台大數學月系列活動

2009 第一屆丘成桐中學數學獎頒獎典禮手冊

NTU MATH MONTH
2009臺大數學月

2009.7.18 10:30-11:30

台大福華文教會館 14 樓

Yau Award

TIMS Taida

NCTS Mathematics Division, Taipei

TIMS Taida

NCTS Mathematics Division, Taipei

國立台灣大學數學系

目錄

緣起 -- 3

關於 2009 丘成桐中學數學獎 -------------------- 4

丘成桐院士簡介 ------------------------------ 6

評審委員名單 -------------------------------- 8

頒獎流程 ------------------------------------ 10

決賽作品簡介 -------------------------------- 11

林鈺翔 -------------------------------- 12
洪梓翔 -------------------------------- 14
許綺云 -------------------------------- 16
陳伯恩 -------------------------------- 18
陳啟祐 -------------------------------- 20
楊媛甯 -------------------------------- 22
歐翰青 -------------------------------- 24
蘇士唐 -------------------------------- 26

附錄：丘成桐中學數學獎第一次說明會會議記錄 --- 28

緣起

數學科學在現今國際科技和人才競爭力方面，具有突出的重要地位。在與人類日常生活有關的科學技術中的應用也日趨廣泛。我們相信，為了適應未來社會的挑戰，青少年學子應該擁有良好的數學教育。

國際上很早就宣導應當及早培養學生的科學研究創新能力，並為此設立獎項鼓勵更多的年輕學子參與。比如在美國，有小諾貝爾獎之稱的「英特爾科學獎」(前身為西屋科學獎）這個獎項不同於普通的數學競賽，而是注重創新與實踐。它促進了美國高中、大學生的科學研究熱情，許多獲獎者後來都成為著名的科學家。根據統計，該比賽獎項得主之中有五位後來成為諾貝爾科學獎獲得者，有二十七位當選為美國科學院院士。

有鑑於此，我們希望也能在台灣成立數學獎以積極發掘並培養青少年數學人才。我們計畫由台灣大學數學系主辨，邀請台灣數學界研究傑出學者為評審，通過專題研究，培養新一代中學生的數學素養，引發青年人探索知識的興趣及提升他們的學術水準。並提供優渥的獎學金，鼓勵得獎者立志從事數學研究。

丘成桐院士（哈佛大學講座教授）是世界知名的數學泰斗，並為第一位獲得費爾茲獎（Fields Medal）的華裔數學家。他在過去近二十年對於台灣數學界的發展貢獻良多，先後獲交大、清大、中央和台大授予榮譽博士。他的奮鬥與成就是台灣青少年有志於數學科學研究者的最佳楷模，故以其名設立本數學獎。

關於 2009 丘成桐中學數學獎

(召集人的話 王金龍 2009.7.12)

數學在基礎科學、現代科技和人才競爭力方面，具有突出的地位。其應用也日趨廣泛。有鑑於此，台大數學系於今年開辦中學數學獎，邀請台灣傑出數學家為評審，通過專題研究，培養新一代中學生的數學素養，引發青年人探索知識的興趣及提升他們的學術水準。

本獎參賽資格為高中職(含)以下學生，以個人獨立研究作品參賽。作品可以是純粹的數學研究，也可以是數學應用在其他領域(如自然科學或金融等)的綜合研究。唯必須具有原創性。研究中所使用的數學知識與工具並無限制，作品亦可以使用中文或英文書寫。

今年的參賽同學已於 3 月 31 日前完成網路報名，並在 5 月 31 日前將作品寄至台灣大學數學系，共有 34 件作品報名參賽，作品完整的有 21 件。評審過程分為二個階段：第一階段為初賽，已於 6 月 16 日完成。評審團就所有作品進行書面審查，共選出 8 件作品晉級決賽。

參賽同學中，有兩位小六生，一位國中生，其中一位國小生陳伯恩晉級決賽。晉級決賽名單為台中一中林鈺翔、新竹高中洪梓翔、北一女中許綺云、實驗中學雙語部陳伯恩、台中一中陳啟祐、高雄女中楊媛甯、武陵高中歐翰青及建國中學蘇士唐。

第二階段為決賽，做為台大數學月的壓軸活動，將於 7 月 17 日在臺大數學系新數學館舉行。決賽將由入選學生先對評審團進行口頭報告，簡述研究方法和結果，然後接受提問。評審團按照入選同學的報告與答辯表現，決定最後的獲獎名單。評審項目包含：結果之原創性、主題與解決問題之創意、方法之適切性、作品之學術價值以及表達能力。

決賽將選出金牌獎，銀牌獎與佳作獎。金牌獎不超過 1 名，得獎學生可獲得證書、獎座及獎金 60,000 元。之後得獎者若就讀國內外大學數學系或應用數學系，還可獲得四年總金額 480,000 元的獎學金；指導老師可獲得證書、獎座及獎金 30,000 元。銀牌獎不超過 2 名，得獎學生可獲得證書、獎座及獎金 40,000 元。之後得獎者若就讀國內外大學數學系或應用數學系，還可獲得四年總金額 240,000 元的獎學金；指導老師可獲得證書、獎座及獎金 20,000 元。佳作獎得獎學生可獲得證書、獎座及獎金 20,000 元；指導老師可獲得證書、獎座及獎金 10,000 元。

頒獎典禮將於 7 月 18 日早上 9 點於台北福華國際文教會館 14 樓舉行，邀請獲獎者及其親友、老師、校長以及評審團共同觀禮。評審團將對每一件金牌、銀牌作品對與會來賓做介紹。丘成桐院士將專程來台親自頒獎，並與參賽學生座談。

所有獲獎作品將彙集成冊。對於極優的作品，並將由丘院士與評審團協助其在專業期刊上發表。此外，對於就讀國內數學系或應用數學系之獲獎同學，主辦單位將安排一位指導教授協助其學習與參與研究計畫，追蹤其後續發展。並於適當時機安排至國外一流數學系(如哈佛大學)或研究中心進行短期進修。丘院士、評審團及指導教授並樂意為表現優異的同學書寫推薦函至國內外大學深造。

本獎所需經費獲得曾繁城先生大力贊助，捐款至臺灣大學校務基金專款專用，使得以順利推動。其間也獲得台大數學科學中心以及國家理論科學中心北區辦公室行政上與人力的支援。許多高中校長與老師也不吝給予本獎建議(包括評審的公正性與學術倫理的建立)與協助。在大家共同的努力之下，第一屆丘成桐中學數學獎已成功地邁入最高潮。本人謹代表數學獎向每一位付出心力的朋友深深致謝。

丘成桐院士簡介

丘成桐先生，一九四九年四月四日出生於廣東省汕頭市。師事數學大師陳省身先生，為美國加州柏克萊大學博士。曾任教於美國紐約州立大學石溪分校、史丹福大學、普林斯頓高等研究院、加州大學聖地牙哥分校，現任哈佛大學講座教授兼數學系系主任。

曾獲卡迪獎、威伯倫獎、數學界最高榮譽之費爾茲獎、麥克阿瑟獎、瑞典皇家學院頒發之克瑞福特獎，及美國總統親頒國家科學獎等重要獎項。為我國中央研究院院士、美國國家科學院院士、中國科學院海外院士、俄國科學院外籍院士以及義大利國家科學院外籍院士。同時榮獲多所國內外知名大學的榮譽博士及榮譽教授，2005 年獲頒國立台灣大學名譽博士學位。

他發表超過四百篇學術論文及著作，解決許多著名的難題，開創許多新的研究方向及領域。他的研究工作主導了微分幾何及其它幾個重要數學領域過去三十年的主要發展。他的工作改變並擴展了人們對偏微分方程在微分幾何中的作用和理解，並影響了拓撲學、代數幾何、表示理論、廣義相對論以及弦理論等領域。

其中最著名者包含有 1976 年解決了幾何中的 Calabi 猜想，證明 Monge-Ampere 方程解的存在。其結論被應用在超弦理論中，對統一場論有重要影響。弦理論中四維時空以外的外在維度便是以其姓氏命名。1979 年與 R. Schoen 合作解決了廣義相對論中的正質量猜想；1980 與蕭蔭堂合作解決了刻畫射影空間的 Frenkel 猜想。1986 與 K. Uhlenbeck 合作解決了高維度的 Hermitian-Yang-Mills 方程。1996 與 Lian，Liu 合作解決鏡對稱(Mirror Symmetry)猜想。近年來他在廣義相對論中 quasi-local mass 的研究上取得了重大的突破。

丘院士在推動數學的研究與教育亦不餘遺力。他孕育超過 60 位博士以及提攜超過 10 位博士後研究員。這些學者很多都已成為一流的數學家。多年來，他也積極地向工商業界募款，在中國與香港成立數學研究中心。

在台灣，他曾協助國科會在 1997 成立國家理論科學中心，並幫助台大在 2006 成立台大數學科學中心。這兩個研究中心的成立對台灣數學的發展具有深遠的意義。

評審委員名單

于靖

國立清華大學數學系教授

教育部終身國家講座

國家理論科學中心前主任

王金龍

國立台灣大學數學系教授

丘成桐中學數學獎召集人

李瑩英

國立台灣大學數學系教授

林長壽

國立台灣大學數學系教授

中央研究院院士

臺大數學科學中心主任

林惠雯

國立台灣大學數學系教授

張鎮華

國立台灣大學數學系教授

國立台灣大學數學系系主任

頒獎流程

09:00-10:30　得獎作品陳列與觀摩

10:30-10:35　典禮正式開始，數學獎召集人啟動儀式

10:35-10:50　貴賓致詞

台灣大學陳泰然副校長

國科會李羅權主委

數學獎贊助人曾繁城先生

10:50-11:00　頒發佳作獎

11:00-11:15　頒發銀牌獎及其作品簡介

11:15-11:25　頒發金牌獎及其作品簡介

11:25-11:30　丘成桐院士致詞

11:30　頒獎典禮結束

11:30-11:40　得獎同學與貴賓及評審團合照留念

11:40-12:00　自由拍照

12:10　午餐(二樓悅香軒餐廳)

決賽作品簡介

「正三角形在正多邊形內滾動之週期關係及重心軌跡探討」
台中一中二年級 林鈺翔

「多邊形數的互換與組合」
新竹高中三年級 洪梓翔

「魔術三角形變變變」
北一女中二年級 許綺云

「A General Study of the Dating Problem」
實驗中學雙語部六年級 陳伯恩

「Bridge and Torch Problem−過橋組合的遞迴關係」
台中一中二年級 陳啟祐

「當 cos 乘在一起--探討 cosθ 的連乘積及其奧秘」
高雄女中中二年級 楊媛甯

「多邊形的尋短」
武陵高中三年級 歐翰青

「扇形內切割最大的正多邊形之性質」
建國中學二年級 蘇士唐

「正三角形在正多邊形內滾動之週期關係及重心軌跡探討」

台中一中二年級 林鈺翔

自我介紹

我是林鈺翔，就讀於國立台中一中數理資優班二年級。自從開始接受更深更多更廣的進階數學教育後，數學的簡潔清晰、條理分明就一直深深地讓我著迷不已。我對數學的熱愛終於得以在上了高中以後的數學專題課程中，撰寫成一個真正屬 於自己的研究報告，也許這篇報告就專業的研究而言還略嫌粗糙，但是我很珍惜這次參加丘成桐中學數學獎的機會，希望這份作品能得到評審教授們的青睞，也期待能夠將這股熱情在未來的日子裡發揚光大。

作品簡介

本研究主旨在分析內接於正多邊形的正三角形在其內滾動的一些有趣的特性，包含重心軌跡、固定點以及邊長與面積極值等問題。研究的流程大致上是由尺規作圖在正多邊形內作出正三角形著手，以具備最基本的作圖模式，接下來就可藉由正弦定理和餘弦定理的使用來解得正三角形邊長及面積極值出現的時機，最後借助於動態幾何軟體 GSP 的協助，先以觀察的方式大概確定其重心軌跡和固定點特性，然後再用向量幾何及解析幾何來加以嚴謹地證明。

本研究最大的特點有二：

1. 發現當內接正三角形在正多邊形內滾動時，其重心軌跡會是一個多角星形。

2. 在內接正三角形滾動的過程中，會有一個被我命名為「固定點」的特性，也就是說在其滾動的某段特定區間內，會以一 個相對應的點為軸作轉動，不同固定點之間的轉換有其規則性及循環性而且正邊形就會有 個固定點。其固定點轉換的規則簡要列舉如下(若固定正三角形的轉向為逆時針方向)：

(1)當 $n=3k(k\in N)$ 時, 固定點恆為正 n 邊形外接圓圓心

(2)當 $n=3k+1(k\in N)$ 時, 固定點在正三角形後方(靠近底邊), 且以下標以每次加 k 的順序轉換, 且轉換方向為順時針。

(3)當 $n=3k+2(k\in N)$ 時, 固定點在正三角形前方(靠近頂點), 且以下標每次加 k+1 的順序轉換, 且轉換方向為逆時針。

「多邊形數的互換與組合」

新竹高中三年級 洪梓翔

自我介紹

我的名字是洪梓翔，今年剛從新竹高中畢業，順利推甄上交大理學院。我有兩個妹妹，平常我會和妹妹一起打桌球，偶爾會彈琴與閱讀一些科普雜誌。我對於數學與物理方面感到興趣，希望未來能成為一位科學家。我曾參加第四十八屆科展，獲得地區優勝，全國佳作的成績，也參加了數學競試。參加此次活動的原因，是認為竹中不該缺席這麼盛大的活動。我很榮幸能進入此次決賽，希望能把握此次機會，擴充自己的眼界，充實自己的內涵。

作品簡介

校慶運動會中的大會操表演，由四邊形數（即正方形陣列）變換成五邊形數（即五邊形陣列）至少需要多少人？還有，原有的四邊形數和五邊形數是否可以組成一個三角形數？我們試著利用整數的性質處理卻得到不是太好的結果,最後由雙曲線的漸近線找到「連分數」的解法，比起先前的結果簡潔、漂亮許多。

整件作品分為兩大部分：互換與組合。

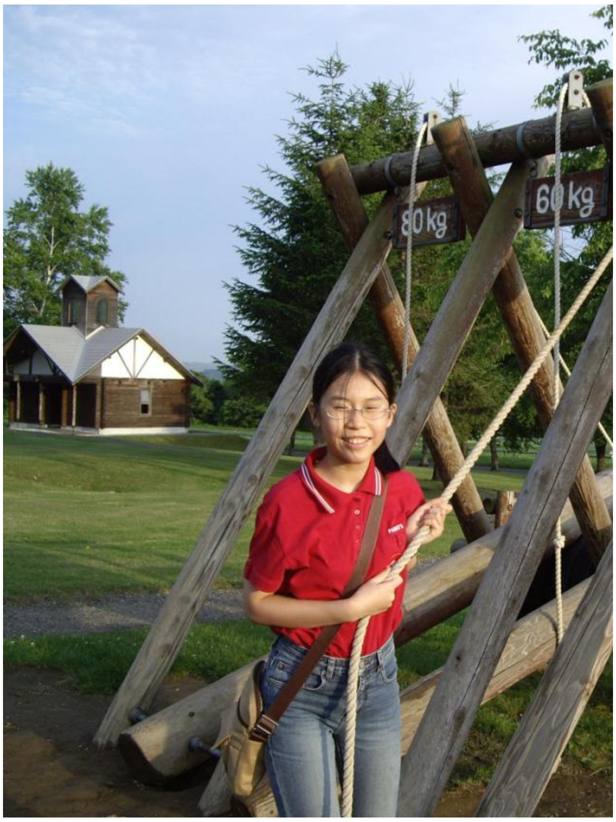
在互換部分，由於兩多邊形必可互換，我們從特例出發，歸納出一般情形，並證明了互換的通解是正確的，也對於其通解加以分析討論。這種有一組解就有無限多組解的結構有如二元一次整係數方程式的通解。

在組合部分，我們仿照探討互換的方式，從特例出發，希望歸納出一般情形的通解，但組合問題未必有解，所以我們將此部分再分為三部分探討。

我們先探討三多邊形數層數都相同，得到都是 2 層的 p 邊形數與 q 邊形數可以組成 $(p+q)$ 邊形數，或都是 3 層的 p 邊形數與 q 邊形數可以組成 $(p+q-1)$ 邊形數；接著探討三多邊形數其中兩者層數相等；最後探討三多邊形數層數都不相等，我們舉了一些例子，從中探討其通解的情形也試著找出其規律，但對於一般情形並沒有得到太好的結果，這部分是我們往後必須再努力的。

「魔術三角形變變變」

北一女中二年級 許綺云



自我介紹

我是許綺云，目前就讀北一女中二年級。數學一直是最喜歡的科目，應該跟個性有關吧！我是個容易發呆、愛胡思亂想的人，索性把這些浪費掉的時間拿來想數學，特別的是，入睡前的一刻往往最容易產生特殊的想法；其實我還有點完美主義，對書面報告的一致性總是吹毛求疵，雖然費時但想想也是值得的。而且小學到高中都幸運的遇到很好的數學老師，不僅讓我開闊了視野、也加深對數學的喜愛，對老師們的感謝實在一言難盡。

作品摘要

一、研究動機及目的：《數學傳播》第 9 卷第 2 期〈可減的魔術三角形〉中，作者討論有別於傳統魔術三角形 CT_n 的「可減魔術三角形 ST_n」。基於對此主題的興趣，探討 ST_n、完美魔術三角形 PT_n、可減魔術四面體 STe_n 的存在性、性質與建構方法，並尋找魔術差 d 的最佳上下界。如圖 1，在三角形中，若每邊有三數且數字和都是定值，為 CT_3；如圖 2，若每邊有三數且較大兩數和減最小數的差都是定值，為 ST_3； 如圖 3，若每邊有四數且較大兩數和減較小兩數和的差都是定值，為 ST_4；如圖 4，若同時是 CT_n 和 ST_n，為 PT_n。

1
6 5
2 4 3

圖 1： CT_3

9=1+6+2
=1+5+3
=2+4+3

1
6 3
2 4 5

圖 2： ST_3

7=(6+2)-1
=(5+3)-1
=(5+4)-2

2
4 1
7 3
5 8 9 6

圖 3： ST_4

6=(7+5)-(4+2)
=(6+3)-(2+1)
=(9+8)-(6+5)

10
3 2
4 5
9 8
11 1 6 7 12

圖 4： PT_5

37=10+3+4+9+11　23=(11+10+9)-(4+3)
=10+2+5+8+12　=(12+10+8)-(5+2)
=11+1+6+7+12　=(12+11+7)-(6+1)

二、研究方法：(1) 存在性：以根本原因證明「不存在」，以一般化的建構方法間接證明無限多的「存在」。(2) d 的最佳上下界：最小上界以 $\boxed{3d=[1+2+\cdots+(3n-3)]-2\times\text{減數和}+\text{頂點上三數和}}$ 求得。最大下界以猜測並用反證法證明。(3) 建構方法：利用從求 d 最佳上下界得到的資訊找到建構方法

三、研究結果：

(一)存在性：1. 當 $n\geq 3$ 才存在 ST_n　2. 當 $n\geq 5$ 才存在 PT_n　3. 當 $n\geq 4$ 且 n 是偶數才存在 STe_n

(二)當 n 是偶數，才能找到互補的兩個 ST_n 或 PT_n

(三) d 的最佳上下界：

n	ST_n	STe_n
n 是奇數	$\frac{(n-1)(n+11)}{4}\leq d\leq\frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{13}{4}$	不存在
n 是偶數	$6\leq d\leq 9$，n=4 $\frac{n(n+2)}{4}\leq d\leq\frac{3}{4}n^2-2$，$n\geq 6$	$[\frac{n(n+2)}{4},\frac{3}{4}n^2-3]\leq d\leq\frac{3}{2}n^2-4$

「A General Study of the Dating Problem」

實驗中學雙語部六年級 陳伯恩

自我介紹

我是陳伯恩，今年十三歲。我喜歡唱歌和聽流行音樂，每周六的百萬大歌星決不會錯過。我也喜歡解魔術方塊，目前最好的紀錄是 58 秒。平常喜歡上網玩遊戲。我很喜歡 Martin Gardner 的數學叢書，作者很會講數學，會讓你思考，還穿插有趣的故事情節，非常引人入勝。我也喜歡閱讀魔幻與偵探類小說，像是 Artemis Fowl 與阿嘉莎的作品等。在學校裡我喜歡和我的同學聊天開玩笑，打棒球，和玩電腦。我以後想當數學老師，啟發學生，讓他們知道數學是多麼的有趣。

作品簡介

秘書問題是一個廣為人知的問題，探討在 n 個秘書中如何找出最佳人選。故事也許如此開始，面試官必須和來應徵的秘書一一面談，並當場決定是否錄取，而且不能反悔回過頭去重新錄取以前的應徵者。目前已經證明的最佳策略，是在面試 n/e 個秘書之後，錄取後來遇到第一位最佳的人選。這問題有許多衍伸並已經過多方面的討論。我們將問題做以下的衍伸:

首先，假設我們容許面試官回頭選擇以前的面試者，回頭時有固定成功的機率。我們會導出原來的秘書問題的解，和 1/e 原則。

接下來，還會討論有兩個面試官的情況。

第一個情況，在兩個面試官中有一個面試官比較強，當兩人同時要錄取一位秘書時，比較強的那一位可以得到她。在此假設下我們會導出最好的策略和成功的機率。

另外, 我們會考慮當弱者可以選擇幫助強者，而和其成為平衡的對手，或者不幫助對手，繼續當弱者的情況，並應用前面的結果得到一個對應的策略。

「Bridge and Torch Problem–過橋組合的遞迴關係」

台中一中二年級 陳啟祐

自我介紹

我是陳啟祐，目前就讀於台中一中二年級數理資優班，藉由在高中專題課的機會，找到了有趣的題目，開始展開研究，也是我第一次踏入數學專題領域，但我與數學的邂逅絕非第一次，常常思考一些奇怪卻又美妙的數學問題，沉浸在那規律與變化交雜的數學之美中。與數學相遇，真是件獨特的樂事，也是我持續不斷研究此作品的動力，感謝蔡老師辛苦指導、教授提供研究方向、還有數學專題同學的加油打氣與相互砥礪，使得此件作品更加完善。

作品簡介

本研究主要是探討一個過橋遊戲的最佳方案的模式。

在一次最多二人過橋中，已有人探討最快、次快、最慢、次慢與最佳方案之間的關係，我們將之推廣至一次最多三人過橋。

在層層的推論下，運用反證法及修正順序與走法的方式，從中得出最佳方案所採用的幾種模式，並探索其模式的使用時機，找出模式與模式間的組合方式進而求得最佳方案。

希望我們所討論的幾種過橋模式及使用時機，能推廣運用於社會分工或電腦的資料傳輸等問題上，達到善用人力資源的目的。

「當 cos 乘在一起--探討 cosθ的連乘積及其奧秘」

高雄女中中二年級 楊媛甯

自我介紹

楊媛甯，在港都高雄長大。直到國中，才接觸到什麼叫做「研究數學」。從此，數學成為我生活的一部分。「這會不會影響課業？」有人問過。研究數學使我的思路更清晰、更有邏輯，對我來說是很大的幫助，也是讓我繼續向前的動力。上高中之後，對數學的熱情不曾減少。參加了由中山大學主辦的高高屏數學研究人才高中培育計畫，努力學習數學的知識，吸收教授們的菁華，期待有一天，能發揮一己之長。

作品簡介

在學三角函數時，必定會遇到一個題目：求$\cos 20°\cos 40°\cos 80°$的值，答案是$\dfrac{1}{8}$。明明$\cos 20°$、$\cos 40°$、$\cos 80°$都是無理數，可是乘積竟然變成一個漂亮的有理數，因此想更進一步研究$\cos\theta$的連乘積。

首先定義多項式$f_n(x)$是$\cos(n\theta)$以$x=\cos\theta$為變數所展開的多項式。在這個定義下，發展出一套特殊的方法來尋求漂亮的$\cos\theta$連乘積。考慮方程式$f_n(x)=\cos\phi$，得解$x=\cos\left(\dfrac{\phi+360°\times t}{n}\right)$ $,t=0,1,2,......,n-1$，利用根與係數關係探討其解的連乘積，透過不同的n值找出多組方程式的根的連乘積，便得$\prod_{k=1}^{89}\cos k°=\dfrac{3\sqrt{10}}{2^{89}}$。此外還找到$\cos 1°$、$\cos 2°$、⋯、$\cos 89°$個別滿足的有理係數方程式之最低次數，更進一步發現：當特定m個整數角度為一組公比為 2 的等比數列時，會使得$\cos\theta$連乘積為$\dfrac{1}{2^m}$或$-\dfrac{1}{2^m}$，即$\prod_{k=1}^{m}\cos\left(\alpha°\cdot 2^{k-1}\right)$ $=\dfrac{1}{2^m}$或$-\dfrac{1}{2^m}$，這樣漂亮的角度組合我稱之為「二倍循環角」。

關於二倍循環角，我先由整數角度出發，共找到五組二倍循環角。再往非整數角度發展：當n為奇數（$n=2k+1$）時，由方程式$f_n(x)=\cos\pi$的根可以得到一組餘弦值連乘積：

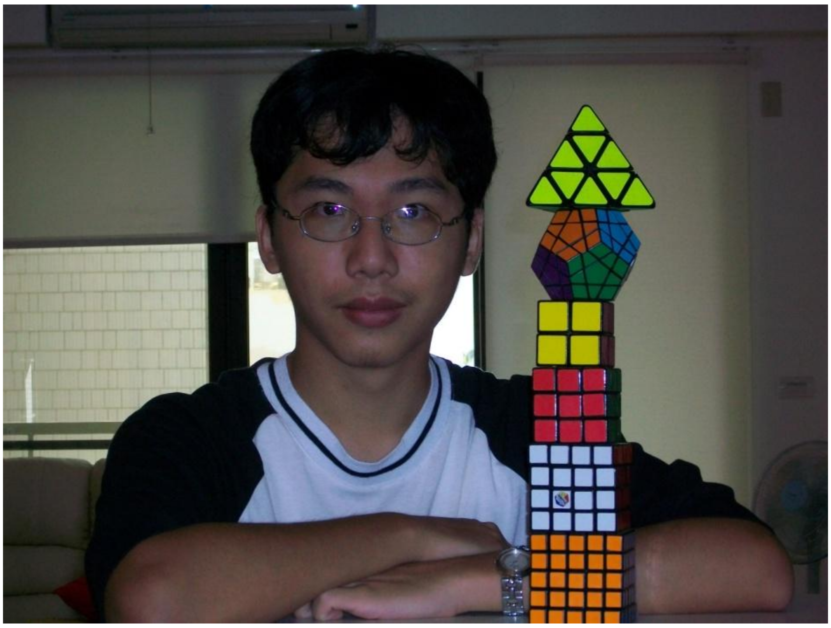
$$\cos(\frac{1}{2k+1}\pi)\cdot\cos(\frac{2}{2k+1}\pi)\cdot\cos(\frac{3}{2k+1}\pi)\cdot......\cdot\cos(\frac{k}{2k+1}\pi)=\frac{1}{2^k}\text{ 。}$$

此式是由一組或多組二倍循環角餘弦值連乘積所組成，可由此來找出二倍循環角的特性，並發現三角函數與代數之間的巧妙連結。

接著由二倍循環角繼續延伸，觀察三倍、四倍、⋯⋯、r倍循環角，並整理出其特性。僅建構在根與係數的關係上，就能做出這些成果，希望這篇作品能帶給您對數學的喜悅。

「多邊形的尋短」

武陵高中三年級 歐翰青



自我介紹

喜歡思考、愛好數學，但同時又酷愛著閱讀文學的 17 歲少年，雖然數學的各個領域都存在有趣的題目，不過當初著迷的起因果然還是幾何吧，這次參加丘成桐數學獎也是以這個領域入選的，抱著近乎盡人事，聽天命的心情參加決賽，但因為對自己作品的喜愛還是想拿到最佳成績。

作品簡介

這份作品主要討論凸 n 邊形內接最小 n 邊形是否有解、有解的條件與作法及無解時會趨近於何種圖形。

首先我先嘗試證明了原始題目以了解它的概念，然後思考鈍腳三角形與直角三角形的情況，隨後證明其無解且會趨近於何種圖形，到此大概擬定了推廣到 n 邊形時的研究方向。

在研究四邊形的過程中，我一開始找了幾個特例（如等腰梯形等）使用了「鏡射法」，發現圓內接四邊形有些情況的解，並在思考過後找出了有解的條件，而且發現有無限多組解，而非圓內接在嘗試了菱形等特例後，利用了「趨近法」證明了此種情況不可能有解，再由「鏡射法」中的「卡點連線」導出了在何種情況會趨近於何圖形。

而推廣到偶數邊形時，發現其結論跟四邊形差不多，只是在偶數邊形時必須要鏡射 $n-1$ 次後才能判定圓內接的情況是否有解。至於奇數邊形，則推出了一組跟其內接最小奇數邊形有關的 n 個角度的方程式，而這組方程式的每一個角都有範圍限制，同時每一個角都能用原來奇數邊形的各個角來表示，由此推導出了其有解條件與無解時會趨近於何種圖形，同時還發現將此式帶回三角型恰能應證之前所推出的結論(即只有銳角三角形有解)。

「扇形內切割最大的正多邊形之性質」

建國中學二年級 蘇士唐

自我介紹

我是蘇士唐，目前是高二升高三的學生。我的興趣是打橋牌、閱讀、下棋和作數學題目。我喜歡有挑戰性的遊戲，討厭一成不變的生活。目前心力主要會放在課業上，希望學測能考上理想的學校。

作品簡介

此研究主要在探討如何在一個圓心角為銳角的扇形內切割出面積最大的正 n 邊形。

先探討一些較特殊化的正多邊形，選定並完成了對三角形、正方形、正六邊形的探討，求得在圓心角為銳角的扇形內切割出最大面積的方法(它們在扇形中的擺放方式)。而這部分研究主要是藉著使用正、餘弦定理，建立複數座標系及綜合幾何等方法完成的。

接著是希望把結果一般化推廣到正 n 邊形的狀況，這部分有一個關鍵的轉折：原本做法是在扇形中找到一個面積最大的正 n 邊形，但現在我們固定正 n 邊形，找一個最小的扇形來包覆它。

由於探討過的正多邊形中面積最大的情形都有四個頂點在扇形之邊及弧上，因此我做了猜測，猜測銳角扇形內切割出的最大正 n 邊形都具有這樣的性質

為了證明我的猜測，在正 n 邊形的部分我們求出了它被包覆的種類數目，且可以明確地分成兩類狀況討論，第一類的狀況下，可以使用原本複數座標來求得最大正 n 邊形的擺放法，而另一類的結果則是將其面積函數求導數後得出面積最大時之擺放法。兩者都滿足我的猜測，因此得證：銳角扇形內切割出的最大正 n 邊形至少有四個頂點在扇形之邊及弧上。

附錄：2009 年丘成桐中學數學獎第一次說明會會議記錄

時間：2009 年 2 月 3 日 13:30 - 3:00
地點：台大數學系新數館 308
會議主持人：張鎮華教授、林長壽教授、王金龍教授

出席人員：周韞維校長(北一女)、陳偉泓校長(麗山高中)、吳榕峰校長(實驗高中)、楊蔚老師(武陵高中)、江青山老師(新竹高中)、林建任組長(高雄女中)

本獎簡介：
張鎮華教授、林長壽教授、王金龍教授依序作簡短介紹：以丘成桐院士之名設立本獎，目的為培養學生獨立研究的能力 ... (以下省略)

說明會問與答：
1.周校長(北一女)：是否一定要以個人參賽?
　　張鎮華教授：本獎設立目的在於發展學生獨立研究的能力以及給於學生自由選擇之機會，因此規定只能個人參賽，使高額獎金能發揮應有之功效。(註：旺宏亦不可團體參賽，但國際科展可以。)

2.周校長(北一女)：得過獎的作品是否可以參賽？
　　王金龍教授：基本上已經得過獎的作品不會獲得本獎，但若作品有更新、更深的進展則另當別論。另外，學生的作品在未得獎以前，可以參與不同的競賽，但若同時得獎，學生則必須自行取捨。

3.周校長(北一女)：主辦單位為？
　　張鎮華教授：台大數學系主辦。

4.周校長(北一女)：是否可以找教授為指導老師？
　　王金龍教授：本獎評審方式極為注重原創性，故以中學老師從旁指導即可，讓學生能自行發展。

5.陳校長(麗山高中)：丘成桐數學獎是否能鼓勵一些只專注數學，其他學業卻平平，或者比較沒有機會接觸更深入數學的學生？
　　王金龍教授： 如同之前所述，本獎評審重點為原創性，故所用數學深淺並不是問題。對於只專注數學的學生，由於本獎並非教育部所辦，對於得獎學生無法保送，但若得獎學生能達到教育部所設最低門檻，來本系申請或推甄，本系必定會優先選取。

6.陳校長(麗山高中)：是否能辦營隊，讓學生有機會接觸數學更深？

　　張鎮華教授： 對於進入複賽的學生，我們會邀請其參加台大數學系的暑期活動。

7.吳校長(實驗高中)：是否能對高中數學老師也舉辦說明會？

　　王金龍教授： 分區說明會的主要邀請對象即為高中數學老師以及學生。

8.江青山(新竹高中)：丘成桐中學數學講與國際科展有何不同？

　　王金龍教授： 本獎設立目的是為鼓勵中學生投入數學研究，因此希望得獎學生能繼續念數學系，與科展得獎學生可以選擇任何科系不同。另外，本獎必須獨立參賽，而國際科展可以團隊參賽。

9.江青山(新竹高中)：參賽的時間與學測的時間太過接近，會否讓學生無從準備？

　　王金龍教授：參賽為長期的研究過程，學生平時就必須投入，因此短期的學測並不會帶來太大影響。

10.周校長(北一女)：希望能鼓勵女性，是否能讓評審中有女性教授？

　　張鎮華教授： 本獎亦希望如此，目前已積極邀請女性教授參與本獎。

11.林建任教學組長(高雄女中)：高雄女中亦有相關數學活動，是否能請台大數學系教授蒞臨指導？

　　王金龍教授：本系對於此種活動，傾向能以高中老師直接聯繫國內數學系是何之教授指導為主。另外，若學校有兩件以上的得獎作品，則本系會主動連絡學校，詢問是否有數學相關活動需要支援。

附記：

1. 本獎評審團於 3 月初分別於建中，北一女，新竹實驗中學，台中一中以及高雄女中舉行共 5 場分區說明會。

2. 評審團有台大李瑩英教授與林惠雯教授為女性評審。

3. 本獎委員會於 3 月 28 至 3 月 29 在台大舉辦台大數學營。邀請王金龍教授、于靖教授以及丘成桐院士做專題演講以及與學生座談。於 7 月 17 決賽日當天同時舉辦丘成桐數學營。邀請張海潮教授談如何做研究，齊震宇教授介紹丘成桐與當代數學，以及丘院士本人擔任與大師座談主講人。