

蘭陽女中數學科研習通知

這是一個千載難逢的機會能面對一流數學家，也許您不太懂數學有何魅力，聽完此人演講之後，會重新點燃您的數學求知慾；如果您略懂數學，王教授將引導您進入繽紛的數學世界裡；如果您曾是數學資優生，更不可錯過此場美麗的知識饗宴，歡迎蘭陽地區愛好數學的朋友們一起來共襄盛舉。

演講者：王金龍教授

時間：92.10/15 週三（13：30—16：30），13：20 入場

演講主題：第一場—學習數學心得；如何學好高中數學；如何做數學研究（13：30—15：00）

第二場—高中數學中代數與幾何的連結；圓錐曲線的退化概念（15：20—16：30）

地點：蘭陽女中圖書館 5F 演講廳（宜蘭市女中路 2 號）。

王金龍教授簡介（數學界的明日之星）

學歷：民國 57 年生，79 年國立台灣大學學士，87 年美國哈佛大學博士，目前任職清大數學。

專長：微分幾何、代數幾何。

榮譽事項：1. 國科會傑出研究獎（89 年度）

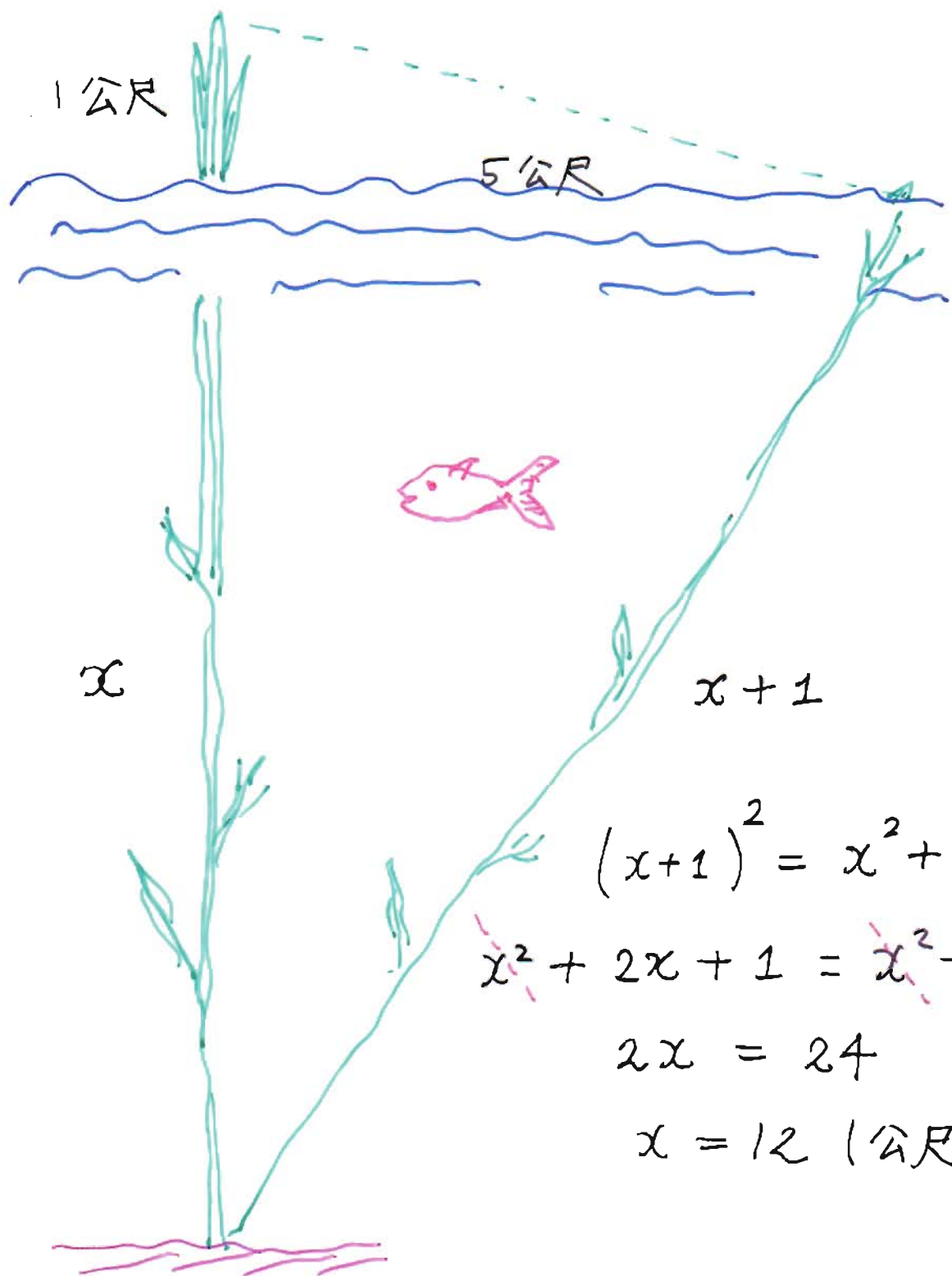
2. 晨興數學獎銀獎得主（90 年度）

3. 吳大猷先生紀念獎（91 年度）

歡迎各位蒞臨指導

蘭陽女中數學研討會敬邀

湖有多深？



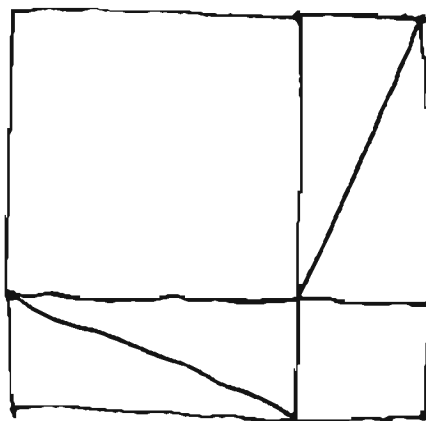
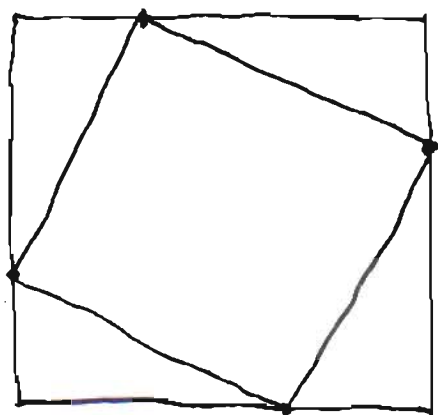
$$(x+1)^2 = x^2 + 5^2$$

$$\cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + 25$$

$$2x = 24$$

$$x = 12 \text{ (公尺)}$$

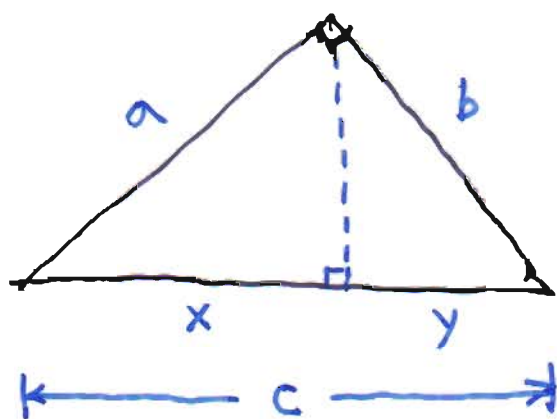
畢氏定理 (文明的起源)



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

||

$$\text{全面積} = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

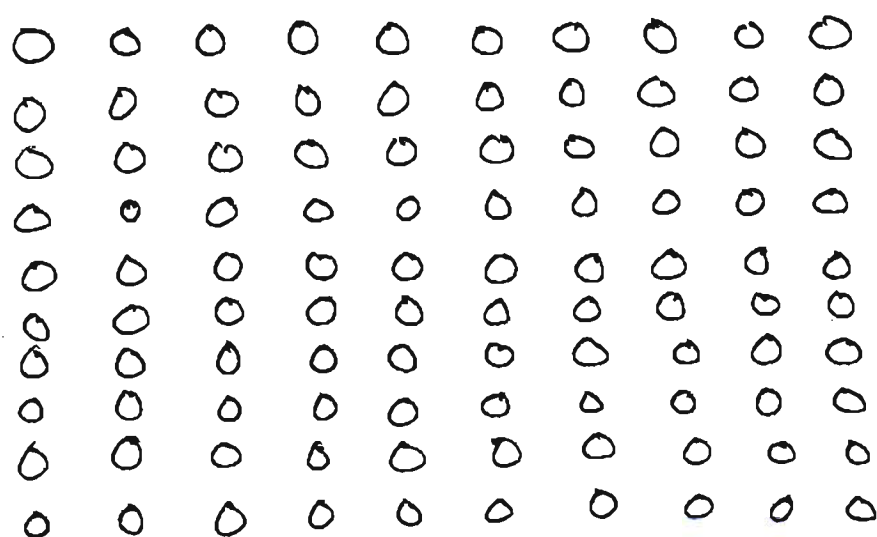


$$\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$$

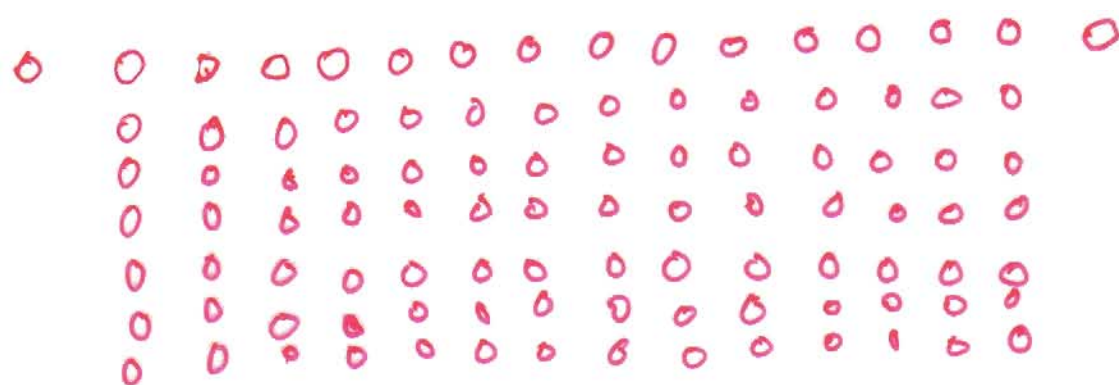
$$\frac{c}{b} = \frac{b}{y}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= cx + cy \\ &= c(x+y) = c^2 \end{aligned}$$

誰會取得勝利？



兩人對局，每次最少取一子，
最多取六子，取最後一子者敗，
求「必勝法則」。



$$100 - 1 = 99$$

$$99 = 7 \times 14 + 1$$

故先取者先取一子必勝。

中國剩餘定理 (同餘數理論)

韓信點兵

有兵約二百，
三人一伍餘一人，
五人一伍餘一人，
七人一伍亦餘一人，
問兵有多少？

解：「

三人同行七十稀
五樹梅花二一枝
七子團圓月正半
除百零五便得知」

數學究竟是什麼？

求 360 的正因數個數及其總和

1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 15 18 20

30 36 40 ... 60, 120, 360

所謂的「標準解答」

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 360} \\ 2 \overline{) 180} \\ 2 \overline{) 90} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

因數個數

$$= (3+1) \times (2+1) \times (1+1)$$

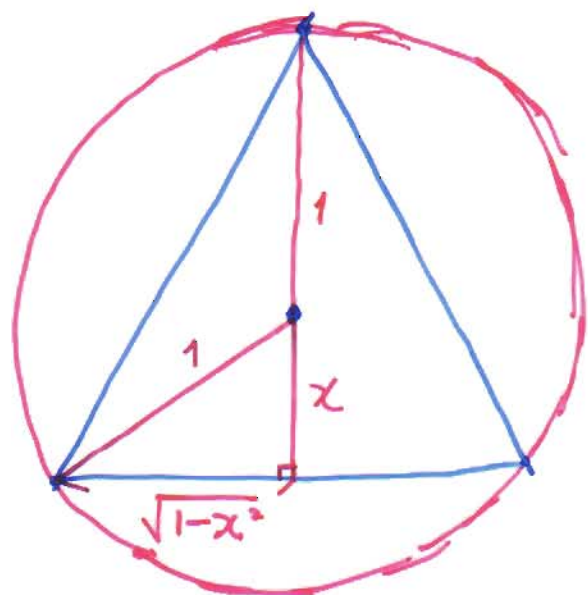
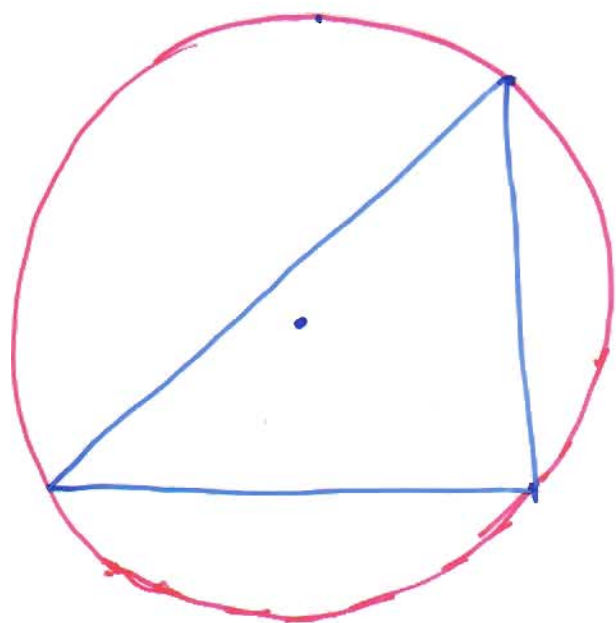
$$= 4 \times 3 \times 2 = 24$$

因數總和

$$= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1 + 3^2) \times (5^0 + 5^1)$$

$$= 15 \times 13 \times 6 = 1170$$

求單位圓內具最大面積之三角形

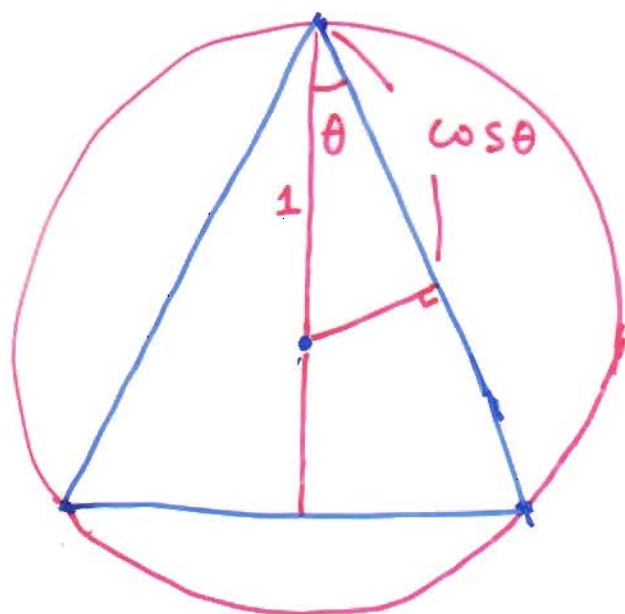


面積函數

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} (1+x)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= A(x)^2 = (1-x^2)(1+x)^2 \\ &= (1-x^2)(1+2x+x^2) \\ &= 1+2x-2x^3-x^4 \end{aligned}$$

$$B'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2 \quad ; \quad x = \frac{1}{2} \text{ 為根}$$



$$A(\theta) = \frac{1}{2} (2 \cos \theta)^2 \times \sin(2\theta)$$

$$= 4 \cos^3 \theta \cdot \sin \theta$$

已知 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

欲使用 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

"=" 成立 $\Leftrightarrow a=b=c=d$

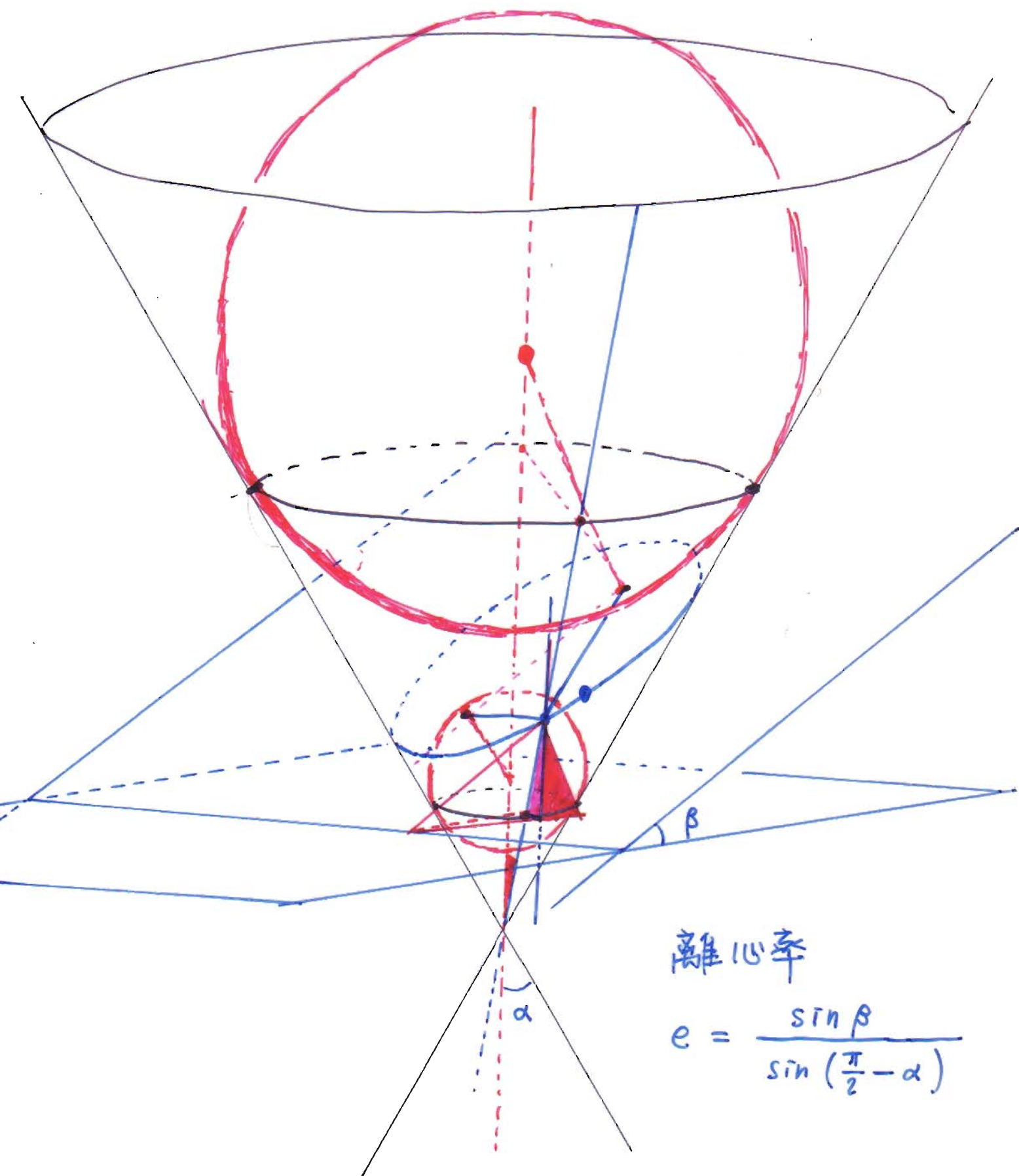
(Proof: $\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}$

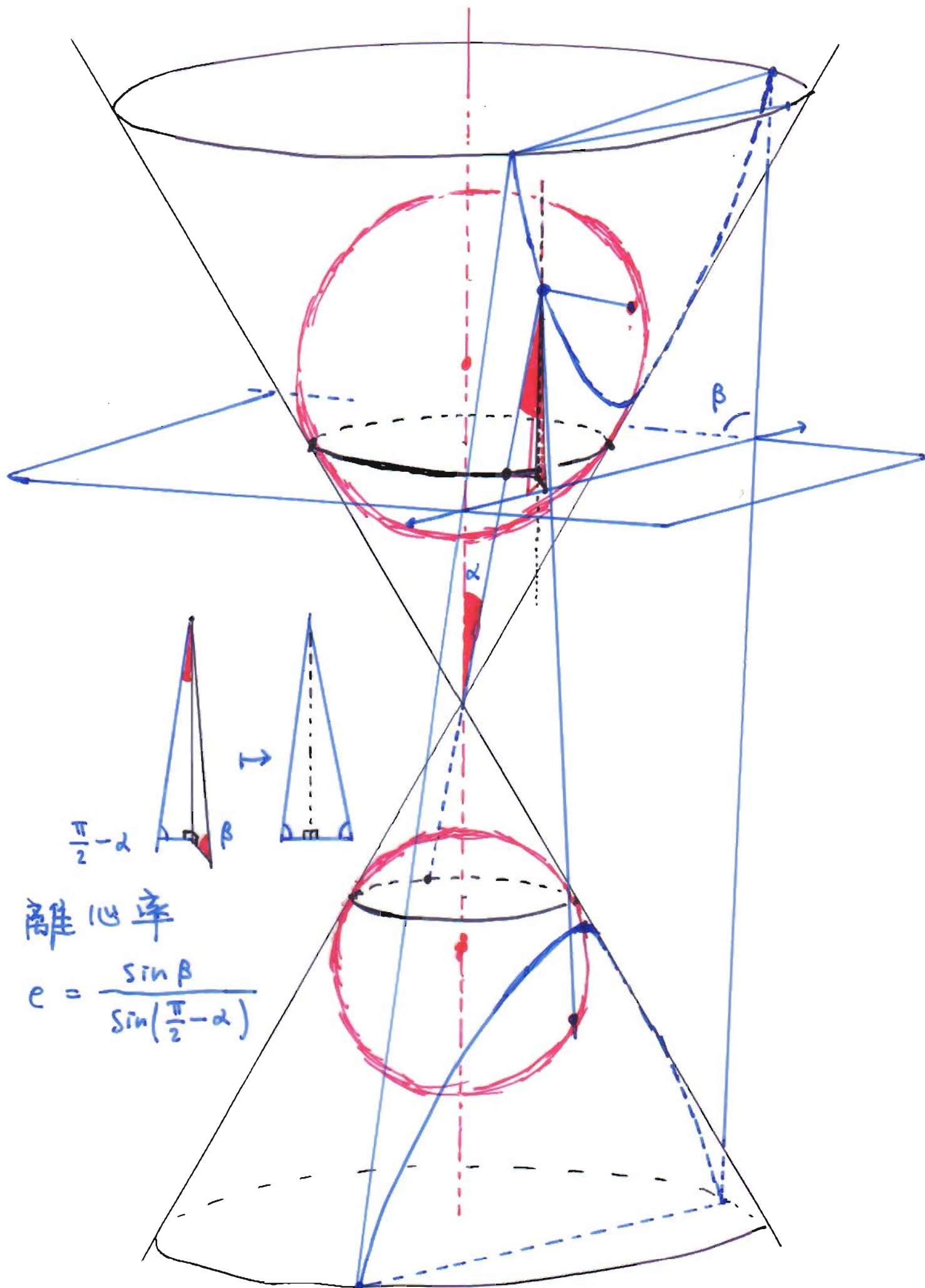
$$\geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \quad \square)$$

$$1 = \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

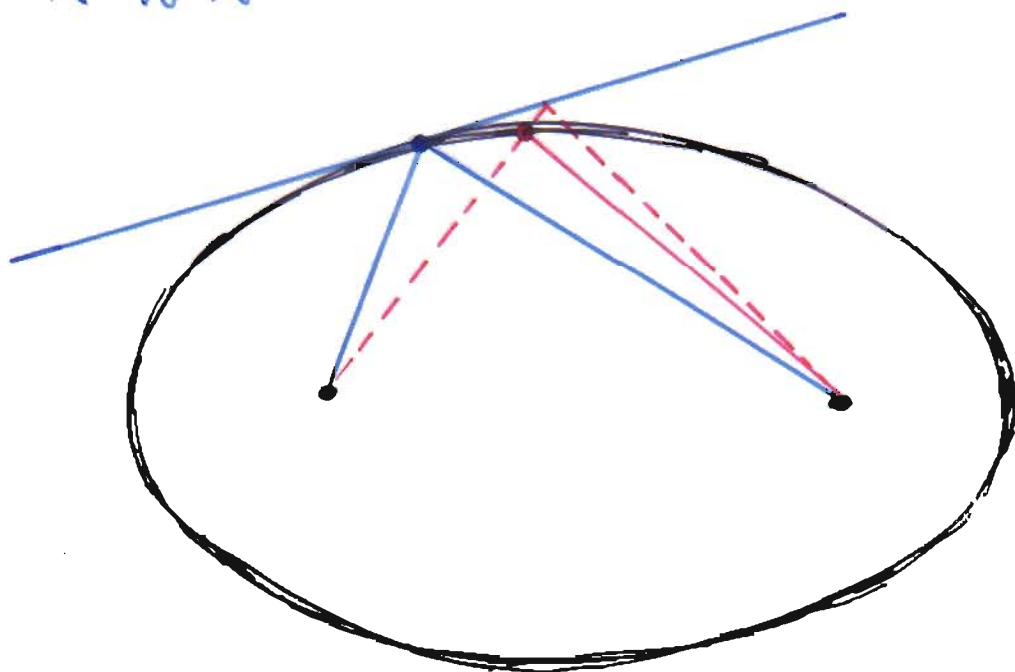
$$\geq 4 \sqrt[4]{\frac{1}{27} \cos^6 \theta \cdot \sin^2 \theta}$$

"=" $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad \square$

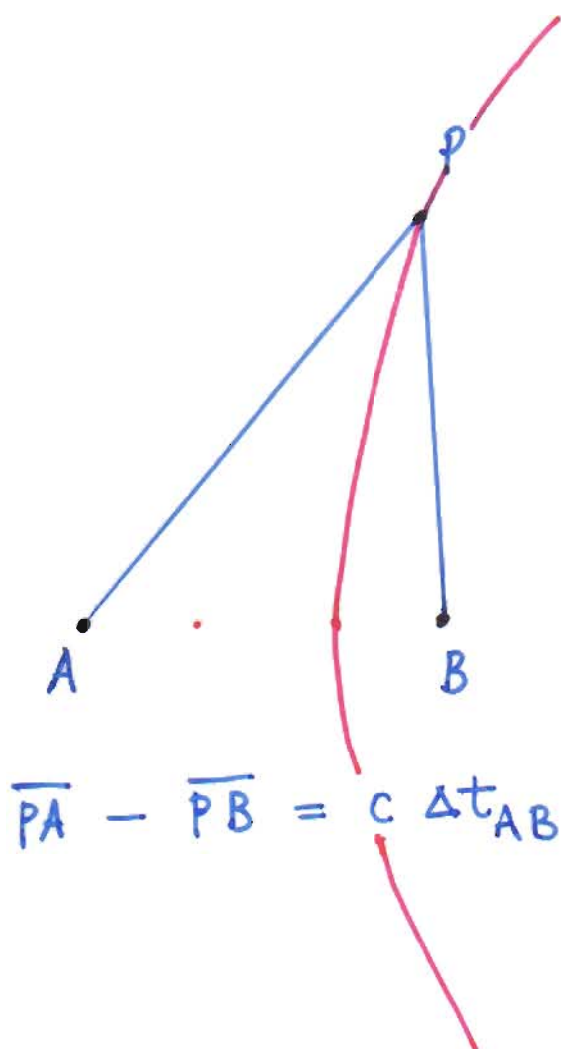




反射原理

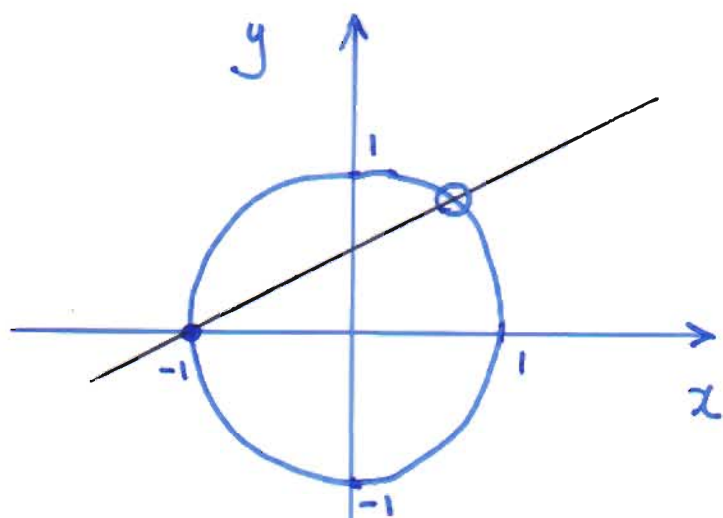


LORAN 遠距電子探測器 (雷達)



二次方程的所有整數(或有理數)解

$$x^2 + y^2 = 1$$



斜率

$$t = \frac{y}{x+1}$$

$$\text{即 } y = t(x+1)$$

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

$$(t^2+1)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

$$[(t^2+1)x + (t^2-1)] \cdot [x+1] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (\text{或 } x = -1)$$

$$y = t \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \quad (\text{畢氏整數解})$$

$$X = p^2 - q^2, \quad Y = 2pq, \quad Z = p^2 + q^2$$

退化的高次曲线

$$r = \sin 3\theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\Rightarrow r^4 = r \sin \theta (3r^2 - 4r^2 \sin^2 \theta)$$

$$= y^{\cancel{x}} (3(x^2 + y^2) - 4y^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = y(3x^2 - y^2)$$

$$\text{令 } y = tx$$

$$\Rightarrow (t^2 + 1)^2 x^4 = tx(3x^2 - t^2 x^2)$$

$$= tx^3(3 - t^2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{t(3-t^2)}{(t^2+1)^2} \quad (\text{或 } \cancel{x} \quad x=0)$$

$$y = \frac{t^2(3-t^2)}{(t^2+1)^2}$$



其它的例子

$$\bullet \quad dx^2 - y^2 + 1 = 0. \quad (d \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2). \quad (a \in \mathbb{Z})$$

向量的运算

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}) \vec{b} - (\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}) \vec{a}$$

向量的微分

$$(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t))' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}'$$

$$(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t))' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'$$

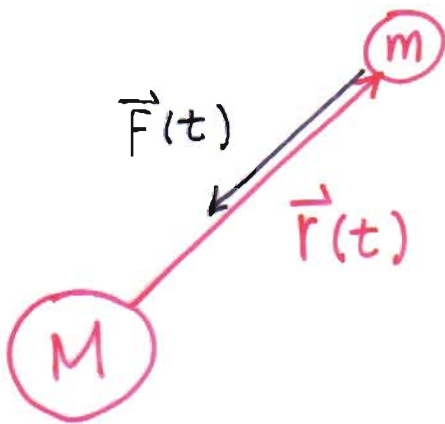
中心力場 $\vec{F} \parallel \vec{r}$

⇒ 角動量守恒

$$(\vec{r} \times \vec{r}')'$$

$$= \vec{r}' \times \vec{r}' + \vec{r} \times \vec{r}'' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}/m \parallel \vec{r}$$



$$\vec{l} := \vec{r} \times \vec{r}' \quad \text{常向量} \perp \vec{r} \text{ 和 } \vec{r}'$$

⇒ 平面運動

面積速率恆

牛頓重力理論

$$-\frac{GMm}{r^3} \vec{r} = \vec{F} = m \vec{a} = m \vec{r}'' \quad \star$$

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \Rightarrow r r' = \vec{r} \cdot \vec{r}'$$

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)' = \frac{\vec{r}' r - \vec{r} r'}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^3} (\underbrace{r \cdot r}_{\text{scalar}} \vec{r}' - \underbrace{r \cdot r'}_{\text{scalar}} \vec{r})$$

$$= \frac{1}{r^3} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}' - (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}]$$

$$= \frac{1}{r^3} (\vec{r} \times \vec{r}') \times \vec{r}$$

$$= -\frac{1}{GM} (\vec{r} \times \vec{r}') \times \vec{r}'' \quad \text{by } \star$$

$$= -\frac{1}{p} [(\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}'}_{\text{常向量}}) \times \vec{r}']'$$

常向量 = $\vec{e}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{p} (\vec{r} \times \vec{r}') \times \vec{r}' = \text{常向量 } \vec{e}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + \frac{1}{p} [(\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}'}_{\parallel} \times \underbrace{\vec{r}'}_{\parallel}) \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\parallel}] = \vec{e} \cdot \vec{r}$$

$$(\underbrace{\vec{r} \times \vec{r}'}_{\parallel}) \cdot (\underbrace{\vec{r}'}_{\parallel} \times \underbrace{\vec{r}}_{\parallel})$$

$$\vec{l} \cdot (-\vec{l}) = -l^2$$

$$\Rightarrow r - \frac{l^2}{p} = er \cos \theta$$

$$r(1 - e \cos \theta) = \frac{l^2}{p}$$

$$\text{i.e. } r = \frac{l^2/p}{1 - e \cos \theta}$$

離心率 e 之二次曲線

$$\frac{r}{L - r \cos \theta} = e$$

