1948年中央研究院選出81位院士，而陳省身便是最年輕的一位。隨著國共內戰爆發，形勢險惡，陳省身終於在1949年離開了中國赴美（他再回去時，已是1972年文革末期以後的事）。1949年冬季他在普林斯頓高等研究院的系列演講，將他1944年的示性類從unitary群推廣至任意緊緻李群，此即著名的Chern-Weil同態。這份講稿雖未正式發表，卻早已廣為流傳，影響深遠。

幾何學的陳省身時代（1949~1985年）

1949年至1960年，陳省身任教於芝加哥大學，同儕中有好友Weil為伍。如陳自述，Weil是極少數能迅速抓住他的思想，並提出批評與建議的人。這11年的愉快時光中，密西根湖畔留下了這兩位20世紀數學大師的諸多身影。這段時間，有10位博士在陳的指導下產生，他們依序為：K. Nomizu、L. Auslander，廖山濤、J. Spanier、A. Rodrigues、D. Hertzig、H. Levine、H. Suzuki、J. A. Wolf與N. Petridis。

1960年陳省身離開芝加哥轉任於加州柏克萊大學，這是陳省身對整個幾何學界產生廣泛而巨大影響的時期。在此20年間，柏克萊成為世界聞名的幾何與拓樸中心，幾乎所有的幾何學家都曾見過陳且受到他的影響。除了他的學問，他的平易近人，關懷與鼓勵後進的性格，也為所有與他接觸的人所景仰與感動。直到1979年退休時，他在柏克萊共指導了31位博士。最後一位畢業於1982年。他們依序為：W. Pohl、M. do Carmo、H. Rosenberg、L. Amaral、T. Banchoff、H. Garland、R. Gardner、W. Smoke、A. Weinstein、B. Shiffman、R. Reilly、R. Wolf、D. Eisenman、S. Jordan、D. Leung、H.-F. Lai、丘成桐、L. Barbosa、D. Bleecker、J. Millson、P. Simoes、鄭紹遠、H. Donnelly、S. Webster、C.-H. Sung、D. Dunham、J. Faran、T. Shifrin、S. Smith、P. Li、王靄農與J. Wolfson。除此之外，陳亦與其他年輕數學家合作。如R. Bott、P. Griffiths、J. Moser與J. Simons等。具有數學專業背景的讀者相信已經從以上的名字裏發現許多知名的大數學家。陳省身影響之深遠已在不言之中。

一代數學大師

陳省身為中央研究院院士、美國國家科學院院士、義大利國

1984年5月，陳省身自以色列總統賀索手中接過1983~1984年度的沃爾夫獎。

家科學院與法國科學院的國外院士。他曾獲美國國家科學獎（1975年）以及數學界表彰終身成就的最高榮譽沃爾夫獎。他也是2004年第一屆邵逸夫獎（目前數學界最高獎金的獎項）的數學唯一得主。陳省身曾三次獲邀在國際數學家大會報告，其中兩次是一小時的全會報告，這對數學家而言是一項極不尋常的殊榮。

1981年，陳省身、I. M. Singer等數學家，爭取到在柏克萊成立第一個由美國政府支助的

1985年5月，陳省身獲頒紐約州立大學名譽博士。左為張守廉，右為楊振寧。

陳氏類(Chern Classes)簡介

陳省身教授的研究工作幾乎遍及幾何學的所有領域。包括：幾何結構的等價問題、積分幾何、歐氏微分幾何、極小子流形、全純映射、Web Geometry、外微分系統、廣義Gauss-onnet定理、示性類以及從屬（secondary）示性類等等。限於篇幅與能力，我僅企圖對最後一項作粗淺的說明。這些說明並不是正規的方式並且過於簡化，但是我希望至少給予讀者一些可供想像的參考訊息。

給定兩個光滑形體M和F，我們想將兩者相乘而構造出新的空間。最簡單是做平凡的歐氏直積 $M \times F$。但我們也可以讓F在M上環繞，就像Mobius帶那樣。我們想要了解這樣所得到的空間E，並企圖給予分類。既然E（m）~F隨著M上的點m在動，我們可以試著測量逐點的變化率E'（m）。這就是曲率的原始概念。為簡化討論，自然地會先考慮F本身是平坦的情形，如（複係數的）歐氏向量空間。這時，計算（或者定義）曲率的實際做法是從一個共變微分算子D出發。D是一個滿足萊布尼茲規則的算子，即對光滑函數f，恆有 $D(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot Ds$。

今任給點m上的兩個切向量u、v，我們考慮二次（共變）微分對於兩種不同次序下的差異 $DD(u, v) = D(u)D(v) - D(v)D(u)$。這個差異會是向量空間E（m）上的一個線性變換。對於E（m）上任給的基底，我們就得到了曲率矩陣 $R(u, v)$。若一開始不先指定方向u、v，則方陣R的係數可用二次微分式（differential two forms）來表達。當然，E（m）上不同的基底給出不同但相似（共軛）的曲率矩陣。就如在線性代數裡所學的，R的所有標準不變量恰由其特徵多項式所給出 $c = \det(I + R) = 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_r$，其中微分式 c_k 代表次數為2k的部分（2k forms）。這也正是R的特徵值的第k個齊次多項式，也就是第k個陳微分式（為求簡潔，我們省略了一些常數）。

共變微分算子D也稱做聯絡（connections）。這是因為我們將滿 $Ds = 0$ 的F值函數定為向量平移的過程，它也稱為彷射結構。這意味著任何另一個共變微分算子均可表示為 $D + A$，其中A是一個以一次微分式為係數的方

1985 年 10 月 17 日，南開數學研究所成立，陳省身為其揭幕。

國家數學研究中心 M S R I 。1981~1984 年間由陳出任第一任所長。短短三年， MSRI 迅速成長，很快就成為世界知名的數學中心。1985 年陳省身回到中國，在天津創立了南開數學所。他最終選擇將一切奉獻給他的故土，他也在此安享晚年，直到2004年底安祥地辭世。

註：交大出版社智慧叢書首冊。

王金龍：任教中央大學數學系

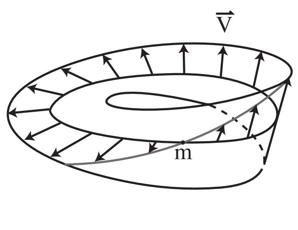
陣。陳省身證明了$dc=0$，因此c_k定出了一個de Rham上同調類。更重要是，雖然c_k與D的選擇有關，其同調類卻無關。此即著名的陳氏類。

舉例而言，$c_1(D+A)-c_1(D)=dtrA$。又對於$c_1^2-2c_2$而言，它在$D+A$和D的差額為$dtrT$。其中$T=A\wedge R+1/2A\wedge DA-1/3\,A\wedge A\wedge A$。

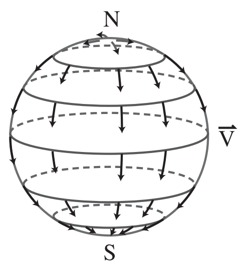
這些奇數次的微分式及其推廣即所謂的陳-Simons從屬示性類。這對於低維度空間的拓樸學以及近代理論物理學有深刻的應用。

陳氏類有一個美妙的幾何解釋。首先，我們稱E上一組連續選取的向量v（m）為一個向量場。假定F的維數是r，則向量場v的零點（v（m）＝0）所形成的集合的同調類即對偶於c_r。這就是某種形式的陳-Gauss-Bonnet定理。舉一個最簡單的例子。對一個三度空間的曲面M，其切平面T（m）的變動給出了M上逐點的曲率微分式KdA＝c_1。根據對偶的意義，曲率的整體積分便得出$\int KdA=2\pi$（向量場的零點數）。

此即經典的Gauss-Bonnet公式。以球為例，其曲率K＝1，故曲率的整體積分即為面積4π。根據以上公式，我們推出球上的任何一個切向量場都有兩個零點。切向量場的零點數也可由Euler數$\chi(M)=2-2g$來表達，其中g為曲面M的洞的個數（即虧格）。然而，欲獲得更多詮釋的讀者，恐怕必須求助於專業的文獻了。因此，我想我們就此打住。



M＝S'（單位圓）F＝IR（直線）
Mobius 帶，向量場$\vec{V}$一定，會有一個零點 m。



球面，M＝S^2，F＝IR^2，任何切向量場$\vec{V}$的零點總數為 2，北極N與南極S為$\vec{V}$的零點。