

何謂高中數學？

教材, 競試, 科展, 科學競賽, 面面觀.

2004 年 1 月 5 日於新竹高中

國家理論科學中心

王金龍

何謂數學？

數學是人類心智的一種表現，它反映出人類具有堅強活潑的意志，慎思明辨的理性，以及追求完美的意願。其基本要素是邏輯和直覺，解析和建構，概括和分殊。雖然不同的傳統，可能強調不同的方面，但是唯有這些反對力量的交互作用，以及他們互相綜合的努力，才能提供數理科學以生命，效用，和崇高無比的價值。（取自 Courant: What is Mathematics.）

中學數學教育的目標

1. 引導學生瞭解數學的「內容」，「方法」與「精神」.培養學生使用數學方法思考問題的素養與能力.
2. 增進學生的基本數學能力,奠定學習相關學科的基礎. 提供學生在「實際生活」與「未來生涯」所需的數學知能.
3. 培養學生欣賞數學內涵「簡明有效」及結構「嚴謹優美」的特質.

數學的基本內容

代數

幾何

分析

機率與統計

數學的基本方法

演算法

邏輯推理

歸納法

創造概念

數學的基本精神

內涵

簡明-有效

結構

嚴謹-優美

Part I: 教材與教學篇

教育部中教司現行高中教材大綱

第一年：基礎概念，數與坐標系，數列與級數，多項式，指數與對數，三角函數的基本概念，三角函數的性質與應用。

第二年：向量，空間中的直線與平面，一次方程組與矩陣的列運算，圓與球面，圓錐曲線，排列、組合，機率與統計(I)。

第三年：機率與統計(II)，平面上的坐標變換，矩陣，不等式，極限的概念，極限的應用。

1.1 基礎概念

1. 簡單的邏輯概念：利用國中平面幾何知識來介紹簡單的邏輯概念—包含充分條件，必要條件、充要條件及反證法的例子.
2. 集合的基本概念：集合的表示法，屬於，交集，聯集，子集，補集，以將來要用到的實例為主，不涉及抽象的集合.
3. 函數的基本概念：以變量的對應關係說函數的意義.

1.2 數與坐標系

1. 整數：含因數,倍數與輾轉相除法.
2. 有理數與實數：介紹無理數如 $\sqrt{3}$, π 等.
3. 平面坐標系：複習平面坐標系, 並介紹直線方程式與斜率.
4. 複數與複數平面：介紹 i 的由來 (含一元二次方程式根的討論, 特別是判別式小於 0 之情形), 複數的四則運算, 複數平面只是強調一一對應關係.

1.3 數列與級數

1. 等差級數與等比級數: 含數列的基本概念。
2. 無窮等比級數與循環小數: 這裡先給學生一些最基本的極限概念。
3. 數學歸納法: 主要在教「數學歸納法」這個方法，及用來歸納並證明一些級數的和並引進遞迴數列的例子。

1.4 多項式

1. 多項式的四則運算：含綜合除法.
2. 餘式定理、因式定理：含整係數多項式的一次因式檢驗法.
3. 最高公因式與最低公倍式：利用輾轉相除法求最高公因式.
4. 多項函數：包含一次，二次函數圖形.
5. 多項方程式：含代數基本定理，勘根定理與實係數多項方程式虛根成對定理.
6. 多項不等式：利用因式分解來解不等式並與圖形相配合.

1.5 指數與對數

1. 指數.
2. 指數函數及其圖形.
3. 對數.
4. 對數函數及其圖形: 說明反函數的意義及其圖形.
5. 查表, 內插法: 可用電算器求出指數函數與對數函數的值.

1.6 三角函數的基本概念

1. 銳角三角函數.
2. 三角函數的基本關係: 倒數關係, 平方關係, 商數關係, 餘角關係.
3. 簡易測量與三角函數值表: 可用電算器按出三角函數值.
4. 廣義角的三角函數.
5. 正弦定理與餘弦定理.
6. 基本三角測量.

1.7 三角函數的性質與應用

1. 三角函數的圖形：含弧度.
2. 和角公式.
3. 倍角, 半角公式.
4. 和, 差與積的互化.
5. 正餘弦函數之疊合.
6. 反三角函數的基本概念.
7. 複數的極式.

2.1 向量

1. 有向線段與向量: 含向量的加法, 減法, 係數積與內積等運算.
2. 向量的基本應用: 如三角形兩邊中點連線定理, 平行四邊形定理, 向量在平面幾何證題上的應用.
3. 平面向量的坐標表示法: 含加法, 減法, 係數積等運算以及分點坐標, 直線的參數式.
4. 平面向量的內積: 含柯西不等式, 正射影, 兩直線的夾角, 點到直線的距離.

2.2 空間中的直線與平面

1. 空間概念: 空間中直線與直線或直線與平面, 平面與平面的位置關係.
2. 空間坐標系.
3. 空間向量的坐標表示法: 含加法, 減法, 係數積, 內積等運算.
4. 平面方程式: 含法向量, 平面的夾角, 點到平面的距離.
5. 空間直線方程式: 含直線的參數式, 點到直線的距離、平行線的距離, 不相交直線的公垂線長.

2.3 一次方程組與 矩陣的列運算

1. 一次方程組的解法與矩陣的列運算：含高斯消去法.
2. 行列式：限二階與三階，含行列式的基本性質及用行列表示面積與體積.
3. 克拉瑪公式：限二元，三元.

2.4 圓與球面

1. 圓的方程式.
2. 圓與直線的關係.
3. 球面方程式.
4. 球面與平面的關係.

2.5 圓錐曲線

- 1.拋物線:方程式只介紹標準型式。
- 2.橢圓:方程式只介紹標準型式。
- 3.雙曲線:方程式只介紹標準型式。
- 4.圓錐曲線與直線的關係:含光學性質。

附記: 在國中我們已大量減少了古典平面幾何以及證明的訓練. 在高中我們也就無法去見證古代人如何發現圓錐曲線. 也沒有如阿波羅圓之類的好題材.

2.6 排列、組合

1. 集合元素的計數：含排容原理.
2. 乘法原理，加法原理.
3. 排列.
4. 組合.
5. 二項式定理：以組合導出，並可視為數學歸納法的一個應用.

2.7 機率與統計(I)

1. 樣本空間與事件.
2. 機率的性質.
3. 數學期望值.
4. 統計抽樣: 意義與功用, 介紹簡單隨機抽樣方法, 並說明收集資料應注意事項.
5. 次數分配表與累積次數分配曲線: 含離散及連續數據次數分配圖表編製方法, 配合圖表解釋常態分配的意義與性質.
6. 平均數: 含算術平均數, 中位數, 眾數, 幾何平均數及適用時機.
7. 離差: 含全距, 四分位差及標準差的意義及解釋.

3.1 機率與統計 (II)

1. 條件機率與貝氏定理.
2. 獨立事件.
3. 變異係數: 重視意義及解釋。
4. 相關係數: 含散佈圖, 係數計算與解釋, 數據集中直線趨勢以最小平方方法之決定係數表示, 不必出現高, 中, 低相關的內容。

3.2 平面上的坐標變換

1. 平移.
2. 旋轉.
3. 二元二次方程式的圖形.

3.3 矩陣

1. 矩陣的加法與數積：強調矩陣的意義，多用實例說明.
2. 矩陣的乘法及其意義：含乘法的代數性質，轉移矩陣 (**transition matrix**) 多用實例說明含反方陣.
3. 二階方陣所對應的平面變換：旋轉、鏡射、伸縮、推移 (**shear**) .

3.4 不等式

1. 絕對不等式（證明不等式）：柯西不等式, 算幾不等式, 應用實例.
2. 條件不等式（解不等式）：利用代數方法, 幾何方法（圖形），以及絕對不等式求極大, 極小.
3. 線性規劃：只限二元.

3.5 極限的概念

1. 數列的極限：以數線上的變動，直觀說明即可。
2. 函數的極限：多舉多項函數，有理函數為例，以圖形說明左，右極限。
3. 連續函數：僅以圖形說明概念，含多項方程式的勘根定理。

3.6 極限的應用

1. 導數的基本概念.
2. 多項函數的導數: 介紹 $f'(x)$ 這個符號, 但不介紹 dy/dx .
3. 函數的遞增與遞減: 以一階導數判別.
4. 極值問題.
5. 曲線下的面積: 用極限來求, 當作極限的應用, 以一次函數, 二次函數為例, 不出現積分符號.

教學方法

1. 教學時應以教導學生整體觀念與方法為導向, 避免強調零碎知識的背誦或記憶。
2. 教學活動除了以演講式講解外, 應視各單元之需要, 以討論, 問答, 操作等交互運用, 以啟發學生的思考與創造能力。
3. 教師應隨時注意培養學生的邏輯思考能力, 加強推理方面的訓練。
4. 教學過程中宜透過引導與啟發, 使學生形成解決問題所需的數學觀念, 過程, 技能和科學態度. 教師應避免過早提出解題方法與結論, 且不宜作機械式的解題訓練。

5. 教學時應依據學生個別差異, 設計教學活動, 鼓勵學生主動參與. 培養完整的學習成就感, 並啟發其學習與研究數學的興趣.
6. 教師應儘量提供適合學生程度的有趣數學問題, 以提高學生的學習興趣.
7. 教師應使用各種方法使每個學生都樂於上數學課, 並使學生對自己的能力有信心.
8. 教師上課時不宜補充超越學生程度之難題或過多之題目.

教具及有關教學設備

1. 為增進學習效果, 各校應充實各種數學教具模型, 電腦, 影帶等教學設備, 並鼓勵老師與學生使用.
2. 各校宜設置數學資源教室, 提供老師教學與研究之資料.。
3. 配合各單元之需要, 教學時應選用或自製各種教學媒體或操作性教具.

教學評量

1. 評量方式除紙筆測驗外,應配合單元目標採用討論觀察、口頭回答,實際操作,專題研究等方式.
2. 在教學過程中隨時採用各種評量方式評量學生的學習狀況,以便調整教學策略,提高教學效果.
3. 定期評量或平時測驗命題時,宜針對教學目標與教材內容,考慮試卷的信度與效度. 試題內容與難度應顧及所有應考學生的程度.
4. 除了選擇題與填充題外,宜多利用計算,證明,作圖,應用等題型,以評量學生學習情況,並培養學生的表達能力.

Part II: 數學競試

高中數學競試的變革

奧林匹克數學競試

數學競試與基礎人才之培育

數學競試與數學研究的關係

High School Algebra?

Part III: 科學展覽

高中科學展覽的意義
我們期待看到怎樣的作品？
評審的標準與公平性
一個 1985 實例探討
「一流高中」數學教師的挑戰

丙、多變數聯立方程組實數根的逼近：

若 $f(x, y) = 0$ 為曲線 Γ_1 ， $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 即聯立方程組之根。
 $g(x, y) = 0$ 為曲線 Γ_2

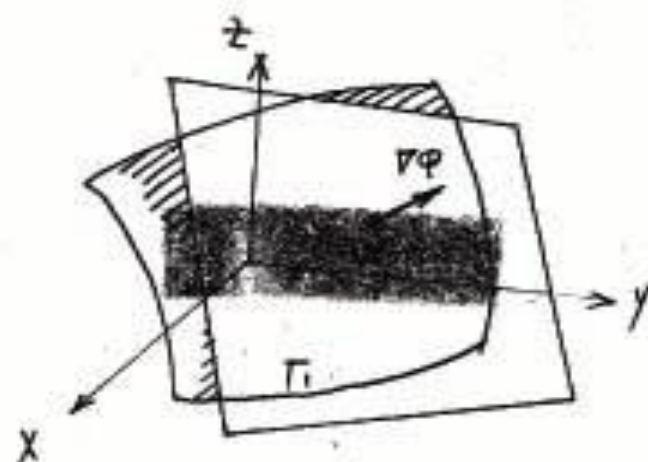


圖 10

設 $\varphi = f(x, y) - Z$ ，則

$$\nabla \varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = (f_x, f_y, -1)$$

$Z = f(x, y)$ 為 φ 之零等高面，

由於 $\nabla \varphi \perp$ 等高面，

故 (x_0, y_0, z_0) 上之切平面方程

為： $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\cdot (f_x, f_y, -1) = 0$$

令 $Z = 0$ ，得到在 $x - y$ 平面上之線： $f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) = -z_0 = -f$

※上式中， f, f_x, f_y 均在 (x_0, y_0, z_0) 取值。

同法用在 $g(x, y)$ 上，得線方程： $g_x(x - x_0) + g_y(y - y_0) = -g$ 解聯立方程組，求 (x, y) ，用以逼近 Γ_1, Γ_2 之交點：

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \text{ 記 } [J_0] = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}, J_0 \text{ 爲}$$

Jacobian 行列式，若 $J_0(x_0, y_0) \neq 0$ ，則有：

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = - [J_0]^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - [J_0]^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

把 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 記爲 ϕ ，令 $\vec{X}_{n+1} = \phi(\vec{X}_n)$ ， $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

$$\text{則：} \boxed{\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n - [J_0(\vec{X}_n)]^{-1} \vec{f}(\vec{X}_n)}$$

這種形式和 $X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$ 幾乎是等價的，

以下證明行列式的微分公式：

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 a_{ij} 各元素均為 $x, y, \dots$ 之函數

記 $A = \det [A_1, A_2, \dots, A_n]$

A_i 表示列向量，則：

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \det \left[\frac{\partial A_1}{\partial X}, A_2, \dots, A_n \right] + \det \left[A_1, \frac{\partial A_2}{\partial X}, \dots, \right.$$

$$\left. A_n \right] + \dots + \det \left[A_1, A_2, \dots, \frac{\partial A_n}{\partial X} \right]$$

$$\text{Pf} : A = \sum \text{sign}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots \cdots a_{n\pi(n)}$$

π 是任一排列

利用微分的乘法公式：

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \sum \text{sign}(\pi) \left[\underbrace{\frac{\partial a_{1\pi(1)}}{\partial X} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{第一項}} + a_{1\pi(1)} \cdot \underbrace{\frac{\partial a_{2\pi(2)}}{\partial X} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{第二項}} \right. \\ \left. \cdots \cdots a_{n\pi(n)} + \cdots + a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots \cdots \underbrace{\frac{\partial a_{n\pi(n)}}{\partial X}}_{\text{第 } n \text{ 項}} \right]$$

將 n 項拆開後便得證。

回到牛頓法的向量形式，並設 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ，係平面 $\rightarrow$ 平面，依克萊瑪法則解 u 、 v 得：

$$U = X - \frac{\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}}{J_0}, \quad V = Y - \frac{\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}}{J_0}$$

$$\text{又 } U_x = 1 - \frac{\left(\begin{vmatrix} f_x f_y \\ g_x g_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{xy} \\ g & g_{xy} \end{vmatrix} \right) J_0 - \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} J_{0x}}{J_0^2} = \frac{- \begin{vmatrix} f & f_{xy} \\ g & g_{xy} \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} J_{0x}}{J_0^2}$$

$$u_v = - \frac{\left(\begin{vmatrix} f_y f_y \\ g_y g_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f_{yy} \\ g & g_{yy} \end{vmatrix} \right) J_0 - \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} J_{0y}}{J_0^2} = \frac{- \begin{vmatrix} f & f_{yy} \\ g & g_{yy} \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} J_{0y}}{J_0^2}$$

$$V_x = \frac{- \begin{vmatrix} f_{xx} & f \\ g_{xx} & g \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} J_{0x}}{J_0^2}$$

$$V_y = \frac{- \begin{vmatrix} f_{xy} & f \\ g_{xy} & g \end{vmatrix} J_0 + \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} J_{0y}}{J_0^2}$$

當 $f = 0$ 且 $g = 0$ 時，可知 $U_x = U_y = V_x = V_y = 0$ ，

同時當然有 $[J] = \begin{pmatrix} U_x U_y \\ V_x V_y \end{pmatrix} = 0$ 且 $J = 0$ 。

在此並假設了 J 在 $f = 0, g = 0$ 點上的連續性，本來要證明點列 X_n 之收斂性，應該可以考慮 $|J| < 1$ 下的縮小映射原理，即若 $\phi(Q) = Q, J(Q) = 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使若 $|P - Q| < \delta$ 則 $|J(P)| < 1$ ，如此一來，任何在 $|P - Q| < \delta$ 內之區域 Ω 經 ϕ 映射後得 Ω' 必然有 $\frac{|\Omega'|}{|\Omega|} < 1$ ，面積雖縮小了，

但 Ω' 卻未必全落在 $|P - Q| < \delta$ 內，故縮小的特性不能連續使用，也就無法證明 Ω 在 ϕ 的重重映射之後會收縮到 Q 點。

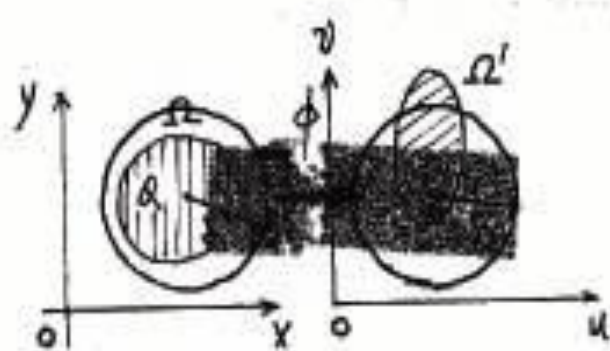


圖 11

既然面積的方法行不通，那就改用弧長的方法：

設曲線 Γ 經 ϕ 映射後為 Γ' ，則

$$|\Gamma'| = \int_{\Gamma'} ds = \int_{\Gamma'} \sqrt{du^2 + dv^2} \quad (\text{在 } u-v \text{ 平面上}),$$

$$\text{但 } du = u_x dx + u_y dy$$

$$dv = v_x dx + v_y dy$$

$$du^2 + dv^2 = (u_x^2 + v_x^2) dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y) dx dy + (u_y^2 + v_y^2) dy^2$$

令此二次形為 $A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2$ ，

$$\text{故 } |\Gamma'| = \int_{\Gamma} \sqrt{A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2}$$

由於二次形在根號內，故必然是恒正的二次形，有：

$$A > 0, C > 0, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \dots\dots \text{必然條件。}$$

而 $|\Gamma| = \int_{\Gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ，若要 $|\Gamma'| < |\Gamma|$ ，可考慮在 Γ 上處處皆有 $(A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2) < (dx^2 + dy^2)$

即 $(A - 1) dx^2 + 2B dx dy + (C - 1) dy^2$ 為恒負，恒負的條件是：

$$\begin{cases} A - 1 < 0 \\ \begin{vmatrix} A - 1 & B \\ B & C - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} - (A + C) + 1 > 0 \end{cases}, \text{但由正定時的}$$

必然條件，故只要 $A + C < 1$ ，以上兩條件便均成立。

設 Q 爲一零點， $\phi(Q) = Q$ ， $J(Q) = 0$ ， $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ ，
 顯然 $A + C = u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2 = 0$ ，故在連續的假定之下，任何
 $\varepsilon > 0$ ，必存在 δ ，若 $|P - Q| < \delta$ ，則 $A + C < \varepsilon$ ，以下取 ε 是小
 於 1 之正數， Γ 在 $|P - Q| < \delta$ 內，並以 Q 爲端點之線段，則 Γ' 爲一
 以 Q 爲端點之曲線，且 $|\Gamma'| < \sqrt{\varepsilon} |\Gamma|$ ，理由同前，因此時恒負條
 件爲：

$$\begin{cases} A - \varepsilon < 0 \\ \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} - \varepsilon(A + C) + \varepsilon^2 > 0 \end{cases}, \text{ 在 } A + C < \varepsilon \text{ 下當然是成立的。}$$

由於 $|\Gamma'| < \sqrt{\varepsilon} |\Gamma| < \delta$ ，故 Γ' 線就算拉成直線仍然落於 $|P - Q| < \delta$ 內，何況是曲線時呢！

Part IV: 科學競賽

研究數學的方法

創意與學習

旺宏科學獎

(2002 雄女, 魏可欣)-海虎不等式

(2003 彰中, 黃皓倫)-挑剔數列

(2002 魏可欣)-海虎不等式

- 猜想 23 (海馬猜想): 三角錐之四個面的面積能否決定其體積?
- 猜想 24 (海虎公式): 三角錐的體積能否可以明確地用其六邊長來表示?
- 猜想 25 (海虎不等式): 除了三角不等式之外, 是否尚有其他條件使得任意給定之六個正數恰可作為一三角錐的六邊長? (充分必要.)

(2003 黃皓倫)-挑剔數列

在一個偶然的機會下，接觸到一種特別的數列，這種數列是由 1~7 等數字組成，其中每個數字都重複使用兩次，在總共 14 格的格子裡排列，而且要符合 1 與 1 之間有 1 個數、2 與 2 之間有 2 個數字、、、6 與 6 之間有 6 個數字、7 與 7 之間有 7 個數字。

例：2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4

依據此種排列規則也找出 1~3 組成的數列 312132、1~4 組成得數列 41312432，將此數列改成由 1~n 所組成的 $2n$ 位數列，並討論此 $2n$ 位數列的各種特性，並將有此特別規則的數列命為”挑剔數列”。

目的-(主要結果)

- 證明 $n = 4k + 1$ 和 $4k + 2$ (k 為非負整數) 時不存在挑剔數列。
- 找出一種排法能排出 $2n$ 位的挑剔數列。
- 證明此排法並反推 $n = 4k$ 和 $4k + 3$ 時一定有挑剔數列存在。

$n=4k+1, 4k+2$ 挑剔數列不存在

- 『序數』之定義：此挑剔數列從左邊開始數來,第一位之序數 = 1,第二位之序數 = 2,依序遞增.
- 證明：一個需填入 $1 \sim n$ 各兩次的挑剔數列，其序數和為 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n = n(2n + 1)$.
- 當 $r = 1$ 時,兩個 1 分別對應序數 $A_1, A_1 + (1 + 1)$ 當 $r = 2$ 時,兩個 2 分別對應序數 $A_2, A_2 + (2 + 1)$ 當 $r = n$ 時,兩個 n 分別對應序數 $A_n, A_n + (n + 1)$
- $n(2n + 1) = 2(A_1 + \dots + A_n) + n(n + 1)/2 + n$
- $n(3n - 1) = 4(A_1 + \dots + A_n)$.

挑剔數列之化簡

1. 先把挑剔數列中最大的數字 n 寫下，再依造數字的大小順序由第一個 n 的右邊開始空一格依序填入直到第 2 個 n 之左方。

例： 7_6_5_4_7 ($n = 7$)

2. 把步驟一所填入的數字往其右方填入第二次，同時在第一個 n 之左方補上此挑剔數列應有但尚未畫上之空格。

例： __ 7_6_5_4_7 6 5 4 ($n = 7$)

3. 把剩餘數字的偶數由左到右遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次皆填入原先填入之偶數的右方。

偶數格的定義為與第 1 個 n 之序數差為偶數的格子。

奇數格的定義為與第 1 個 n 之序數差為奇數的格子。

例：2 _ 4 2 11 _ 10 4 9 _ 8 _ 7 _ 6 _ 11 10 9 8 7 6 ($n = 11$)

4. 把剩餘的數字與空格一起作化簡，把剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使之變為一「新的挑剔數列」。

例：原 $n = 11$ 的挑剔數列化簡為 _ X _ X _ _ _

X 表示此格在「原挑剔數列」中已被填入過數字。

新挑剔數列之排法

新挑剔數列之定義：由 0 至 $n - 1$ 之挑剔數列：
新挑剔數列之形式為

_X _ _ _

其中 **X** 之數量為右方連續空格之數量減二。

$\text{num}(X) = 4a + 1$ 時的排法

- 先把偶數由右往左遞增填入偶數格中，填入這偶數的第 2 次時，最大偶數的第 2 次往原來的右方填，其餘的往左方填入。

例：_X_X_X_X_X24_2004

- 剩餘的數字與空格一起作化簡，剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使此挑剔數列再做變化。

例：原 $\text{num}(X) = 5$ 變為_ _ _ _ X _

- 再把偶數由左往右遞增填入偶數格，這些偶數的第 2 次填入中最大的偶數第 2 次往原來的左方填，其餘的往右方填入。再化簡一次，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後原 $\text{num}(X) = 4a + 1$ 之 a 值減少 2 ($a \geq 0$)。

附記：費馬無窮遞降法

- $2^{1/2}$ 是無理數.
- 畢氏整數解: $X^2 + Y^2 = Z^2$,
 $X = p^2 - q^2$, $Y = 2pq$, $Z = p^2 + q^2$.
- 費馬最後定理: $X^n + Y^n = Z^n$ 在 $n > 2$ 時, 沒有全非零之整數解. (A. Wiles 1995.)
- 特殊情形 $n = 3$ 及 $n = 4$ 可用費馬無窮遞降法證明.

結語

THE END

僅以這場演講獻給竹中之友
我心中永遠的典範
盧澄根 老師
以祝賀他的光榮退休