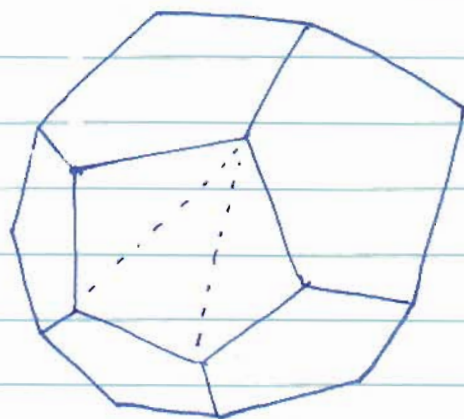


王金靜

神奇的 Euler 數，對於球面的剖分

$$p - e + f = 2$$

p = 頂的个数
 e = 邊的个数
 f = 面的个数



Application: 正多面体 (凸)

(1) 若每面是正 n 边形 则 $\text{angle} = \frac{(n-2) \cdot \pi}{n}$

若每頂處有 B 个多边形相接, 则

$$B \left(1 - \frac{2}{n}\right) \pi < 2\pi$$

ie. $1 < \frac{2}{n} + \frac{2}{B}$ or. $\frac{1}{n} + \frac{1}{B} > \frac{1}{2}$

(2) 若共有 p 頂, 则 $fn = pB$; $2e = fn$, 得

$$p - \frac{pB}{2} + \frac{pB}{n} = 2$$

遍除以 $\frac{1}{pB} \Rightarrow \frac{1}{B} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2}{pB} = \frac{1}{e}$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{B} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2}$$

$$n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

• $n=3$, $\frac{1}{B} = \frac{1}{e} + \frac{1}{6}$ $\frac{1}{B} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow B < 6$ but $B \geq 3$

$B=3$ $\frac{1}{e} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow e=6$, $f=4$, $p=4$

$B=4$ $\frac{1}{e} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow e=12$, $f=8$, $p=6$

$B=5$ $\frac{1}{e} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \Rightarrow e=30$, $f=20$, $p=12$

• $n=4$, $\frac{1}{B} = \frac{1}{e} + \frac{1}{4}$ $4 > B \geq 3$

$B=3$, $\frac{1}{e} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow e=12$, $f=6$, $p=8$

• $n=5$, $\frac{1}{B} = \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{e} + \frac{3}{10}$

$\frac{10}{3} > B \geq 3$

$B=3$, $\frac{1}{e} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10-9}{30} = \frac{1}{30} \Rightarrow e=30$, $f=12$, $p=20$

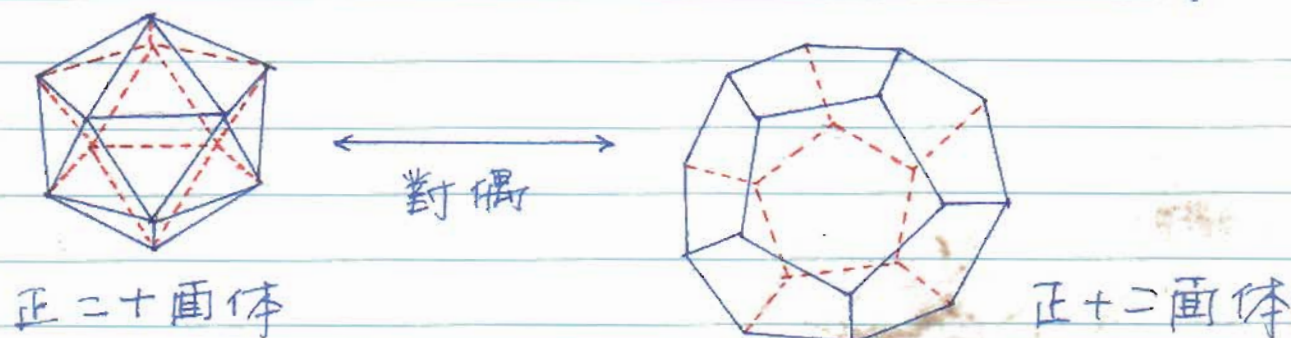
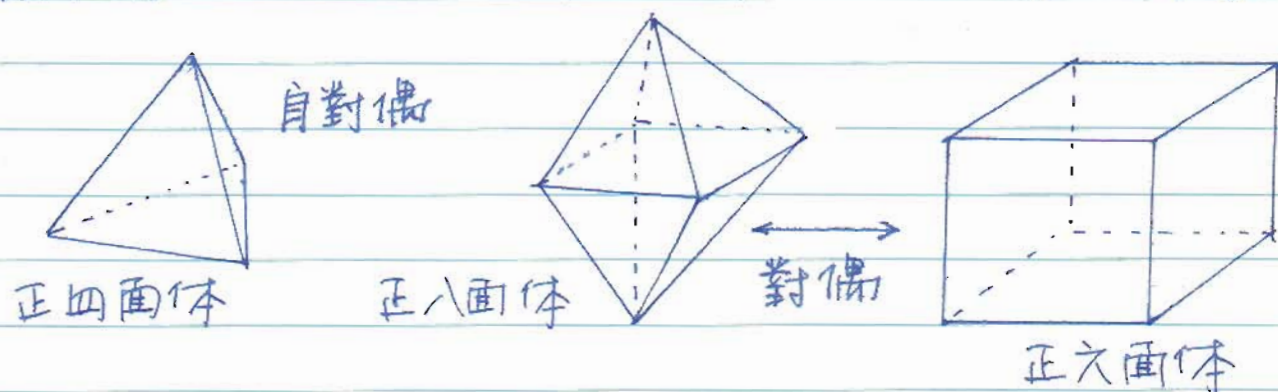
$n=6$ $\frac{1}{B} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{e} + \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \geq B \geq 3$

but $B=3 \Rightarrow e=0$ 不合

$n \geq 7$ $\frac{1}{7} + \frac{1}{B} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{B} > \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$

$\Rightarrow B < \frac{14}{5} < 3$ 不合 ($B \geq 3$)

故共有 5 个凸的正多面体：是莫比乌斯对偶关系



$\mathbb{R}^3$ 中無邊曲面的分類：運用特殊的剖分 $\rightarrow$ 三角剖分

X



$g = \text{genus}$ 洞的個數

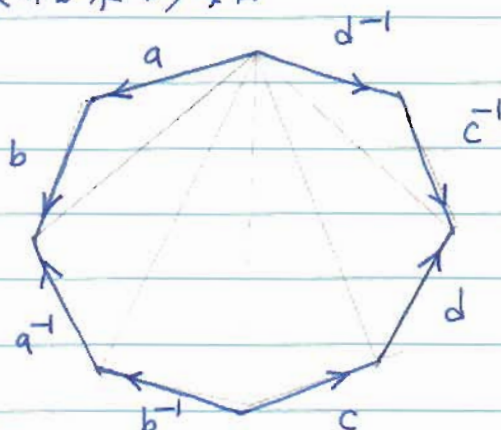
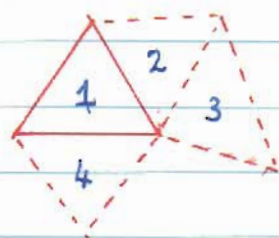
$$p - e + f = 2 - 2g = \chi(X)$$

稱為 Euler 數

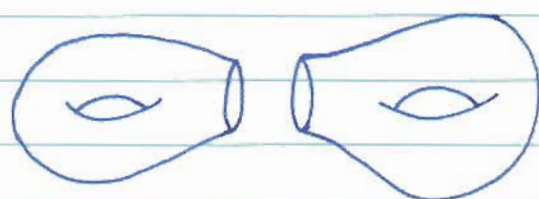
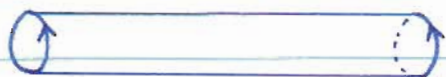
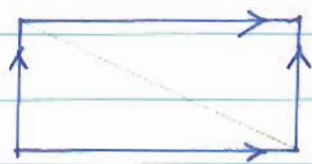
曲面的展開 (剪裁)

挖出這塊，貼於平面上。持續挖出三角形...

例：最後結果形如



例：torus (環面) $g=1$



$g=2$

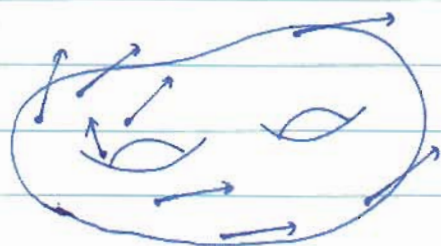
問題

1. Euler 數 $\chi(X)$ 與三角剖分的方式無關
2. 找出洞數為 g 的曲面的平面展開方式 (如以上二例 $g=1, 2$)
3. 找出一簡單的三角剖分，證明 $\chi(X) = 2 - 2g$

Application: 頭髮問題 (向量場問題)

在曲面 X 上,

給定一個連續的切向量場 $\vec{v}$,
是否一定會有零點?

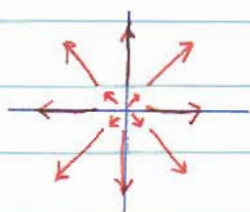


Hopf-Poincaré 公式: $\vec{v}$ 的零點數 $= \chi(X) = 2 - 2g$

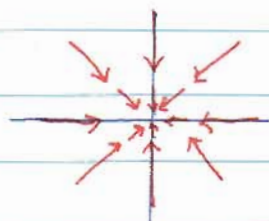
說明:

每一個零點均有一個 local index (重數) $i_p \in \mathbb{Z}$

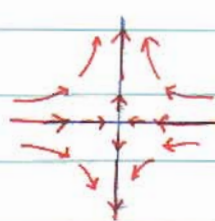
例:



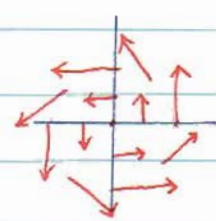
$$i_p = 1$$



$$i_p = 1$$



$$i_p = -1$$



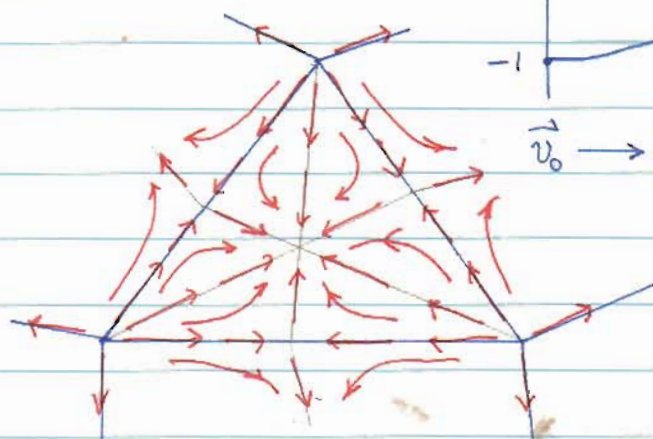
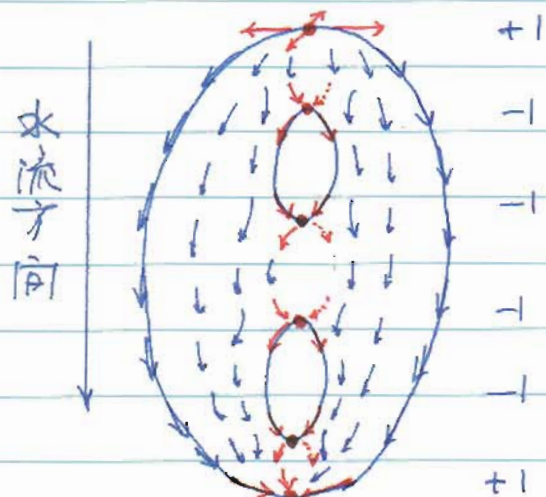
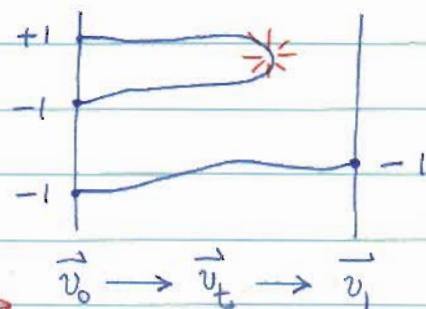
$$i_p = 1$$

Global index $\text{Index}(\vec{v}) := \sum_{\vec{v}_p=0} i_p$

觀察: $\text{Index}(\vec{v})$ 為一定數, 與 $\vec{v}$ 無關 (正負相消原理)

可將 $\vec{v}$ 連續變化成 $\vec{v}_1$:

兩個特殊的向量場:



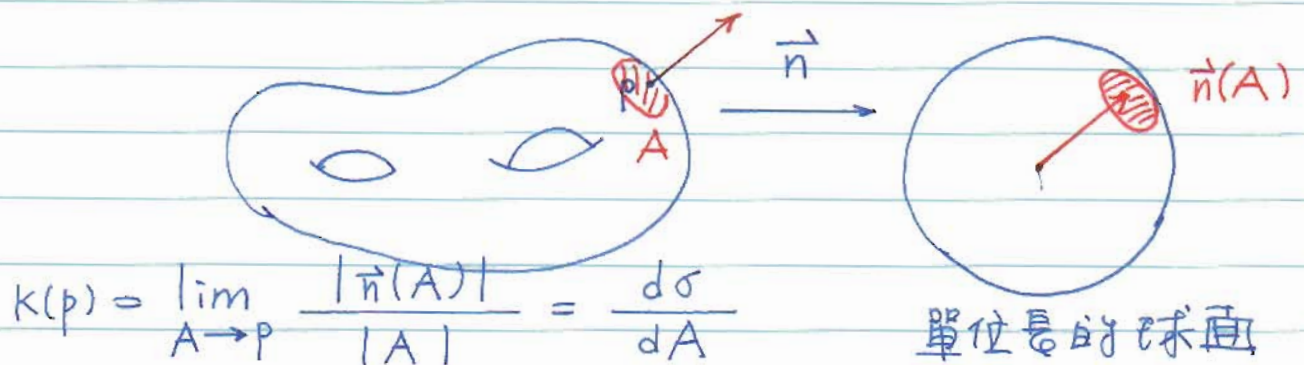
點 (+1) 邊 (-1) 面 (+1)

微分几何学的重要结果

Gauss - Bonnet 公式

$$\int_X K dA = 2\pi \chi(X)$$

$K(p)$ = 在 p 点的曲率 = 法向量所张开面积的比率



故 $\int_X K dA = \int_X d\sigma = \text{degree}(\vec{n}) \cdot \int_{S^2} d\sigma$

原始曲面 X S^2 上的面積元素

$$\int_{S^2} d\sigma = \text{球面面積} = 4\pi \quad (4\pi r^2, r=1)$$

$\text{degree}(\vec{n})$ = 函数 $\vec{n}$ 将 S^2 覆盖的次数

主要观察: $\text{degree}(\vec{n}) = \frac{\chi(X)}{2} = \frac{\text{Index}(\vec{v})}{2}$

技巧: 大风吹, 将法向量 $\vec{n}$ 吹歪, 成为 (大部分点) 不垂直的向量, 然後投影到 X 的切平面上, 得到一切向量场 $\vec{v}$.

若风向下, 则 $\vec{v}(p) = 0 \iff \vec{n}(p) = \text{南极或北极}$.

$$\text{今 } \text{index}(\vec{v}) = (\vec{n} = \text{北极次数} + \text{南极次数}) = 2 \text{degree}(\vec{n})$$

则 $\text{index}(\vec{v}) = \chi(X)$ 是之前 Hopf - Poincaré 公式 $\square$