2009 第一屆
丘成桐中學數學獎說明會

王金龍教授
台大數學系

於高雄女中

說明會流程

- 簡介
- 常見Q&A
- 作品範例

緣起

- 數學科學在現今國際科技和人才競爭力方面，具有突出的重要地位。在與人類日常生活有關的科學技術中的應用也日趨廣泛。我們相信，為了適應未來社會的挑戰，青少年學子應該擁有良好的數學教育。
- 國際上很早就宣導應當及早培養學生的科學研究創新能力，並為此設立獎項鼓勵更多的年輕學子參與。比如在美國，有小諾貝爾獎之稱的「英特爾科學獎」（前身為西屋科學獎）這個獎項不同於普通的數學競賽，而是注重創新與實踐。它促進了美國高中、大學生的科學研究熱情，許多獲獎者後來都成為著名的科學家。
- 據統計，該比賽獎項得主中有五位後來成為諾貝爾科學獎獲得者，二十七人當選為美國科學院院士。

- 有鑑於此，我們希望也能在台灣成立數學獎以積極發掘並培養青少年數學人才。我們計畫由台灣大學數學系主辦，邀請台灣數學界研究傑出學者為評審，通過專題研究，培養新一代中學生的數學素養，引發青年人探索知識的興趣及提升他們的學術水準。並提供優渥的獎學金，鼓勵得獎者立志從事數學研究。
- 丘成桐院士（哈佛大學講座教授）是世界知名的數學泰斗，並為第一位獲得費爾茲獎（Fields Medal）的華裔數學家。他在過去近二十年對於台灣數學界的關心與貢獻極大，先後獲交大， 清大， 中央， 台大授予榮譽博士。他的奮鬥與成就是台灣青少年有志於數學科學研究者的最佳楷模，故以其名設立本數學獎。

比賽目標

- 激發中學生對於數學研究的興趣和創造力
- 發掘適合積極培養的年輕數學人才
- 增進各校數學能力優異學生們的相互瞭解與友誼
- 鼓勵高中職教師和校方在數學教育方面的貢獻

參賽資格

- 現就讀高中職或以下(國中小)之學生，以個人身份參賽。
- 需有現任教高中職或以下之老師一人為指導老師。

參賽規定

- 參賽作品可以是純粹的數學研究，也可以是將數學應用於各領域的綜合研究。
- 必須具有**原創性**。
- 不可在其它科學展覽或數學競賽中曾參賽獲獎。
- 研究中所使用的數學知識與工具並無任何限制，但參賽者必須對其使用的知識有深入的了解，並忠實引述所使用的他人著作。
- 作品可以使用中文或英文書寫。

參賽時間

- 參賽同學須於每年3月31日前於網路報名。
- 5月31日前將參賽作品之完整 pdf 電子檔寄至台灣大學數學系。接獲回覆通知即完成參賽程序。

- 第一階段為初賽（6月16日至6月30日），由評審團就所有研究報告進行書面審查，選出若干隊伍。
- 第二階段為決賽（於每年7月舉行，2009 年定為 7月17日），由前述入選作品的學生先對評審團進行口頭報告（約20分鐘），簡述自己的研究方法和結果，然後依次接受評審團成員的提問。

評審方式

- 評審過程分為兩個階段 -- 初賽和決賽。初賽為書面審查，決賽則為入選作品進行答辯。

- 評審項目包含：
  1) 研究結果之原創性。
  2) 研究主題與解決問題之創意。
  3) 研究方法之適切性。
  4) 研究作品之學術價值。
  5) 參賽學生之表達能力。

獎勵辦法

- 初賽選出入圍決賽作品（不超過8名）。
- 決賽選出金牌獎、銀牌獎、佳作獎。

金牌獎

- 得獎學生可獲得證書、獎座及研究補助金新台幣60,000元。之後，得獎者若就讀國內外大學數學系或應用數學系，並可獲得四年獎學金，每年新台幣120,000元。

- 指導老師可獲得證書、獎座及研究補助金新台幣30,000元。
- 不超過1名，得從缺。

銀牌獎

- 得獎學生可獲得證書、獎座及研究補助金新台幣40,000元。之後，得獎者若就讀國內外大學數學系或應用數學系，並可獲得四年獎學金，每年新台幣60,000元。

- 指導老師可獲得證書、獎座及研究補助金新台幣20,000元。
- 不超過2名，得從缺。

佳作獎

- 得獎學生可獲得證書、獎座及研究補助金新台幣20,000元。
- 指導老師可獲得證書、獎座及研究補助金新台幣10,000元。

團體獎

- 同一學校有兩件（含）以上作品獲獎則可獲頒團體獎座。

- 獲獎學校可優先與台大數學系合作，於學期中安排教授至該校進行數學教學研究之推廣活動。

後續培育與追蹤

- 所有獲獎作品將彙集成冊。
- 對於就讀國內數學系或應用數學系之獲獎同學，將安排指導教授協助其學習與參與研究計畫，追蹤其後續發展。
- 於適當時機安排至國外一流數學系或研究中心進行短期進修。

常見Q&A

常見Q&A

Q. 是否一定要為個人參賽？

A. 本獎設立目的在於發展學生獨立研究的能力以及提供學生自由選擇大學就讀數學之機會，因此規定只能個人參賽，使高額獎金能發揮應有之功效。

常見Q&A

Q．得過獎的作品是否可以參賽？

A．任何作品若在其他獎項得到前三名，則不得參與本獎（佳作可），但是先前得獎作品在後來有更深入的進展則另當別論。

另外，若得到丘成桐中學數學獎之作品亦不得參與其他比賽。

常見Q&A

Q．是否可以找教授為作為指導老師？

A．指導老師必須是中(小)學老師，並且指導老師獎金亦只須給中(小)學老師。

常見Q&A

Q．科學競賽之評審常多為男性，希望能鼓勵女同學參與，是否能讓評審中有女性教授？

A．本獎亦希望如此，目前已積極邀請女性教授參與本獎評審。

常見Q&A

Q．丘成桐數學獎是否能鼓勵一些只專注數學，其他學業卻平平的學生？

A．由於本獎並非教育部所辦，對於得獎學生無法保送，但若得獎學生能達到教育部所設最低門檻，申請或推甄台大數學系，台大數學系必定會優先錄取。

常見Q&A

Q．丘成桐數學獎是否能鼓勵一些比較沒有機會接觸更深入數學的學生？

A．如同之前所述，本獎評審重點為<u>**原創性**</u>，故所用數學深淺並不是問題。當然，研究問題的過程中可能需要學習適切的數學工具，因此本獎對於使用之數學並不設限。

常見Q&A

Q．是否能辦營隊，讓學生有機會更深入地接觸數學？

A．對於進入複賽的學生，我們會邀請其參加台大數學系的暑期活動。

常見Q&A

Q.丘成桐中學數學獎與國際科展有何不同？

A.本獎設立目的是為鼓勵中學生投入數學研究，因此希望得獎學生能繼續念數學系，與科展得獎學生可以選擇任何科系不同。

另外，本獎必須獨立參賽，而國際科展可以團隊參賽。

常見Q&A

Q. 參賽的時間與學測的時間太過接近，是否會讓學生無從準備？

A. 參賽為長期的研究過程，學生平時就必須投入，故短期的學測並不會帶來太大影響。

作品範例

- 深奧的工具不是絕對必要
- 也可以是很有趣的遊戲
- 如果你的數學能力很早熟...
- 你也可以發展自己的方法
- 得過獎的作品...
- 挑戰國際水準

深奧的工具不是絕對必要

丘成桐中學數學獎接受各種型態的數學研究，不一定要用深奧難懂的數學工具，例如以下作品：

挑剔數列 (2003旺宏科學獎金牌)

挑剔數列

一種特別的數列，這種數列是由1~7等數字組成，其中每個數字都重複使用兩次，在總共14 格的格子裡排列，而且要符合1 與1之間有1個數、2與2之間有2個數字、、、6 與6之間有6個數字、7與7之間有7個數字。

例：2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4。

挑剔數列

研究目的：

將此數列改成由 1~n 所組成的 2n 位數列，並討論此 2n 位數列的各種特性。

1. 證明 $n = 4k + 1$ 和 $4k + 2$ (k 為非負整數) 時不存在挑剔數列。
2. 找出一種排法能排出 2n 位的挑剔數列。
3. 証明此排法並反推 $n = 4k$ 和 $4k + 3$ 時一定有挑剔數列存在。

挑剔數列

n = 7 的所有解：

- A: 73625324765141
- B: 72462354736151
- C: 71416354732652
- D: 74151643752362
- E: 27423564371516

…….(共52種)

也可以是很有趣的遊戲

本獎亦非常喜歡將數學應用在各個領域的綜合研究，因此也可以是很生活化的研究，甚至是一些遊戲，例如以下作品。

停車就是彈硬幣 (2005國際科展)

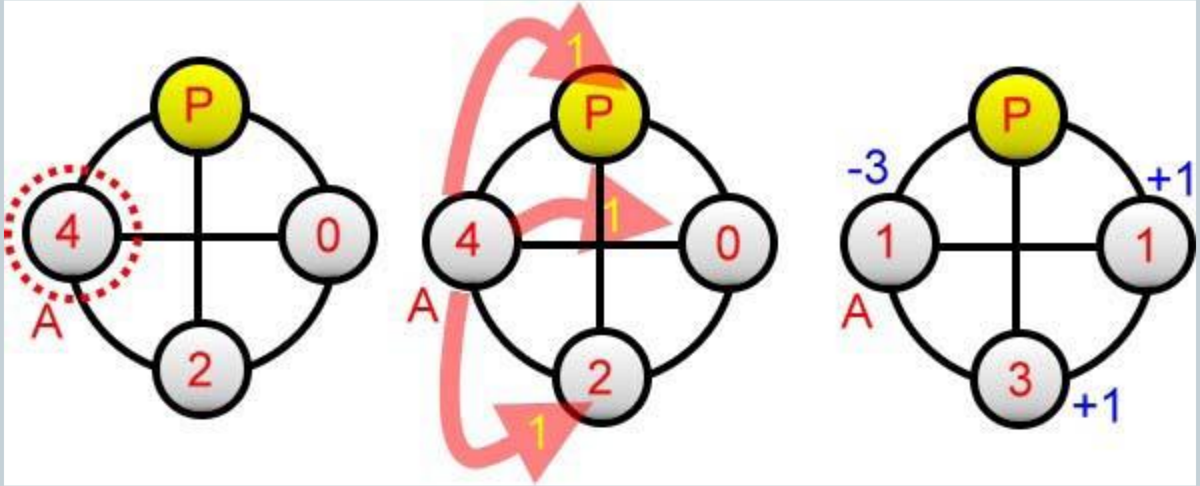
停車就是彈硬幣

停車場問題是這樣的：在一條單行道上有 n 個車位，編號從 1 到 n。現在有 n 個司機排成一排要進入停車。但是每個司機都有怪癖，各自有最想要停的位子。他們依序將車子開進單行道，如果想要停的位子是空的，當然停在這個位子。但是如果不巧那個位子已經被停了，不得已只好找下一個空位，姑且停之。但是如果往下找都沒有空位，由於是單行道，司機就只好開走不停了。

停車就是彈硬幣

彈硬幣遊戲是這樣的：考慮圓內接正 n + 1 邊形，任意兩點都連線。這正 n + 1 邊形中有一個頂點 P 是特殊的，每個頂點上一開始都放有一些硬幣。如果 P 以外的某個頂點上的硬幣數 n 個，我們可以對這個頂點進行操作：一次操作是指將這個頂點上的硬幣各分一個給每個其他頂點。點 P 只在其他點都無法操作時操作。我們不理會頂點 P 上的錢數，因此這個遊戲可以無限地玩下去。

停車就是彈硬幣



停車就是彈硬幣

- 令 P_n 為能順利停車的總方法數；$P_{n,k}$ 為能順利停車，且第 1 個司機喜歡第 k 號停車位的組數。
- P_n 恰好就是彈硬幣遊戲中，總點數為 n + 1 的循環狀態總數。
- 停車場問題 與 彈硬幣遊戲根本是同一件事!
- 在 "圓內接正 n 邊形只有相鄰兩點連線，特殊點 P 位於圓心，與每點都連線" 的情況下玩彈硬幣遊戲，則結果居然和 盧卡斯 數列與 費氏數列有關!

如果你的數學能力很早熟...

若你的數學能力很早熟，已經接觸過較為深入的數學，我們也建議你做更深入的研究，例如以下研究：

On the Behavior of Newton Iteration (ICCM 2007, 新世紀數學獎學士論文金牌)

On the Behavior of Newton Iteration

The Newton iteration provides an algorithm to approximate the roots of smooth maps $f : R^n \to R^m$ from Euclidean n-space to itself.

For the one-variable case it is well known that the Newton iteration always converges locally at any root, unless the derivative of all order vanish there. For multivariate case, the method is efficient if the root a is a simple root .

On the Behavior of Newton Iteration

If the root is a zero of homogeneous order k, then the Newton iteration behaves like a contraction mapping of dissipation factor (k-1)/k. Furthermore, if f is dominated by its lowest homogeneous part in the sense that a non-degeneracy condition holds, then N behaves like the strictly homogeneous case. In this case, we can even modify the Newton iteration to make the dissipation factor approximates 0, and therefore achieve an exponential rate of convergence.

On the Behavior of Newton Iteration

- EXAMPLE

Consider: $f_1 = 5x^2 + 3xy - 5y^2$, where

$f_2 = 14x^4 - 7x^3y - 4xy^3 - 11y^4 \qquad f(x,y) = (f_1, f_2)$

The Newton iteration is given by

$$N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-161x^5 + 462x^4y - 235x^3y - 220x^2y^3 - 93xy^4 - 110y^5}{-238x^4 + 602x^3y - 330x^2y^2 - 464xy^3 - 172y^4} \\ \dfrac{140x^5 - 147x^4y + 280x^3y^2 - 205x^2y^3 - 354xy^4 - 119y^5}{-238x^4 + 602x^3y - 330x^2y^2 - 464xy^3 - 172y^4} \end{pmatrix}$$

On the Behavior of Newton Iteration

Let $S_1 = \{(x,y) | x/y \in [-3.9, -3.3]\}$

$S_2 = \{(x,y) | x/y \in [2,2,3]\}$

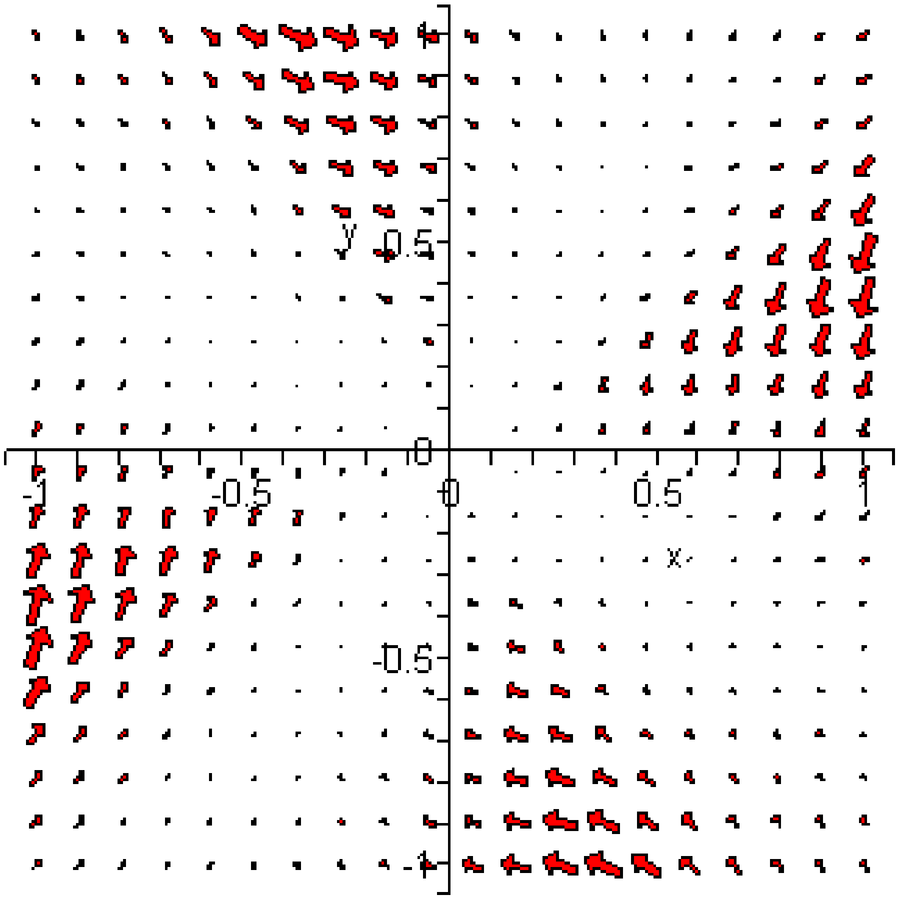
Then $N(S_1) \subset N(S_2), N(S_2) \subset N(S_1)$. And if we begin with any $x \in S_1$ or S_2 then the Newton iteration will send it to infinity. The picture below show the direction of $-D(x) = N(x) - x$. When x is at the upper left region contained in S_1, $N(x)$ will be in the right upper region contained in S_2, then $N(N(x))$ will be in the lower region contained in S_1, and so on.

On the Behavior of Newton Iteration

And it will be sent further and further from the origin. Furthermore, one notes that in this example, Df never vanishes except at the root, but the Newton iteration still diverge.

This shows that homogeneity is essential in the general convergence of Newton iteration. (See the figure below.)

On the Behavior of Newton Iteration



你也可以發展自己的方法

雖然參考前人的技術非常重要，但我們更希望你能發展出自成一格的系統，甚至，發現以前沒人發現過的驚人結果，例如下列研究：

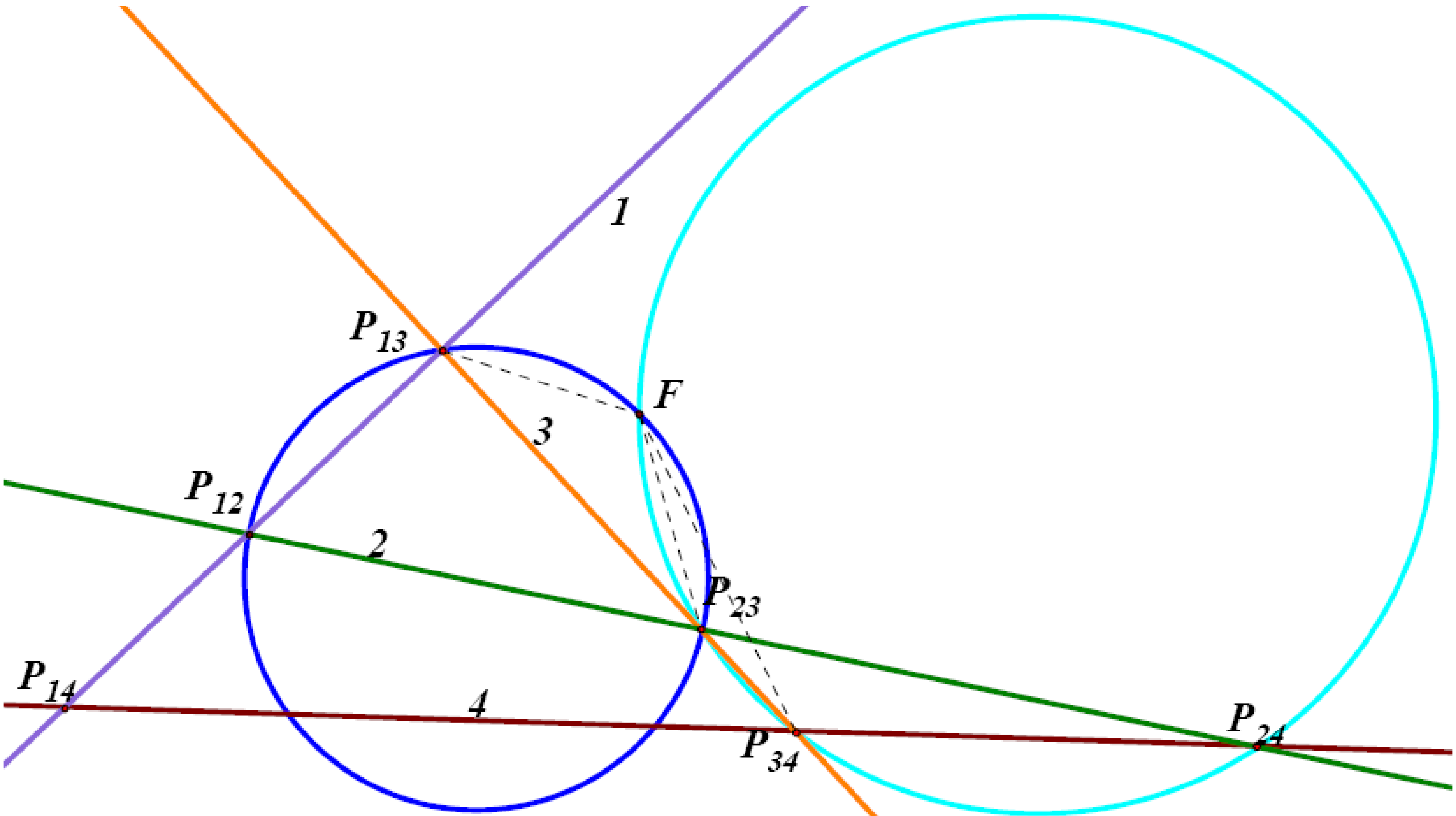
共點圓，共圓點 (2007旺宏科學獎旺宏獎)

共點圓共圓點

觀察知道在完全四邊形(Complete Quadrilateral)中，四個三角形的外接圓會共點P，我稱其為限制點(Restricted Point)。而將其推廣至多條兩兩交一點直線(不存在有三線交一點、不存在有平行線組)。加入新的一條直線，找尋任意完全四邊形的限制點P，再度形成四個不同的完全四邊形的限制點，而這些點發現其又會共圓，稱其為一限制圓(Restricted Circle)。而再加入新的一條直線，找尋所有的限制圓，又發現會共點。

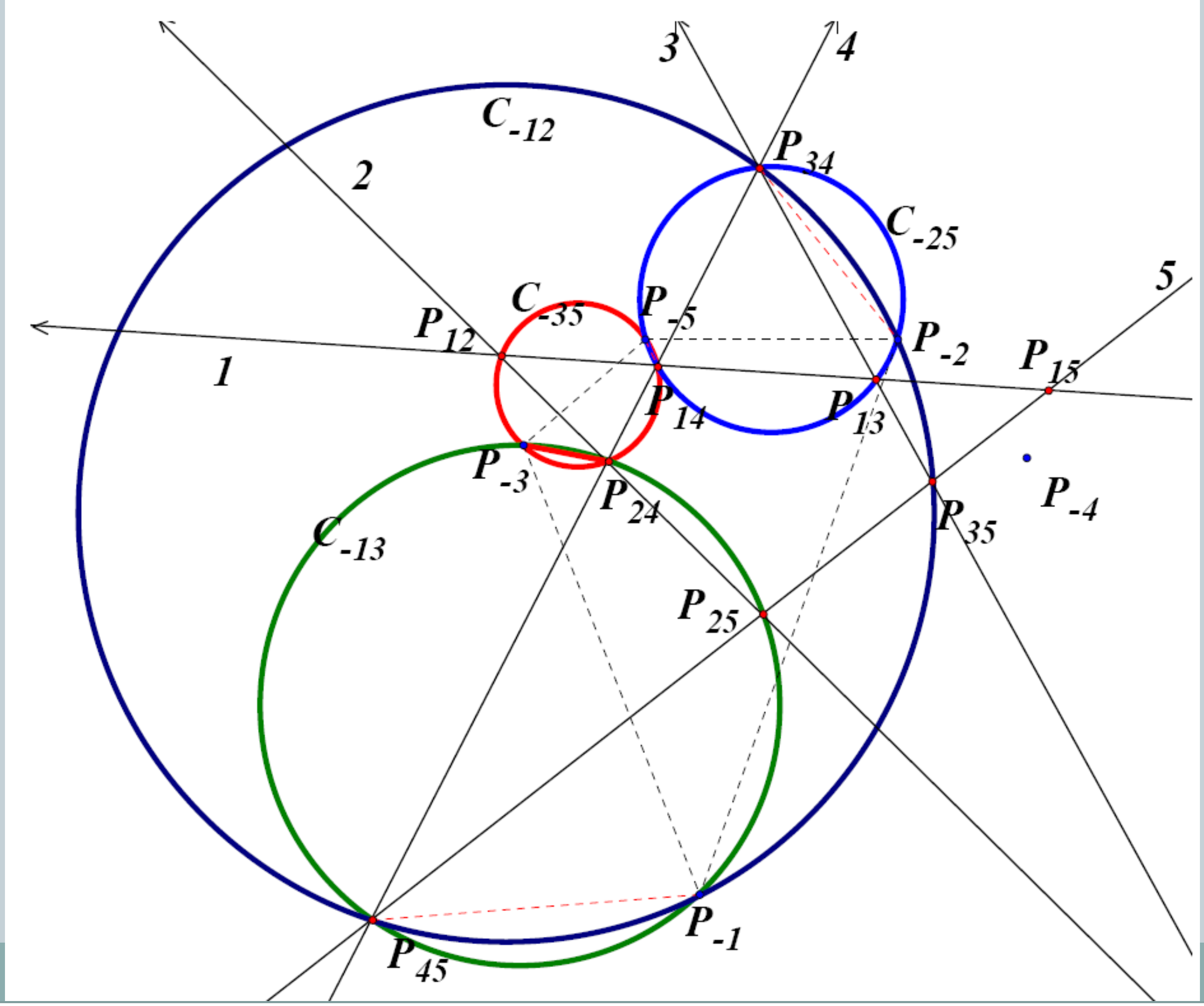
共點圓共圓點

n=4



共點圓共圓點

n=5



1
2
3
4
5
C_{-12}
C_{-25}
C_{-35}
C_{-13}
P_{34}
P_{12}
P_{-5}
P_{-2}
P_{15}
P_{14}
P_{13}
P_{-3}
P_{24}
P_{-4}
P_{35}
P_{25}
P_{-1}
P_{45}

得過獎的作品

雖然本獎有很強的排他性，不接受得過其他獎的作品來參賽(多數科學獎均有此規定)，但若是有更新、更深的發展，則另當別論，如下作品。

與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解(2002全國科展佳作, 2003旺宏科學獎銀牌)

分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用(2005旺宏科學獎金牌)

與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解

仔細觀察一個式子：

$$05882352941176470588^2 + 23529411764705882353^2$$
$$= 0588235294117647058823529411764705882353$$

其所得到的等式結果竟然是相同的兩段數字並列。

我們定義 $VR-C_{2n}$ 為由2n位數字組成的「Visual Representation Concatenating Squares」，以 C_8 為例

$05882353 = 0588^2 + 2325^2$ 或者 $94122353 = 9412^2 + 2353^2$

而我們想問，$VR-C_{2n}$ 有多少解？

與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解

這個問題其實就是解個整數方程，我們以a為前n位、b為後n位的數字，而r是10的n次方，我們要解的就是：

$$ar+b=a^2+b^2$$

這就等價於 $r^2+1=s^2+t^2=(2a-r)^2+(2b-1)^2$ 。若 $r^2+1=(m^2+n^2)(u^2+v^2)$，則我們可以分出

$$(a,b)=(mv,mu)or(nu,mu)or(mv,-nv)or(nu,-nv)$$

因此，怎麼去分解 $10^{2n}+1$ 則變成變得關鍵。

更新的發展

分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用

此作品後來有了更新的發展，他討論另一種情況，一樣是某 2n 位數 s，令 a 為前 n 位數、b為後 n 位數，我們希望他們滿足 $s=(a+b)^2=a\cdot 10^n+b$。其結果是，滿足此條件之 $a+b$ 等價於

$$a+b \equiv (a+b)^2 \pmod 9$$

挑戰國際水準

本獎期望能透過比賽，激發出台灣學生的潛力，能夠達到真正國際水平的作品，因此我們期待能看到具有創見、高度成熟又高水準的作品。如以下作品。

The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldman bracket on surfaces (2008 Intel Science Award)

The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldman bracket on surfaces

In 1999 Chas and Sullivan discovered that the homology $H_*(X)$ of the space of free loops on a closed oriented smooth manifold X has a rich algebraic structure called string topology. They proved that $H_*(X)$ is naturally a Batalin-Vilkovisky (BV) algebra. There are several conjectures connecting the string topology BV algebra with algebraic structures on the Hochschild cohomology of algebras related to the manifold X, but none of them has been verified for manifolds of dimension n > 1.

The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldman bracket on surfaces

In this work we study string topology in the case when X is aspherical(i.e. its homotopy groups $\pi_i(X)$ vanish for i > 1). In this case the Hochschild cohomology Gerstenhaber algebra $HH^*(X)$ of the group algebra A of the fundamental group of X has a BV structure. Our main result is a theorem establishing a natural isomorphism between the Hochschild cohomology BV algebra $HH^*(A)$ and the string topology BV algebra $H_*(X)$.

In particular, for a closed oriented surface X of hyperbolic type we obtain a complete description of the BV algebra operations on $H_*(X)$ and $HH^*(A)$ in terms of the Goldman bracket of loops on X. The only manifolds for which the BV algebra structure on $H_*(X)$ was known before were spheres and complex Stiefel manifolds. Our proof is based on a combination of topological and algebraic constructions allowing us to compute and compare multiplications and BV operators on both $H_*(X)$ and $HH^*(A)$.

- 歡迎大家進入美妙的數學世界

- 謝謝