看見隱藏的結構：從振動的弦到聲音的形狀

為高中學生演講
陳宜良
台灣大學 數學系

2026 年 2 月 7 日

Abstract

聲音是一種隨時間變化的振動現象，但人類對聲音的理解與感知，卻深刻地建立在頻率與幾何結構之上。本文從最基本的物理模型出發，將聲音視為振動系統所產生的波動，並以傅立葉分析作為核心數學工具，說明如何由時間訊號轉換為頻譜表示。

我們首先介紹弦、膜與空腔中的振動模態，說明特徵頻率與空間結構之間的關係，以及這些模態如何構成聲音的頻譜基礎。接著，我們討論離散取樣與離散傅立葉轉換，連結理想化的連續模型與實際的數位聲音分析。

在此基礎上，本文進一步探討人類聽覺系統的數學結構。透過一維行進波模型與 WKB 近似，我們說明耳蝸如何將聲音分解為一組在對數頻率軸上排列、具有近似常數品質因子（constant-Q）的濾波器。這種結構自然地對應於小波轉換，而非傳統的傅立葉分解。

最後，本文將這些數學與物理結果應用於音色（timbre）的理解，包括管樂器、弦樂器、人聲以及房間與音樂廳的聲學特性。我們說明音高如何對應於頻譜結構的平移，而音色則由頻譜包絡與模態幾何所決定。整體而言，本文試圖建立一條從振動、頻譜、幾何到聽覺感知的統一脈絡，展示經典數學工具在現代聲音科學中的持續重要性。

Contents

I 聲音作為振動與頻譜 **7**

1 聲音來自振動 (Sound Comes from Vibration) **7**

1.1 正弦型函數 (Sinusoidal Functions) 8

1.2 頻率與音高 9

1.3 振動的疊加原理 9
1.4 時間域與頻率域的觀點 11

2 解析訊號的相量軌跡（Phasor Trajectories of Analytic Signals) 13

2.1 歐拉公式（Euler's Formula) 13
2.2 解析訊號（Analytic Signals) 14
2.3 協和與不協和訊號的相量軌跡 15
2.4 無理數頻率比的相量軌跡 17
2.5 拍頻現象的相量軌跡 18
2.6 本節小結 18

3 傅立葉級數與傅立葉變換（Fourier Series and Fourier Transform) 20

3.1 傅立葉級數：表示週期訊號 20
3.2 傅立葉變換：表示非週期訊號 21
3.3 封閉平面曲線的相量幾何 21
3.4 實值訊號的相量幾何 22
3.5 離散傅立葉轉換（Discrete Fourier Transform, DFT） 24
3.6 短時間傅立葉轉換（Short-Time Fourier Transform, STFT） 26

II 聲音與空間：波動、幾何與模態 27

4 振動的力學原理 (Mechanics of Vibration) 27

4.1 簡諧運動 27
4.2 諧振子方程 (Harmonic Oscillator Equation) 27
4.3 速度、加速度與能量 (Velocity, Acceleration, and Energy) 28
4.4 疊加與線性性 (Superposition and Linearity) 28
4.5 邁向連續介質 (Towards Continuous Media) 29

5 振動的弦 (Vibrating Strings) 29

5.1 振動弦的基本概念 (Vibrating Strings) . . . 29
5.2 駐波與邊界條件 (Standing Waves and Boundary Conditions) . . . 30
5.3 駐波模態與量化頻率 (Standing-wave Modes and Quantized Frequencies) . . . 30
5.4 駐波模態與諧波泛音 . . . 31

6 振動的鼓膜：二維振動 (Vibrating Drums: Two-Dimensional Vibration) 33
6.1 從弦到鼓 (From Strings to Drums) . . . 33
6.2 矩形鼓 (Rectangular Drum) . . . 33
6.3 圓形鼓 (Circular Drum) . . . 34
6.4 泛音與非諧性 (Overtones and Inharmonicity) . . . 35

7 從房間到音樂廳：聲音與空間的數學 37
7.1 三維波動方程 . . . 37
7.2 邊界條件與駐波 . . . 37
7.3 長方形房間的模態 . . . 38
7.4 從幾何到聽覺經驗 . . . 39
7.5 數學、音樂與意義 . . . 39

8 你能聽出鼓的形狀嗎？(Can You Hear the Shape of a Drum?) 40
8.1 Kac 的問題 (Mark Kac's Question) . . . 40
8.2 Weyl 定律：從頻譜聽出面積 (Weyl's Law: Hearing the Area) . . . 40
8.3 熱跡與幾何指紋 (Heat Trace and Geometric Fingerprints) . . . 41
8.4 能否聽出形狀？(Can You Really Hear the Shape?) . . . 41
8.5 頻譜能告訴我們什麼？(What Is Determined by the Spectrum) . . . 42
8.6 對聲音與成像的啟示 (Takeaway for Sound and Imaging) . . . 42

III 音色與共振濾波 43

9 長笛的音色：一維共振器 43

9.1 聲源–共振器的觀點 . . . 43
9.2 氣流激發與聲源頻譜 . . . 43
9.3 長笛的一維共振器模型 . . . 44
9.4 長笛的駐波與共振傳遞函數 . . . 45
9.5 品質因數及其在長笛音色中的角色 . . . 49

10 小提琴的音色 51

10.1 聲源–共振器的觀點 . . . 51
10.2 弓弦激發與琴橋振動的諧波結構 . . . 51
10.3 小提琴琴身的傳遞函數 . . . 52
10.4 頻譜包絡與小提琴音色 . . . 55

11 男性與女性人聲的音色差異 57

11.1 發聲系統的解剖結構 . . . 57
11.2 聲源–濾波器的觀點 . . . 57
11.3 基頻範圍 . . . 58
11.4 聲道共振（共振峰，formants） . . . 58
11.5 頻譜包絡與音色 . . . 59
11.6 男性與女性人聲的比較表 . . . 59
11.7 不同樂器與人聲之音色（頻譜包絡）比較 . . . 60

12 房間的音色：阻尼、擴散與殘響 61

12.1 房間中的聲波與 Green 函數 . . . 61
12.2 由阻抗邊界條件所導致的阻尼 . . . 61
12.3 聲學處理：吸音、擴散與反射控制 . . . 65
12.4 混響與能量衰減 . . . 68

IV 聽覺系統作為時間–頻率分析器 71

13 耳朵作為時頻分析器 **71**

13.1 聽覺的解剖結構與機械濾波 71

13.2 音調定位與生物頻譜 72

13.3 耳蝸的品質因數與音高辨識 76

14 結論 **77**

15 最終評論：為何在今日仍要學習這些「經典」主題？ **78**

A 複變數與歐拉公式（Complex Variables and Euler's Formula） **79**

A.1 複數（Complex Numbers） 79

A.2 複數的代數（Algebra of Complex Numbers） 79

A.3 幾何觀點：複平面（Geometry: The Complex Plane） 80

A.4 向量空間結構（Vector Space Structure） 80

A.5 極座標形式與複數乘法（Polar Form and Complex Multiplication） 80

A.6 歐拉公式（Euler's Formula） 81

A.7 旋轉向量（相量，Phasors） 83

A.8 習題 83

B 傅立葉級數與傅立葉變換（Fourier Series and Fourier Transform） **85**

B.1 傅立葉級數：分解週期運動（Fourier Series: Decomposing Periodic Motion） 85

B.2 傅立葉變換（Fourier Transform） 86

B.3 數學觀念總結（Summary of Mathematical Ideas） 87

C 加窗傅立葉轉換與短時傅立葉轉換 **88**

C.1 連續加窗傅立葉轉換（CWFT） 88

C.2 離散加窗傅立葉轉換（DWFT） 88

C.3 常用窗函數 89

C.4 週期邊界與頻譜洩漏 90

C.5 零填補（Zero Padding） . . . 91
C.6 重建（重疊相加法） . . . 91
C.7 時間—頻率解析度 . . . 91
C.8 離散短時傅立葉轉換中的參數 . . . 91
C.9 軟體工具 . . . 93
C.10 總結 . . . 94

D 聲音與振動的數學基礎 95

D.1 矩形鼓膜（Dirichlet 邊界；邊長 L_x 與 L_y） . . . 95
D.2 圓形鼓膜（Dirichlet 邊界；半徑 R） . . . 96

E Weyl 定律：一個初等推導 97

E.1 Weyl 定律的物理直覺 . . . 97
E.2 矩形情形 . . . 98
E.3 推廣至一般區域 . . . 99

F 熱跡漸近展開 100

F.1 熱核與熱跡 . . . 100
F.2 主導項：內部行為與面積 . . . 101
F.3 邊界修正：半平面模型與周長項 . . . 101
F.4 曲率與更高階項 . . . 102
F.5 總結：Weyl 定律與熱跡 . . . 103
F.6 歷史脈絡（Weyl 定律與熱跡） . . . 104
F.7 延伸閱讀指引：進一步學習的方向 . . . 105

G 具有音孔之長笛的數學模型 106

G.1 將音孔視為阻抗邊界條件 . . . 106

H 小提琴傳遞函數的振動—聲學推導 108

H.1 小提琴的模型方程 . . . 109
H.2 駐波模態與模態展開 . . . 110
H.3 傳遞函數 . . . 111
H.4 詮釋 . . . 113

I 二次剩餘擴散器 **113**

I.1 二次剩餘擴散器的構造 . . . 113

J 耳蝸濾波的數學模型 **115**

J.1 線性耳蝸模型 . . . 115
J.2 轉移函數 $G(x,\omega)$ 的 WKB 推導 . . . 116
J.3 耳蝸分析作為小波轉換 . . . 120
J.4 音高、音色與對數幾何結構 . . . 122

K 線上工具與互動資源 **125**

Part I

聲音作為振動與頻譜

1 聲音來自振動 (Sound Comes from Vibration)

當你撥動吉他弦、敲擊玻璃杯，或說出一句話時，你讓某個物體開始運動。周圍的空氣也跟著振動，而這些微小的壓力起伏向外傳播，就形成了我們所說的「聲音」。雖然聲音似乎沒有形體，但它其實誕生自物體的振動 —— 來自具體的物理運動。

為了更清楚理解振動，我們想像一個「質量—彈簧系統」。把一個小重物綁在彈簧上，向右拉一點後放開，它會左右往返震動，形成幾乎規律重複的運動。這種現象稱為簡諧運動（simple harmonic motion），可由下列餘弦函數描述：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

其中：

- A：振幅（振動的最大位移）；
- ω：角頻率（radian/s）；
- ϕ：初相位（$t = 0$ 時的起始角度）。

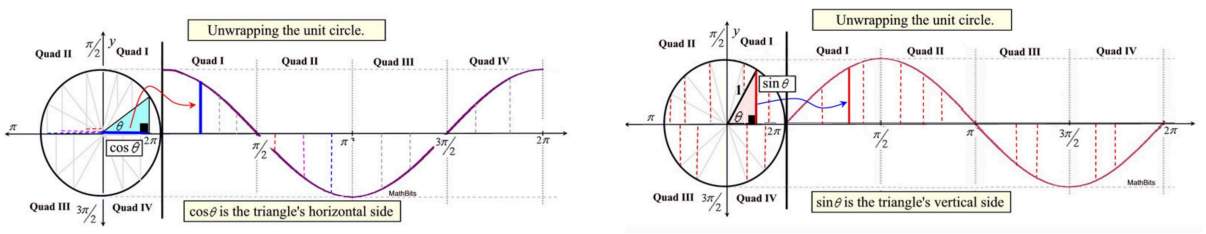
振動的週期為 $T = 2\pi/\omega$，頻率為

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

表示每秒完成的震盪次數。

1.1 正弦型函數 (Sinusoidal Functions)

正弦型函數 (或稱正弦波) 包括正弦與餘弦函數 (Sine and Cosine Functions)。



(a) $\cos\theta$: 水平投影.　　(b) $\sin\theta$: 垂直投影.

Figure 1: 單位圓定義出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 函數. Source: mathbitsnotebook.com

使用**角度加成公式**，振動公式

$$A\cos(\omega t + \phi)$$

可以表示為 $\cos(\omega t)$ 與 $\sin(\omega t)$ 的**線性組合**：

$$A\cos(\omega t + \phi) = (A\cos\phi)\cos(\omega t) - (A\sin\phi)\sin(\omega t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)。$$

正弦 (sine) 與餘弦 (cosine) 函數最初是為幾何與天文學所建立的，如今已成為描述振動的通用語言。任何複雜的運動 —— 從小提琴弦的顫動到變壓器的嗡鳴 —— 都能分解為一組具有不同振幅與頻率的正弦運動。這個原理稱為**波的疊加原理 (superposition of waves)**，它是物理與音樂的核心。

當你聆聽和弦或歌手的聲音時，你的耳朵與大腦正在不自覺地分析這些混合的正弦波，並依頻率將它們區分開來。

因此，在我們所聽到的每一個聲音背後，都隱藏著優雅的數學節奏。空氣分子的無形舞動遵循著最簡單的定律：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

而從這個簡潔的公式中，展開了音樂音調、語音以及聽覺物理的豐富世界。

1.2 頻率與音高

角頻率 ω 決定震動速度，而在聲音領域我們更常使用頻率

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{單位：赫茲 Hz}).$$

若將 ω 加倍，聽到的音高會上升一個八度。因此，頻率比為 $2:1$ 的兩個音，雖然實際頻率相差一倍，我們卻感覺它們「距離」相同，都相差一個八度 ── 音高是一種接近對數刻度的感覺。

例如，鋼琴的標準音 A4（中央 A）頻率為

$$f = 440 \text{ Hz},$$

八度上的 A5 則為 880 Hz。鋼琴把一個八度分成 12 個半音即

$$A, A^{\#}, B, C, C^{\#}, D, D^{\#}, E, F, F^{\#}, G, G^{\#}，$$

十二平均律 (Equal Temperament) 要求

$$r^{12} = 2 \quad \Rightarrow \quad r = 2^{1/12} \approx 1.05946.$$

也就是說，每往上移一個半音，頻率約乘上 1.05946，音高的刻度因此是等比（對數）而非等差的。

1.3 振動的疊加原理

線性系統（例如細弦或空氣柱）的重要性質之一是疊加原理。如果 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 都是某線性方程的解，那麼

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

仍然是解。物理上，這表示兩個波相遇時，位移可以直接相加。

同頻率，不同相位。 考慮

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_1) + A\cos(\omega t + \phi_2).$$

利用三角恆等式，可以化簡為

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right).$$

也就是說，兩個相同頻率的正弦波疊加後，仍是一個同頻率的正弦波，只是振幅與相位改變。特別地，若相位差 $\phi_1 - \phi_2$ 等於 $\pm\pi$，則

$$\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 0.$$

在此情況下，兩個波因為具有相反的相位而完全互相抵消。

拍頻現象。 再考慮頻率非常接近的兩個波：

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t).$$

仍可寫成

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

此時波形呈現「快速震動」外加「緩慢起伏的外包線」：快速震動對應平均頻率 $(\omega_1 + \omega_2)/2$，而緩慢起伏對應差頻 $(\omega_2 - \omega_1)/2$。聽覺上，我們會感受到聲音忽強忽弱，這就是拍頻（beats）。

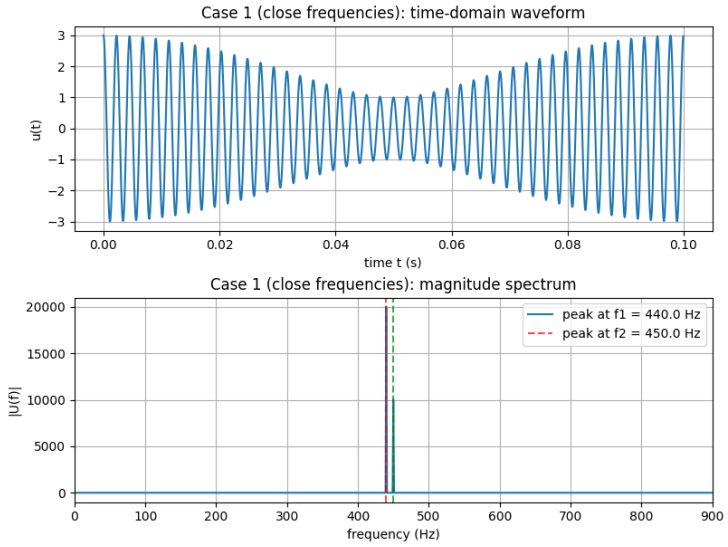


Figure 2: 訊號 $x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$ 的時間域波形。當兩個頻率接近時，波形會出現拍頻；當頻率相差較大時，疊加後的波形呈現更快速的振盪。

協和與不協和。 如果兩個頻率形成簡單整數比（例如 $2:1$ 八度、$3:2$ 完全五度、$4:3$ 完全四度），疊加後的波形具有明顯的規律性，整體仍然呈現接近週期的結構，聽起來就較「和諧」（consonance）。反之，若頻率比是較複雜的有理數甚至無理數（如 $8:7$ 或 $\sqrt{2}:1$），波形變得不規則且難以重複，聲音便顯得「不協和」（dissonance）。

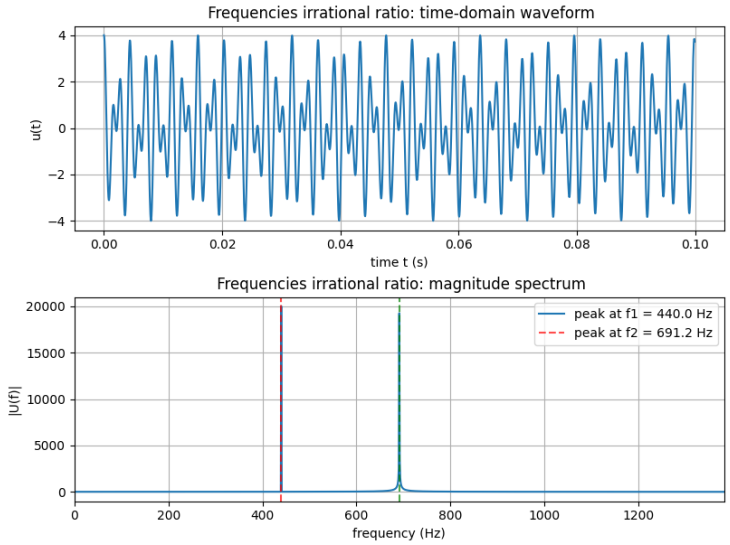


Figure 3: 不協和範例：兩個角頻率為 $\omega_1 = 440$ 與 $\omega_2 = 440\pi/2$ 的波形疊加。由於它們的頻率比 $\omega_2/\omega_1 = \pi/2$ 是無理數，兩個波形的重複週期彼此無法對齊，組合後的訊號沒有明確的重複結構，呈現不規則且不易預測的形態，聽感上即是不協和的聲音。

1.4 時間域與頻率域的觀點

聲音訊號可以從兩種互補的角度來理解：

時間域（time domain）。 直接觀察隨時間變化的波形。例如

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

描述的是空氣壓力（或位移）如何隨時間起伏，我們可以在時間軸上看到干涉、拍頻以及振幅的變化。

頻率域（frequency domain）。 同一個訊號也可以看成是很多正弦波的組合：每個頻率 ω_k 對應光譜上的一條線，其高度與 A_k 有關。頻率域的表示方式直接告訴我們「有哪些頻率」、「哪一些比較強」，對理解音色與和聲特別重要。

例子：兩個正弦波的疊加。 對於

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2),$$

時間域波形會呈現：在某些時刻兩波同向，振幅變大（相長干涉）；在某些時刻兩波反向，振幅變小（相消干涉）；若 ω_1 與 ω_2 接近，還會出現拍頻。而在頻率域中，我們只會看到位於 ω_1 與 ω_2 的兩條尖峰，清楚標示出組成聲音的頻率成分。

兩種觀點的互補性。

- 在時間域，我們重視的是波形如何隨時間演化：干涉、拍頻、包絡線等等；
- 在頻率域，我們關心的是頻率分佈：哪些頻率存在、各自的強度如何。

兩種觀點描述的是同一個實體，只是側重不同面向。要真正理解聲音的性質（例如音高、音色以及和聲關係），同時掌握時間域與頻率域的圖像是非常有幫助的。

在下一小節中，我們將以相量（phasor）的方式，從幾何角度來理解這些正弦成分。利用歐拉公式與解析訊號（analytic signal），我們將看見隱藏在時間域與頻率域表示中的相位結構，並以複平面上的旋轉向量來呈現。

2 解析訊號的相量軌跡（Phasor Trajectories of Analytic Signals)

在介紹相量軌跡之前，我們希望更進一步超越時間域與頻率域的觀點。一個正弦訊號除了振幅與頻率之外，還有重要的「相位」資訊，但相位往往難以從波形中直接看出。如果我們將正弦函數改寫成複數指數，就能把訊號視為複平面上的一個旋轉向量。這種以幾何方式呈現訊號的方法——核心便是歐拉公式——讓我們得以看見原本隱藏在實值表示中的結構，並能直觀地描述不同頻率成分之間如何互相疊加。

因此，歐拉公式是從「代數表示」走向「相量幾何」的關鍵橋樑。

2.1 歐拉公式（Euler's Formula)

本節的起點是著名的歐拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

它告訴我們，複指數可以視為複平面上單位圓上的一個點。也就是說，$e^{i\theta}$ 是一個長度為 1、與實軸成角度 θ 的 **旋轉向量**（phasor）。

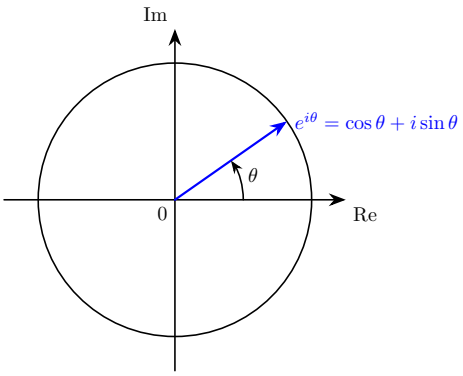


Figure 4: 歐拉圓（Euler circle）：複平面上的單位圓軌跡。

利用歐拉公式，每一個正弦波都可以寫成複指數的「實部」：

$$A\cos(\omega t + \phi) = \Re\big(Ae^{i(\omega t+\phi)}\big)\,.$$

因此，一個正弦波可以理解為：

- 一個長度為 A；
- 以角速度 ω 逆時針旋轉；
- 初始角度由相位 ϕ 決定；

的**複平面旋轉相量的水平投影**。

這個觀點是「解析訊號」與「相量軌跡」的基礎。

2.2 解析訊號（Analytic Signals)

一個實值正弦波

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad \omega \geq 0,$$

可以視為複指數

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)}$$

的實部：

$$x(t) = \Re\, z(t).$$

當時間 t 增加時，$z(t)$ 在複平面上描繪出一個半徑為 A 的圓。這個「旋轉向量」的觀點（phasor picture）提供了一種幾何方式來理解相位與頻率。在此意義下，$z(t)$ 可視為實訊號 $x(t)$ 所對應的 **解析表示（analytic representation）**。

更一般地，若一個實訊號可表示為正頻率正弦項的疊加，

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k), \qquad \omega_k \geq 0,$$

則其對應的解析訊號可定義為

$$z(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k e^{i(\omega_k t+\phi_k)}, \qquad x(t) = \Re z(t).$$

此複數訊號在複平面中的軌跡是一條 外擺線曲線（*epicycle curve*）：一個點沿著一個圓逆時鐘運動，而該圓的圓心本身又沿著另一個圓逆時鐘運動，如此層層疊加。

原始的實值訊號可由解析訊號的實部回復：

$$x(t) = \Re\, z(t).$$

解析訊號的觀點讓我們能清楚看見：

- 「多個正弦波疊加」在複平面中形成的幾何結構；
- 相位與頻率如何影響軌跡形狀；
- 聲音訊號的組成如何以圓與外擺線的方式出現。

例 1：固定中心加上一個旋轉向量。

$$z(t) = A_0 e^{i\phi_0} + A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)}.$$

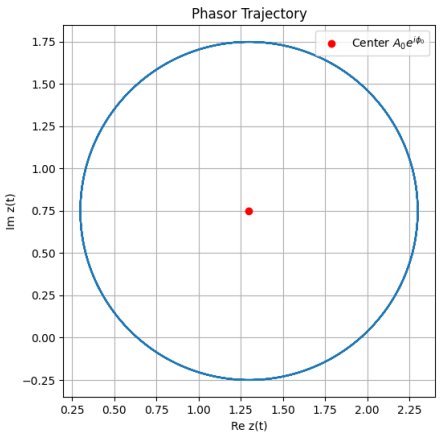
其軌跡是一條以 $A_0 e^{i\phi_0}$ 為圓心、半徑為 A_1 的圓。起始點為 $A_0 e^{i\phi_0} + A_1 e^{i\phi_1}$，相量以角速度 ω_1 逆時鐘旋轉。

例 2：兩個旋轉相量的疊加（外擺線）。

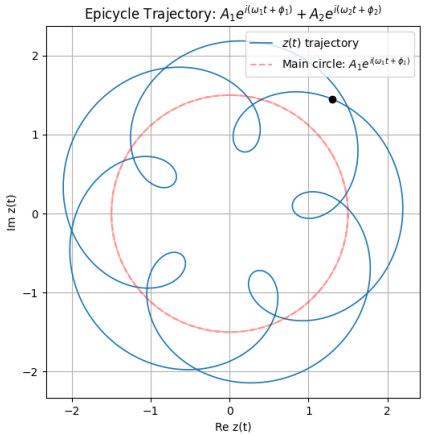
$$z(t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}.$$

此時的軌跡為一條外擺線：第二個相量 $A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}$ 的端點沿著一個小圓逆時鐘運動，而該小圓的圓心則沿著第一個相量所產生的大圓移動。

這些例子顯示，只要疊加多個非負頻率的相量，複平面中的軌跡便會自然呈現圓形與外擺線等幾何結構。



(a) 相量圓軌跡：$z(t) = A_0 e^{i\phi_0} + A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)}$。點以半徑 A_1、角速度 ω_1 繞著固定中心運動。



(b) 外擺線軌跡：$z(t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}$。小圓的圓心沿著第一個相量的大圓運動。$A_1 = 1.5, \phi_1 = \pi/6, \omega_1 = 2.0$, $A_2 = 0.7, \phi_2 = \pi/2, \omega_2 = 7.0$.

2.3 協和與不協和訊號的相量軌跡

相量表示法提供了一種清楚的幾何觀點，使我們能夠以視覺方式比較「協和」與「不協和」這兩種聲音現象。

當兩個頻率的比值為簡單的整數比例（例如 $2{:}1$ 的八度、$3{:}2$ 的純五度）時，對應的兩個相量具有高度的同步性。其角速度彼此可公度（*commensurate*），因此相對方向會在

有限時間後重新對齊。結果是在複平面中形成一條**封閉且週期性的相量軌跡**，呈現平滑而規律的外擺線結構。

這種封閉而穩定的幾何型態，對應於聲學上的 **協和（consonance）**：聲音聽起來和諧、安定，並具有清楚的週期性。

下圖顯示兩個典型的協和範例：

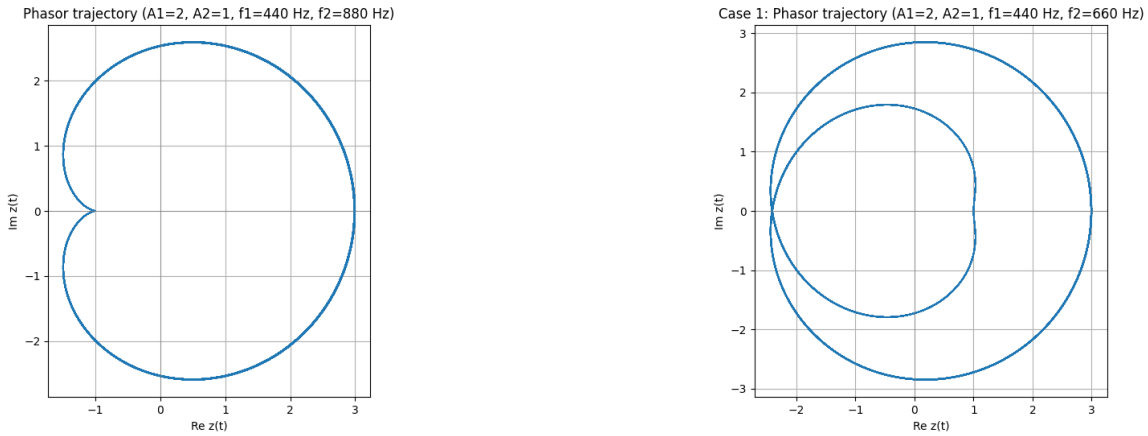


Figure 6: 協和的相量軌跡範例。考慮兩個實訊號 $A_1\cos(2\pi f_1 t+\phi_1)+A_2\cos(2\pi f_2 t+\phi_2)$ 所對應的解析訊號之相量表示。左圖：頻率比 $f_2:f_1=2:1$（八度，octave）；右圖：頻率比 $f_2:f_1=3:2$（純五度，perfect fifth）。

相反地，當兩個頻率的比值較為複雜（例如 $8:7$、$9:4$，甚至為無理比）時，對應的兩個相量無法同步旋轉。由於其角速度彼此不可公度（*incommensurate*），相對方向無法在有限時間內重複出現。

雖然相量軌跡依然是光滑連續的曲線，但它**不會閉合**，而是呈現擬週期、非重複的行為，並可能逐漸在一個環狀區域內「填滿」。這種幾何上的不規則性，在聽覺上對應於**不協和（dissonance）**：聲音帶有緊張感與粗糙感，頻率之間的干涉也更加明顯。

下圖展示兩個典型的不協和範例：

在這些不協和的範例中，軌跡雖然平滑，但沒有明確的週期，也永不回到起始點。從相量的觀點來看，

$$\text{協和} \iff \text{相量同步（phasor synchronization）},$$

$$\text{不協和} \iff \text{相量持續錯位（persistent phase mismatch）}.$$

這種相量幾何的視覺化，提供了對音程協和度一種直接而直觀的幾何解釋。

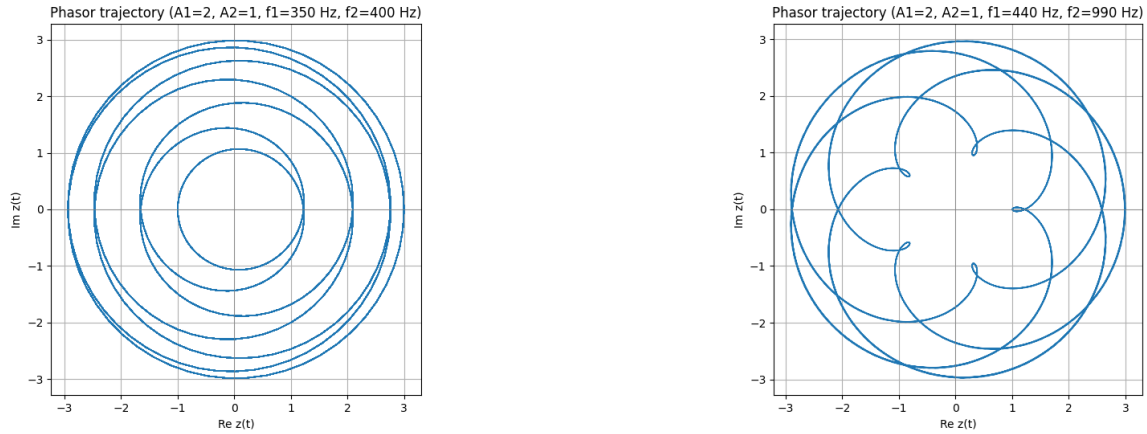


Figure 7: 不協和的相量軌跡範例。考慮兩個實訊號 $A_1\cos(2\pi f_1 t+\phi_1)+A_2\cos(2\pi f_2 t+\phi_2)$ 所對應的解析訊號之相量表示。左圖：$A_1=2,\ A_2=1,\ f_1=350,\ f_2=400$；右圖：$A_1=2,\ A_2=1,\ f_1=440,\ f_2=990$。

2.4 無理數頻率比的相量軌跡

若兩個正弦項的角頻率比為無理數，例如

$$\omega_2=\omega_1\cdot\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\pi}{2}\notin\mathbb{Q},$$

則兩個相量的角速度彼此不可公度，永遠無法在有限時間內整齊對齊。

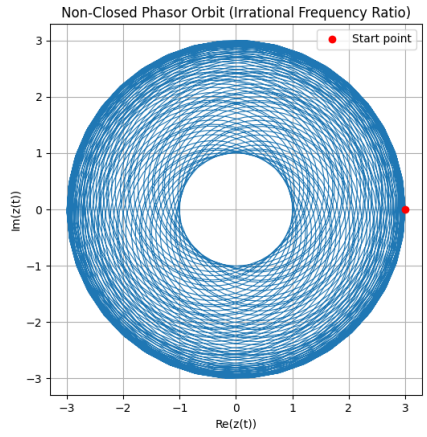
在複平面中，$z(t)$ 的端點仍進行光滑的旋轉與疊加，但由於兩個頻率沒有共同的週期，其軌跡呈現 擬週期（*quasiperiodic*）行為：它不會回到起始點，也無法形成封閉曲線，而是以不重複的方式在某個環狀區域內游走。

下圖展示兩個具代表性的例子：

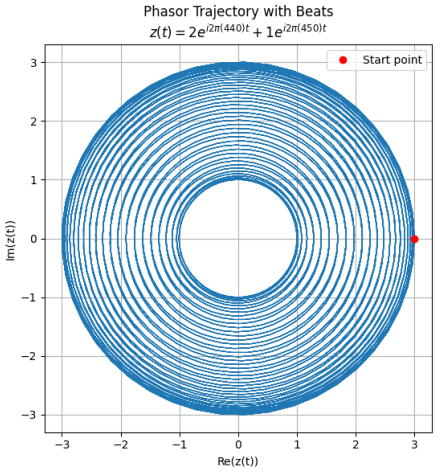
這類訊號具有下列特徵：

- 波形不具有限週期，因而不會重複；
- 相量軌跡不封閉，並呈現擬週期結構；
- 聽感上帶有不穩定、不協和、缺乏明確音高感的效果。

這種行為在音樂聲學中具有重要意義：即使相量運動本身完全由確定性的正弦項所構成，只要頻率比為無理數，其疊加所形成的幾何與聲學結構便會呈現持續不重複的動態行為。



(a) 由 $z(t) = A_1 e^{i2\pi f_1 t} + A_2 e^{i2\pi f_2 t}$ 所生成的非封閉相量軌跡，其中 $f_1 = 440,\ f_2 = \sqrt{2}\, f_1,\ A_1 = 2,\ A_2 = 1$。由於 f_2/f_1 為無理數，兩個角頻率互不成比例，相量 $z(t)$ 永遠不會回到起始位置，軌跡呈現擬週期性，並在環狀區域中逐漸變得稠密，而非形成封閉的外擺線。



(b) 兩個接近頻率所形成的相量軌跡：$z(t) = A_1 e^{i2\pi f_1 t} + A_2 e^{i2\pi f_2 t}$，其中 $f_1 = 440,\ f_2 = 450,\ A_1 = 2,\ A_2 = 1$。$z(t)$ 的端點快速旋轉，但其到原點的距離會因兩相量交替相長與相消而呈現緩慢的振幅起伏。此半徑的慢速變化，正對應於時間域波形中的拍頻（beats）現象。

2.5 拍頻現象的相量軌跡

當兩個頻率非常接近時，對應的兩個相量具有幾乎相同的旋轉方向與角速度。然而，即使只有微小的頻率差，仍會使兩相量之間的相對相位隨時間 緩慢地滑動。

在複平面中，這兩個相量會隨著相位差的變化而時而相長、時而相消。因此，合成相量

$$z(t) = A_1 e^{i2\pi f_1 t} + A_2 e^{i2\pi f_2 t}$$

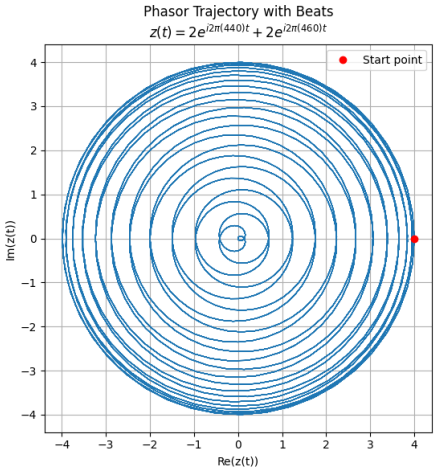
呈現出「快速旋轉」與「緩慢伸縮」並存的雙重行為：其端點以接近 f_1 與 f_2 的平均頻率快速繞原點旋轉，而到原點的距離則以頻率差 $|f_2 - f_1|$ 緩慢地增減。

這個半徑的慢速脈動，正是時間域中所聽到的**拍頻（beats）**現象。相量圖因此提供了一個清楚的幾何解釋：拍頻源自兩個幾乎同步旋轉的向量，其相對相位以極慢的速度持續錯開，所造成的干涉效果。

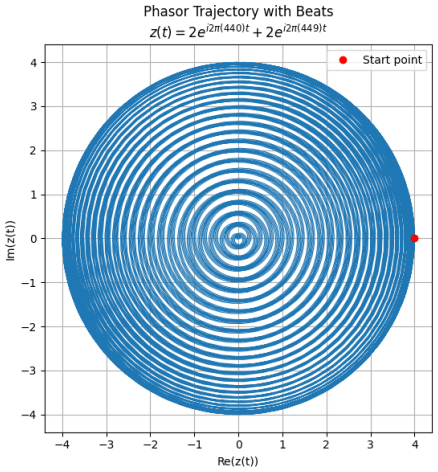
2.6 本節小結

相量軌跡為理解正弦訊號及其疊加提供了一種直觀而有力的幾何語言。由實值訊號 $x(t)$ 建立其解析訊號

$$z(t) = \sum_{k \geq 0} A_k e^{i(\omega_k t + \phi_k)},$$



(a) 兩個接近頻率所形成的相量軌跡。$z(t) = A_1 e^{i2\pi f_1 t} + A_2 e^{i2\pi f_2 t}$，其中 $f_1 = 440,\ f_2 = 460,\ A_1 = 2,\ A_2 = 2$。相量端點快速旋轉，而其半徑呈現明顯的慢速起伏。



(b) 另一個拍頻範例，其中 $f_1 = 440,\ f_2 = 449,\ A_1 = 2,\ A_2 = 2$。由於頻率差更小，半徑脈動的週期更長，拍頻更為緩慢。

我們得以將時間訊號提升至複平面中加以觀察；在此表示下，頻率對應於旋轉速度，相位對應於初始方向，而各成分的疊加則展現為由圓與外擺線所構成的幾何軌跡。

單一正弦波的相量軌跡是一個圓；多個正弦波的疊加則形成更為精緻的外擺線，其形狀直接反映各個成分的振幅、頻率與相位。這種幾何視角也清楚地說明了「協和」與「不協和」之間的差異：當兩個頻率形成簡單的整數比時，相量會定期重新對齊，軌跡形成平滑且封閉的曲線；當頻率比複雜或為無理數時，相量永不重複對齊，軌跡則呈現不封閉的擬週期結構，對應於聽覺上的粗糙與不穩定感。

透過相量幾何，我們將代數（訊號表示）、幾何（複平面軌跡）與聽覺感知（協和度與音色）統整於同一個框架中：聲音的內在結構，得以具體地呈現在複平面上一條曲線的形狀之中。

3 傅立葉級數與傅立葉變換（Fourier Series and Fourier Transform)

在前面章節中，我們研究了由有限多個正弦型函數所組成的訊號：

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

若所有頻率之間滿足簡單的比例關係，我們能以幾何方式（相量軌跡）理解它們的干涉、協和與不協和。然而，實際的聲音訊號往往更複雜，不一定能簡單寫成有限和，也不一定是週期性的。

本節的目的，是回答以下兩個基本問題：

1. 若 $x(t)$ 是週期性函數，是否能用無限多項正弦型函數來表示？
2. 若 $x(t)$ 不是週期性的，是否仍能用正弦型函數來描述其頻率組成？

傅立葉分析給出了清楚的答案：週期性函數可用傅立葉級數表示，非週期性訊號可用傅立葉變換表示。這兩種工具構成現代聲學、訊號處理與科學計算的核心。

3.1 傅立葉級數：表示週期訊號

假設 $x(t)$ 是一個週期為 2π 的函數。傅立葉發現，任何週期函數都可以展開成無限多個正弦型函數之和：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

其中係數

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt}\, dt$$

稱為傅立葉係數（Fourier coefficients）。

若函數的週期為 $T = 2\pi/\Delta\omega$，令時間縮放後便可得到一般情形：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Delta\omega t}, \quad c_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} x(t) e^{-ik\Delta\omega t}\, dt.$$

傅立葉級數告訴我們：

任何週期聲音都由離散的頻率成分組成。

頻率越高（大 k），其貢獻通常越小，而整體的音色則由這些係數 c_k 決定。

3.2 傅立葉變換：表示非週期訊號

真正的聲音訊號（語音、樂器的瞬間音色、拍手聲等）通常不是週期性的。在這種情況下，傅立葉級數不再適用。

傅立葉變換（Fourier transform）提供了連續頻率的描述方式：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega,$$

其中

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

稱為傅立葉變換。

傅立葉變換可以看成將級數極限化：

$$\Delta\omega \to 0, \quad k\Delta\omega \to \omega.$$

於是離散頻率成分變成連續的頻率分布。

因此：

- 週期性訊號 → **離散頻率**（光譜線）
- 非週期訊號 → **連續頻率**（光譜曲線）

這說明了為何拍手聲、語音、噪音的頻率圖看起來像平滑曲線，而非鋒利尖峰。

3.3 封閉平面曲線的相量幾何

在前一節中，我們看到任何 2π 週期的複數函數

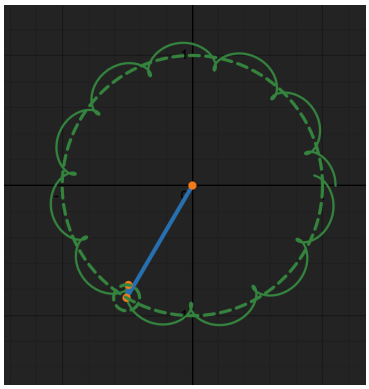
$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

都可以視為許多旋轉相量的和。當 t 從 0 變到 2π 時，端點 $z(t)$ 在複平面上描繪出一條封閉平面曲線。在實際應用中，我們通常只取有限多項

$$z_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt},$$

作為近似。由於對足夠光滑的函數，傅立葉係數 c_k 的大小在 $|k| \to \infty$ 時會快速衰減，有限和 $z_N(t)$ 已能非常貼近原本的封閉曲線。

幾何上，可以想像每一項 $c_k e^{ikt}$ 是一個長度為 $|c_k|$、角速度為 k 的旋轉向量，而 $z_N(t)$ 則是這些向量首尾相接之後的端點。因此，任何封閉平面曲線（在適當的條件下）都可以被看成是一串相量與外擺線所生成的軌跡。



(a) $z(t) = A_1 e^{i(\omega_1 t+\phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t+\phi_2)}$ 所形成的相量圓形軌跡。Source: Desmos Fourier Epicycle Demo



(b) 一條封閉曲線所對應的外擺線相量軌跡。Source: Fourier Epicycles —Dynamic Math (Juan Carlos Ponce Campuzano)

線上互動工具。 要直觀理解「如何用相量畫出封閉曲線」，最好的方式是親自操作互動式外擺線工具。以下網站特別適合學生練習：

- **Fourier Epicycles —Dynamic Math (Juan Carlos Ponce Campuzano)** 以直觀的幾何介面呈現外擺線分解的互動式示範頁面。
- Desmos 外擺線示範：Fourier Epicycle Demo，透過幾個相量就能畫出看似複雜的封閉曲線。
- Complex Fourier Series Animation：顯示截斷傅立葉級數所產生的平面軌跡，讓使用者調整項數並觀察收斂情形。
- GeoGebra DFT Epicycles：利用離散傅立葉轉換（DFT）計算係數，再用相量重建封閉曲線。

透過這些工具，讀者可以直接「看到」：封閉平面曲線與傅立葉級數之間，其實就是一串外擺線的關係。

3.4 實值訊號的相量幾何

實際的聲音訊號 $x(t)$ 是實值函數。若其傅立葉級數為

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

則傅立葉係數會滿足共軛對稱性

$$c_{-k} = \overline{c_k}.$$

這個性質保證了級數的值始終為實數。

另一種等價的寫法是將實值訊號表示為多個正弦波的疊加：

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(kt + \phi_k) = \Re\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{i(kt+\phi_k)}\right).$$

這與傅立葉級數的複數形式完全一致；其中 c_k 與 $A_k e^{i\phi_k}$ 互相對應，而條件 $c_{-k} = \overline{c_k}$ 正說明了這些複係數共同組成一個實值訊號。

兩側傅立葉級數的幾何退化。 如果我們直接把

$$z_{\text{two}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

當作複平面上的相量和，會發現一個有趣的現象：由於 c_{-k} 是 c_k 的共軛，k 與 $-k$ 兩個相量的虛部會互相抵消，結果整個軌跡完全落在實軸上。換句話說，**對於實值訊號，兩側傅立葉級數的相量軌跡其實只是一條線**，並不形成真正的平面曲線。

這說明了為何在討論外擺線軌跡時，我們通常改用只包含正頻率的解析訊號（analytic signal）。

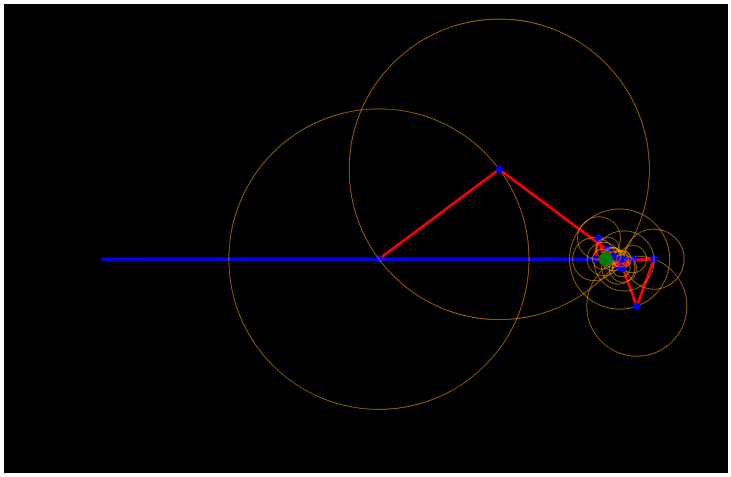


Figure 11: $z(t) = \sum_{-N}^{N-1} c_k e^{ikt}$, $c_{-k} = \overline{c_k}$ 所形成的相量軌跡僅落在實軸上。Source: Complex Fourier Series Animation

實值訊號與解析訊號。

給定實值訊號 $x(t)$，其對應的解析訊號可定義為

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

也就是只取傅立葉級數中的正頻率部分。此時 $z(t)$ 是一個真正的複值函數，其軌跡在複平面上形成一條二維的曲線，而原本的實值訊號則可由

$$x(t) = \Re\, z(t)$$

回復。

傅立葉分析是現代聲學的核心工具，它不僅解釋聲音如何組成，也讓我們能以幾何方式「看到」聲音的結構。

3.5 離散傅立葉轉換（Discrete Fourier Transform, DFT）

在數位時代中，我們經常處理離散資料。對於一個 2π-週期的訊號 $x(t)$，我們以等時間間隔對其取樣，取樣點數為 N，其時間步長為

$$\tau = \frac{2\pi}{N}.$$

亦即，取樣值為

$$x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, \qquad x_n = x(n\tau).$$

連續傅立葉係數

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

可由黎曼和近似為

$$\begin{aligned} c_k &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau)\, e^{-ikn\tau}\, \tau \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau)\, e^{-2\pi ikn/N}. \end{aligned}$$

這樣的近似自然引導出離散傅立葉轉換（discrete Fourier transform, DFT）的定義，其將取樣後的資料分解為 N 個離散的頻率成分：

$$X_k := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, e^{-2\pi ikn/N}, \qquad k = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1.$$

此一定義亦可延伸至所有整數 k。所得到的 X_k 在頻率指標 k 上具有週期 N：

$$X_{k+N} = X_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

訊號的反轉換（重建）可表示為

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, e^{2\pi i k n / N}.$$

其中指標 n 對應於離散時間點 $x(n\Delta t)$，而指標 k 則對應於第 k 個頻率成分 X_k。其幅值 $|X_k|$ 表示第 k 個頻率成分的振幅。

矩陣形式（Matrix Form） 令

$$\omega = e^{-2\pi i/N},$$

則離散傅立葉矩陣可寫成

$$F_N := \left[\omega^{kn}\right]_{k,n=0}^{N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}_{N\times N}.$$

令取樣向量與頻譜向量分別為

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}.$$

則 DFT 可寫成簡潔的矩陣形式：

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} F_N \mathbf{x}.$$

反傅立葉轉換（Inverse DFT） 其反轉換為

$$\mathbf{x} = \overline{F_N}^{\,T} \mathbf{X},$$

其中 $\overline{F_N}^{\,T}$ 表示 F_N 的共軛後再取轉置。

這可由下式直接驗證：

$$F_N\overline{F_N}^T = \left[\omega^{kn}\right]\left[\overline{\omega}^{\ell n}\right] = \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k n/N} e^{2\pi i \ell n/N}\right] = \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i(\ell-k)n/N}\right] = N I_{N\times N}.$$

最後一步的理由為：若 $\ell \neq k$，則

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i(\ell-k)n/N} = \frac{e^{2\pi i(\ell-k)N/N} - 1}{e^{2\pi i(\ell-k)/N} - 1} = 0.$$

若 $\ell = k$，則所有項皆為 1，因此

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i(\ell-k)n/N} = N.$$

3.6 短時間傅立葉轉換（Short-Time Fourier Transform, STFT）

假設連續訊號 $x(t)$ 以取樣頻率 f_s 進行取樣，得到離散序列 $x[n] = x(n/f_s)$。令 $w[n]$ 為一個離散的分析窗函數。具有跳步大小（hop size）H 與傅立葉長度 N 的短時間傅立葉轉換 (離散加窗傅立葉轉換) 定義為

$$X[m,k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n+mH]\, w[n]\, e^{-i2\pi kn/N}, \qquad 0 \le m \le M,$$

其中 m 為時間框（time frame）的索引，k 為頻率槽（frequency bin）的索引。對於每一個時間框，訊號先與窗函數 $w[n]$ 相乘，再進行一次離散傅立葉轉換。簡單來說，STFT 就是「把聲音分成一小段一小段，再對每一段做傅立葉分析」。

詮釋　對於每一個由 m 所標記的時間框，

$$x_m[n] = x[n+mH]\, w[n]$$

表示一段經過加窗後的短時間訊號，其中心時間約為 $t = mH/f_s$。對 $x_m[n]$ 進行快速傅立葉轉換（FFT），即可得到該時間附近的局部頻譜。

直觀地說，STFT 就像是在時間軸上用一個短「聆聽窗口」沿著聲音滑動，每一次只聽一小段聲音，並分析該瞬間包含了哪些頻率成分；如此一來，便能同時知道「什麼時候」出現了「哪些聲音」。

Part II

聲音與空間：波動、幾何與模態

4　振動的力學原理 (Mechanics of Vibration)

在前一節中，我們看到聲音源自於振動。現在，讓我們從牛頓運動定律 (Newton's laws of motion) 出發，探討這種振動如何以數學形式推導出來。我們再次考慮最簡單的振動模型 —— **質量–彈簧系統 (spring–mass system)**。

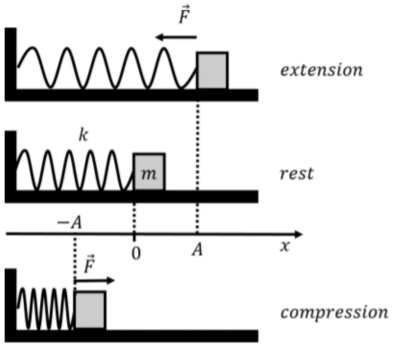
4.1　簡諧運動

假設一個質量為 m 的物體被固定在一條彈性常數 (spring constant) 為 k 的彈簧上。設 $u(t)$ 為該物體相對於平衡位置的水平位移。根據胡克定律 (Hooke's Law)，彈簧的回復力與位移成正比：

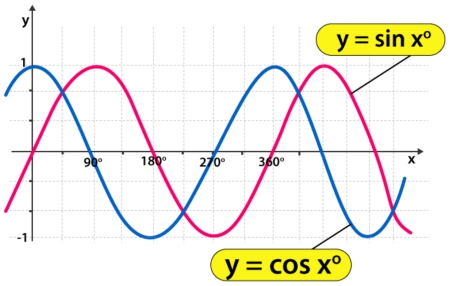
$$F = -ku.$$

負號表示力的方向總是與位移相反。應用牛頓第二定律 $F = m\ddot{u}$，我們得到微分方程：

$$m\ddot{u} + ku = 0.$$



(a) 彈簧–質量系統。



(b) 正弦與餘弦波。

Figure 12: 簡諧運動: displacement vs. time.

4.2　諧振子方程 (Harmonic Oscillator Equation)

將兩邊同除以 m，可得

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0.$$

這就是**簡諧振盪方程 (harmonic oscillator equation)**。其解為隨時間週期性重複的函數。若定義振動的自然角頻率 (natural frequency) 為

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

則一般解可以寫為

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

其中 A 與 ϕ 由初始位置與初始速度決定。這個結果早在第一節中已經出現，但此處我們清楚地看到它是直接源自牛頓定律。

4.3 速度、加速度與能量 (Velocity, Acceleration, and Energy)

對 $u(t)$ 進行微分，可得速度與加速度：

$$\dot{u}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \qquad \ddot{u}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 u(t).$$

加速度的方向永遠指向平衡位置，並且與位移成正比 —— 這正是簡諧運動的特徵。

系統的總機械能量保持不變，可寫為

$$E = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

顯示能量在動能與位能之間不斷轉換，但若無摩擦，總能量保持守恆。

4.4 疊加與線性性 (Superposition and Linearity)

簡諧振盪方程的一個重要特性是它具有線性性。若 $x_1(t)$ 與 $x_2(t)$ 都是該方程的解，則它們的任何線性組合

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

也是一個解。這個**疊加原理 (principle of superposition)** 使得複雜的振動可以由許多簡單的正弦波組合而成。

對許多物理系統而言 —— 例如弦、膜、或空氣柱 —— 振動都可以表現為若干 $\sin(\omega t)$ 或 $\cos(\omega t)$ 的疊加，每一項對應於一個獨立的振動模態 (mode of oscillation)。

4.5 邁向連續介質 (Towards Continuous Media)

彈簧—質量振子是振動的「原子模型」。若我們將許多這樣的質點以彈簧相連，且每個質點滿足相同的運動方程：

$$m_i \ddot{u}_i = k\big((u_{i+1} - u_i) + (u_{i-1} - u_i)\big),$$

然後令質點數目趨於無限，而間距 Δx 越來越小，此離散系統便近似為連續系統 —— 一條振動的弦。

在極限情況下，$u_i(t)$ 變成位置與時間的平滑函數 $u(x,t)$，而差分商

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

趨近於空間的二階導數 $u_{xx}(x,t)$。這自然導出著名的**波動方程 (wave equation)**：

$$\rho u_{tt} = T u_{xx},$$

其中 $T = \lim k\Delta x$ 為弦的張力 (tension)，$\rho = \lim \frac{m}{\Delta x}$ 為單位長度的質量密度 (mass density per unit length)。

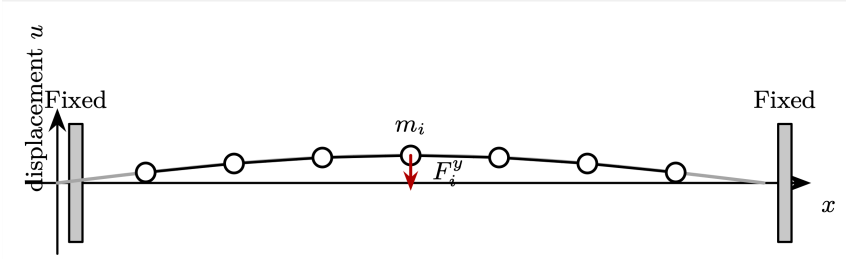


Figure 13: 小斜率近似 (small-slope approximation)：作用於質點 m_i 的恢復力包括 $F_{i+1/2} \approx k(u_{i+1} - u_i)$ 與 $F_{i-1/2} \approx k(u_{i-1} - u_i)$。

這種由單一振盪器到連續場的過渡，是物理學中最偉大的統一觀念之一。支配小提琴弦顫動的數學，也同樣描述光波、電磁輻射，甚至時空漣漪的行為。

5 振動的弦 (Vibrating Strings)

5.1 振動弦的基本概念 (Vibrating Strings)

當吉他弦或小提琴弦振動時，它的行為就像前面所說的彈簧—質量鏈 (spring–mass chain) 的連續版本。弦的回復力來自沿弦方向的張力 (tension) T，而慣性則來自弦的線密度 (linear mass density) ρ。設 $u(x,t)$ 表示弦在位置 x 和時間 t 時的微小垂直位移。根

據牛頓第二定律 (Newton's second law)，每一個極小弦段滿足

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

其中波速 (wave speed)

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

這就是著名的一維波動方程 (one-dimensional wave equation)。

5.2 駐波與邊界條件 (Standing Waves and Boundary Conditions)

考慮一條長度為 L、兩端固定的弦 (例如吉他弦)，這意味著邊界條件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

我們尋找空間與時間可分離的振動解：

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

代入 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 並除以 XT，得到

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2,$$

其中常數 $-\omega^2$ 選為負值，以產生振盪而非指數增長。

這導出兩個常微分方程：

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \qquad X''(x) + k^2 X(x) = 0,$$

其中

$$k^2 = \omega^2 / c^2。$$

其中 k 為波數，ω 為角頻率，而 ω 與 k 之間的函數關係稱為色散關係。

5.3 駐波模態與量化頻率 (Standing-wave Modes and Quantized Frequencies)

空間部分 $X(x)$ 必須滿足邊界條件 $X(0) = X(L) = 0$。非平凡解僅在特定的 k 值下存在：

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

對應的駐波模態為

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

而角頻率為

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}.$$

因此，模態 n 對應於波動方程的駐波解：

$$u_n(x,t) = A\sin(\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

弦上因此支撐一系列諧波頻率 (harmonic frequencies)，其比例為 $1:2:3:\square$。這些正是豐富樂器音色的**泛音 (overtones)**。

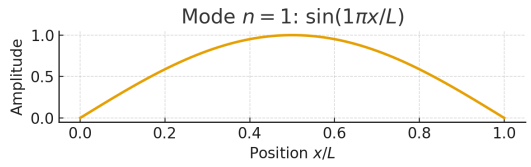
模態 n 也可寫為

$$u_n(x,t) = (a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

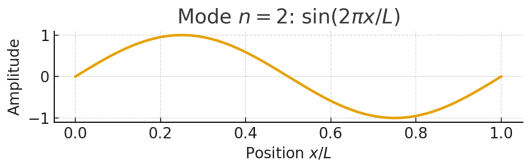
弦的整體運動是所有模態的疊加：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

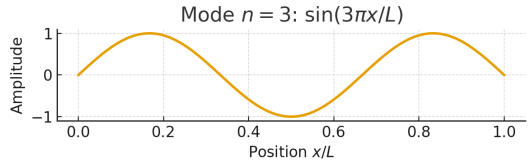
其中常數 a_n, b_n 由弦的初始形狀與速度決定。



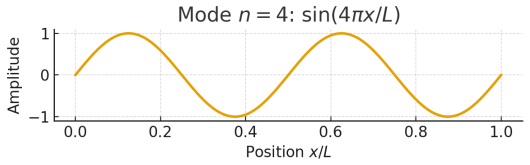
(a) $n = 1$: $\sin(\pi x/L)$，$\omega_1 = \pi\dfrac{c}{L}$。



(b) $n = 2$: $\sin(2\pi x/L)$，$\omega_2 = 2\pi\dfrac{c}{L}$。



(c) $n = 3$: $\sin(3\pi x/L)$，$\omega_3 = 3\pi\dfrac{c}{L}$。



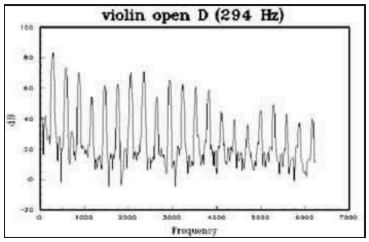
(d) $n = 4$: $\sin(4\pi x/L)$，$\omega_4 = 4\pi\dfrac{c}{L}$。

Figure 14: 固定兩端之拉緊弦的前四個正常模態 (normal modes)。

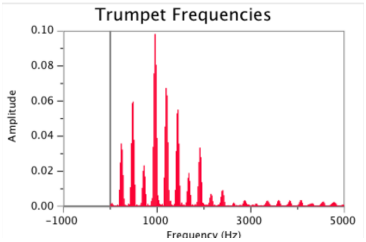
5.4 駐波模態與諧波泛音

每一個駐波模態

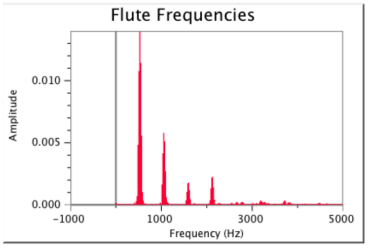
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



(a) 小提琴的頻率分佈。



(b) 小號的頻率分佈。



(c) 長笛的頻率分佈。

Figure 15: 不同樂器的音色示意圖。在理想的一維弦模型中，角頻率 ω_n 為基頻 ω_1 的整數倍。不同樂器對諧波的強調程度不同，因而產生各異的音色。

都對應於弦上的一個駐波（*standing wave*）。此駐波在弦上具有 $n-1$ 個內部節點（nodes），亦即在振動過程中保持靜止的位置。這些節點將弦分割成若干段，各段以交替的相位振動。

例如：

$$\begin{aligned} n=1: &\quad \text{基頻模態，弦上形成半個波長；} \\ n=2: &\quad \text{第一泛音，一個完整波長；} \\ n=3: &\quad \text{第二泛音，一個半波長；} \\ n=4: &\quad \text{第三泛音，兩個完整波長。} \end{aligned}$$

隨著模態數 n 的增加，弦上的節點數目也隨之增加，而對應的振動頻率亦變得更高。

一維系統中的諧波泛音。 拉緊的弦具有一個關鍵特性：其允許的角頻率為

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

也就是基頻 ω_1 的整數倍：

$$\omega_n = n\,\omega_1.$$

這樣的頻率序列稱為諧波（*harmonic*），而較高的模態則稱為 諧波泛音（*harmonic overtones*）。

這種諧波結構是由一維幾何與固定端點邊界條件直接導出的結果，也是為何弦樂器能自然產生具有清晰且穩定音高的音樂聲音。

在實際樂器中，我們聽到的聲音是這些諧波的疊加，但各個諧波的振幅大小並不相同。這些諧波之間的相對強度決定了樂器的音色（*timbre*）。

6 振動的鼓膜：二維振動 (Vibrating Drums: Two-Dimensional Vibration)

6.1 從弦到鼓 (From Strings to Drums)

一面被拉緊的鼓膜 (membrane) 會在兩個空間方向上振動。若以 $u(x,y,t)$ 表示其垂直位移，則其運動滿足二維波動方程 (two-dimensional wave equation)：

$$\rho\, u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) = T\nabla^2 u,$$

或等價地寫作：

$$u_{tt} = c^2\nabla^2 u, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho},$$

其中 T 為張力 (tension)，ρ 為面密度 (mass per unit area)，∇^2 為拉普拉斯算子 (Laplacian operator)。

若假設可分離解 $u(x,y,t) = T(t)U(x,y)$，代入上式可得：

$$T''U = c^2\nabla^2 U \quad \Rightarrow \quad \frac{T''}{T} = c^2\frac{\nabla^2 U}{U} = -\omega^2 \text{ (常數)}.$$

因此分別得到：

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \qquad (\nabla^2 + k^2)U = 0,$$

其中 $k^2 = \omega^2/c^2$。此空間部分的方程 $(\nabla^2 + k^2)U = 0$ 稱為**亥姆霍茲方程 (Helmholtz equation)**，其解型態取決於振動區域的幾何形狀。

—

6.2 矩形鼓 (Rectangular Drum)

若鼓面為矩形，邊長為 L_X 與 L_Y，使用分離變數法 (separation of variables)，假設 $U(x,y) = X(x)Y(y)$，代入亥姆霍茲方程與邊界條件，可得：

$$U_{mn}(x,y) = \sin\!\left(\frac{m\pi x}{L_X}\right)\sin\!\left(\frac{n\pi y}{L_Y}\right), \quad m,n = 1,2,\ldots$$

因此：

$$\nabla^2 U_{mn} = -\left[\left(\frac{m\pi}{L_X}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_Y}\right)^2\right] U_{mn},$$

而時間部分滿足：

$$T'' + \omega_{mn}^2 T = 0, \quad \text{其中} \quad \omega_{mn} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_X}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_Y}\right)^2}.$$

因此振動解為：

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} \cos(\omega_{mn} t + \phi_{mn}) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_X}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_Y}\right), \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

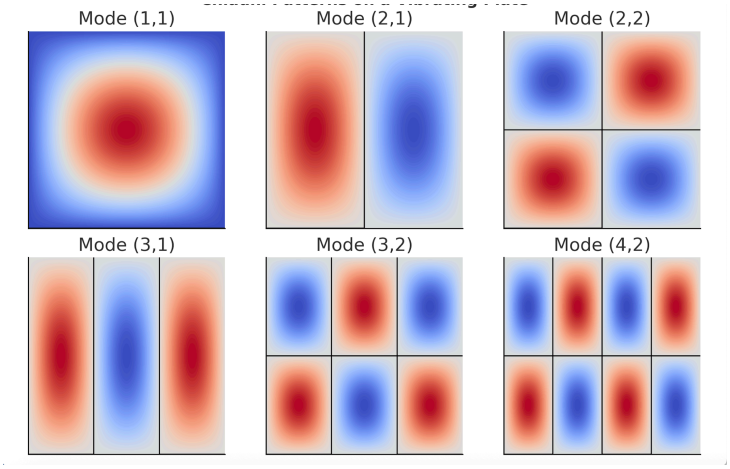


Figure 16: 方形鼓的特徵模態 (eigenmodes)。

—

6.3 圓形鼓 (Circular Drum)

若鼓面為圓形，半徑為 R，我們改用極座標 (polar coordinates) (r, θ)。其解可寫為：

$$u_{mn}(r, \theta, t) = A_{mn} \cos(\omega_{mn} t + \phi_{mn}) J_m\left(\frac{\alpha_{mn} r}{R}\right) \begin{cases} \cos(m\theta), \\ \sin(m\theta), \end{cases}$$

其中 J_m 為第一類貝索函數 (Bessel function of the first kind)，而 α_{mn} 為其第 n 個零點，滿足 $J_m(\alpha_{mn}) = 0$。

振動頻率為：

$$\omega_{mn} = \frac{c}{R}\alpha_{mn}.$$

—

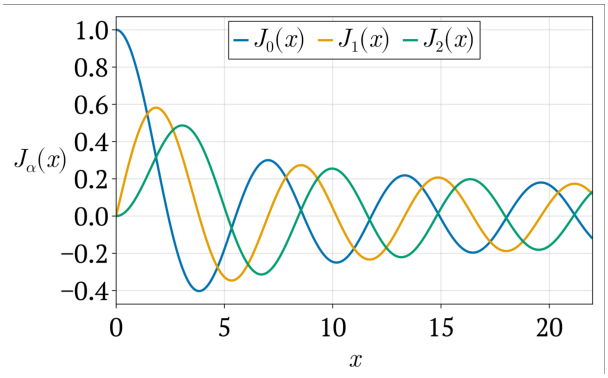


Figure 17: Bessel function. Each J_m has infinite many zeros $\alpha_{mn}, n \geq 1$. (Source: Bessel_function, wiki)

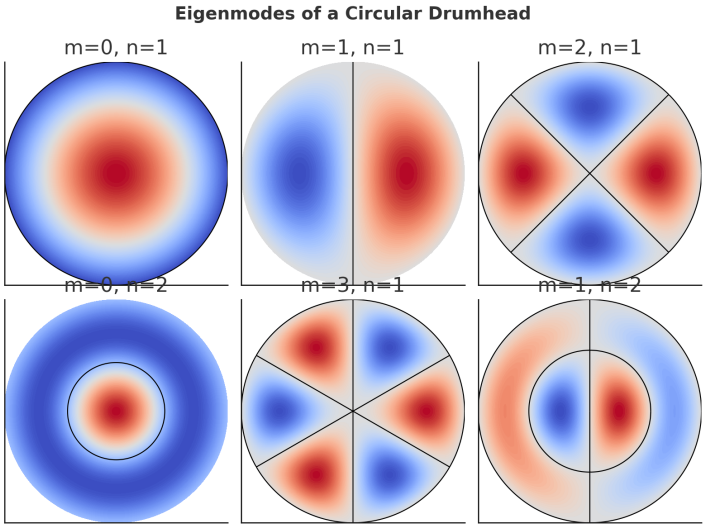


Figure 18: 圓形鼓的特徵模態 (eigenmodes)。

6.4 泛音與非諧性 (Overtones and Inharmonicity)

對於圓形鼓，其振動頻率可寫為：

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{c}{2\pi R}\alpha_{mn},$$

其中 α_{mn} 為貝索函數 J_m 的零點。

不同於弦的諧波頻率滿足 $f_n = nf_1$，序列 $\{\alpha_{mn}\}$ 並非均勻間隔。例如：

$$\alpha_{01} = 2.4048, \quad \alpha_{11} = 3.8317, \quad \alpha_{21} = 5.1356, \quad \alpha_{02} = 5.5201.$$

由此可得頻率比：

$$\frac{f_{11}}{f_{01}} \approx 1.59, \quad \frac{f_{21}}{f_{01}} \approx 2.14, \quad \frac{f_{02}}{f_{01}} \approx 2.30.$$

因此鼓的泛音是**非諧和的 (inharmonic)**—— 它們不是基頻的整數倍。這種非諧性解釋了鼓聲的特有打擊音色 (percussive timbre)。例如定音鼓 (timpani) 的設計者會藉由調整張

力與邊界形狀，使最低幾個模態近似整數比，以產生較明確的音高。

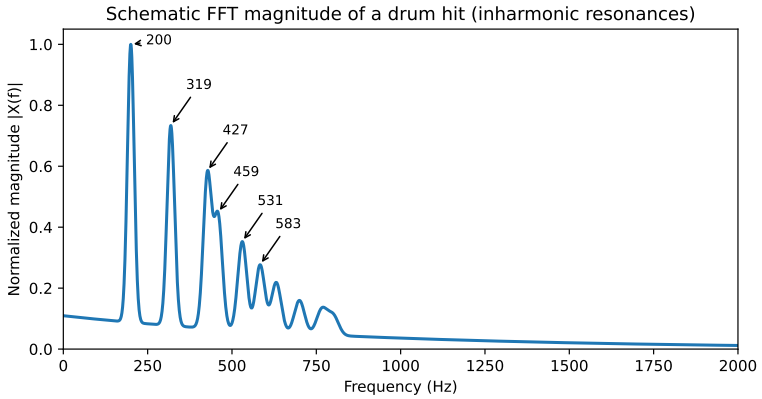


Figure 19: 鼓聲敲擊的頻譜幅度示意圖 $|X(f)|$。圖中的峰值對應於鼓膜與鼓體的共振模態，且為非諧波：其頻率並非最低模態頻率的整數倍。由於阻尼效應在高頻更為顯著，高頻峰值通常具有較小的振幅與較寬的峰寬。注意到 $319/200 \approx 1.59$、$427/200 \approx 2.14$，依此類推。

—

7　從房間到音樂廳：聲音與空間的數學

聲波並非只沿著弦或薄膜傳播；它們會充滿整個三維空間。當我們在房間中說話、演奏音樂或拍手時，聲音會向外輻射，並與牆壁、天花板以及各種物體產生交互作用。本節將探討振動與波動的數學，如何幫助我們設計不同尺度的空間——從教室到音樂廳——以塑造我們實際所聽到的聲音效果。

7.1　三維波動方程

在空氣中，聲音是一種縱波：壓力 $p(x, y, z, t)$ 的微小變化會在介質中傳播，其演化遵循

$$p_{tt} = c^2 \nabla^2 p,$$

其中 $c \approx 343\ \mathrm{m/s}$ 為空氣中的聲速，而 ∇^2 表示三維拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

此方程支配所有聲波的傳播行為，無論是在開放空間中的空氣，或是在房間、禮堂等有限空間內。

7.2　邊界條件與駐波

當聲波傳播至牆面時，其中一部分會被反射，另一部分則會被牆面材料吸收。若牆面可視為完全剛性，則牆面法向方向上的空氣速度為零，對應到壓力所滿足的 *Neumann* 邊界條件：

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{於牆面上.}$$

若牆面能完全吸收聲音（理想化的軟邊界），則可施加 *Dirichlet* 邊界條件 $p = 0$。實際的建築材料通常介於這兩種極端之間，可透過混合型或阻抗邊界條件來建模。

反射波可以與入射波產生建設性或破壞性的干涉。當反射作用強化某些特定頻率時，封閉空間中便會出現 共振模態（resonant modes），通常稱為 室內模態（room modes）。這些共振對應於聲學中的駐波，並在室內聲學中扮演核心且關鍵的角色。

駐波可以透過變數分離法加以推導。我們尋求聲波方程的解，其形式為

$$p(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)\, T(t)。$$

將此形式代入波動方程，可得

$$\ddot{T}(t)\, \phi(x, y, z) = c^2\, T(t)\, \Delta\phi(x, y, z),$$

其中 c 表示聲速。將等式兩邊同時除以 $T(t)\phi(x,y,z)$，得到

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\Delta\phi(x,y,z)}{\phi(x,y,z)}。$$

左邊僅依賴於時間變數，而右邊僅依賴於空間座標。因此，兩邊必須等於同一常數：

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\Delta\phi(x,y,z)}{\phi(x,y,z)} = \text{常數}。$$

由物理考量可知，只有非正的常數才會對應於有界且具振盪性的解。因此，我們將此常數取為 $-\omega^2$，其中 $\omega \in \mathbb{R}$。

時間方向上的方程可化為

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t),$$

其解描述的是簡諧振盪。一個典型的解為

$$T(t) = Ae^{i\omega t},$$

代表具有角頻率 ω 的單一頻率聲學訊號。

相對應的空間方程為 *Helmholtz* 方程，

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0, \qquad k := \frac{\omega}{c},$$

此方程決定了聲壓在空間中的分佈。對於具有剛性（聲學上為硬邊界）的房間，適當的邊界條件為 Neumann 邊界條件，

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0,$$

其物理意義為牆面法向方向上的粒子速度為零。

由於房間是一個有限的空間區域，Helmholtz 方程僅在波數 k 取離散值時才存在解。這些離散的波數決定了室內模態，並對應於一組離散的共振角頻率，其關係為

$$\omega = c\,k。$$

7.3 長方形房間的模態

考慮一個尺寸分別為 L_x、L_y 與 L_z，且牆面為剛性邊界的長方形房間。其聲壓的本徵函數可寫為

$$\phi_{mnl}(x,y,z) = \cos\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big)\cos\Big(\frac{l\pi z}{L_z}\Big), \quad m,n,,l = 0,1,\ldots,$$

對應的 Laplace 算子之特徵值（亦即波數的平方）為

$$-k_{mnl}^2 = -\left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2\right]。$$

其所對應的特徵頻率為

$$f_{mnl} = \frac{c\,k_{mnl}}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l}{L_z}\right)^2}, \qquad m, n, l = 0, 1, 2, \ldots.$$

每一組指數 (m, n, l) 都定義了房間內一個特定的空間駐波型態。在低頻範圍中，低階模態（m, n, l 較小）對房間的聲學特性具有主導影響，會在空間中形成聲音加強與抵銷的區域，聽者往往將其感知為「轟鳴」（boomy）或「死點」（dead spots）。

7.4 從幾何到聽覺經驗

正如鼓膜的形狀會決定其聲譜特性，房間的幾何結構與材料性質同樣決定了聲波在其中的演化方式。在此意義下，數學與建築之間的交會不僅是一項工程問題，也構成了一門關於聲音體驗的設計藝術：透過空間的塑造，使空氣中的波動轉化為可感知的聽覺效果。

現代聲學設計廣泛運用 Helmholtz 方程的數值模擬以及射線追蹤模型，以視覺化聲學能量在複雜空間中的傳播與分布情形。

7.5 數學、音樂與意義

從單一振盪器所產生的正弦波，到整座音樂廳所展現的共振結構，支配聲音行為的始終是同一組數學思想。微分方程描述其物理機制；本徵模態揭示其內在結構；傅立葉分析則將聽覺知覺與頻率成分緊密連結。所改變的，僅是尺度的大小——從耳蝸中微米等級的結構，到音樂廳中數十公尺的空間尺度。

數學不僅用來解釋聲音，也使我們能夠塑造聲音。當你下一次站在音樂廳中，感受音樂充滿整個空間時，不妨記得，每一道回聲與每一個和聲，皆是同一條簡單方程的解：

$$p_{tt} = c^2 \nabla^2 p.$$

聲音之美的背後，蘊含著幾何、對稱性，以及數學所刻畫的無形節律。

8 你能聽出鼓的形狀嗎？(Can You Hear the Shape of a Drum?)

8.1 Kac 的問題 (Mark Kac's Question)

1966 年，數學家 Mark Kac 提出了一個著名的問題：「你能聽出鼓的形狀嗎？」在數學上，「鼓」指的是平面區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，其邊界固定 (Dirichlet boundary conditions)。其微小振動滿足波動方程 (wave equation)：

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{在 } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

其中 $c = \sqrt{T/\rho}$ 為波速。若尋求形如 $u(x, y, t) = \phi(x, y)\cos(\omega t)$ 的振動解，則可化為空間部分的 Dirichlet 特徵值問題 (eigenvalue problem)：

$$-\Delta\phi = \lambda\phi \quad \text{在 } \Omega, \qquad \phi|_{\partial\Omega} = 0.$$

允許的角頻率為 $\omega = c\sqrt{\lambda}$。所有特徵值 $\{\lambda_k\}$ 按大小排列為：

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \to \infty.$$

這個集合稱為 **區域 Ω 的頻譜 (spectrum)**。Kac 的問題即是：頻譜能否唯一決定鼓的形狀？

—

8.2 Weyl 定律：從頻譜聽出面積 (Weyl's Law: Hearing the Area)

設 $N(\lambda)$ 為特徵值的計數函數：

$$N(\lambda) := \#\{\, k : \lambda_k \le \lambda \,\}.$$

Hermann Weyl 在 1911 年證明：當 $\lambda \to \infty$ 時，

$$N(\lambda) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi}\lambda \quad \text{(Dirichlet 或 Neumann 邊界條件).}$$

因此，從頻譜的增長率，我們可以「聽出」鼓的面積。更精確的漸近式還包含邊界效應。對於光滑或分段光滑的邊界，有二項展開式：

$$N(\lambda) = \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi}\lambda \mp \frac{\text{Perimeter}(\partial\Omega)}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}),$$

其中負號對應 Dirichlet 條件，正號對應 Neumann。因此理論上也能從第二項「聽出」周長。

—

8.3 熱跡與幾何指紋 (Heat Trace and Geometric Fingerprints)

另一個有力的觀點來自熱方程 (heat equation) $u_t = \Delta u$ 及其熱跡函數：

$$Z(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}.$$

當 $t \downarrow 0$ 時，$Z(t)$ 有漸近展開式，其係數包含幾何資訊。在二維情況下 (光滑邊界)：

$$Z(t) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi t} - \frac{\text{Perimeter}(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{\kappa(\partial\Omega)}{12\pi} + \cdots,$$

其中 $\kappa(\partial\Omega)$ 為邊界總曲率。對於多邊形邊界，角點亦會帶來額外項。因此，面積、周長以及某些曲率積分都是**頻譜不變量 (spectral invariants)**—— 可由頻譜「聽出」。

—

8.4 能否聽出形狀？(Can You Really Hear the Shape?)

儘管頻譜與幾何有深刻聯繫，但一般情況下形狀**無法唯一由頻譜決定**。1992 年，Gordon、Webb 與 Wolpert 構造出兩個不同的平面區域，它們具有完全相同的 Dirichlet 頻譜 —— 稱為**等頻譜但非全等 (isospectral but non-congruent)** 範例。因此，對 Kac 的問題，答案通常是「不」：不同形狀可能「聽起來」一樣。

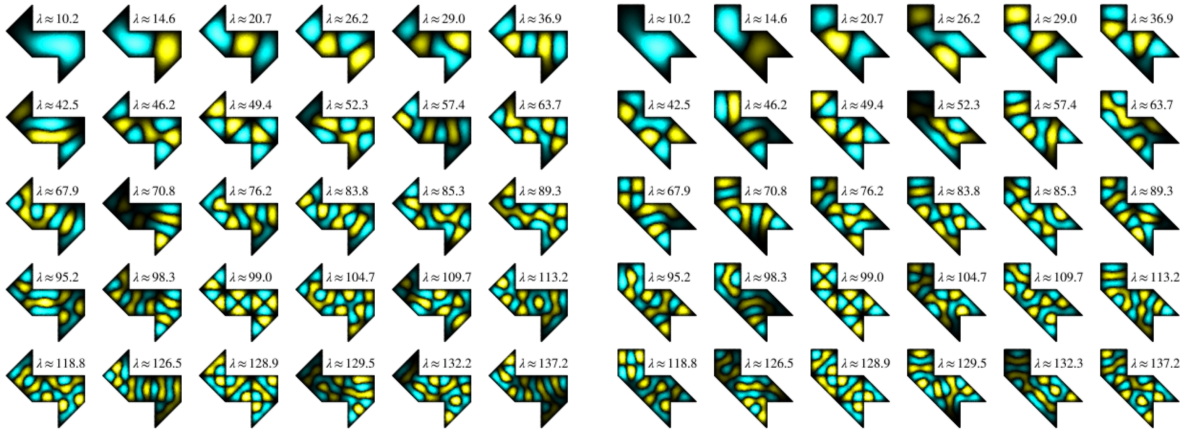


Figure 20: 兩個不同形狀但頻譜相同的區域 (出自 “Hearing the Shape of a Drum” 文章)。

—

8.5 頻譜能告訴我們什麼？(What Is Determined by the Spectrum)

雖然形狀不唯一，但許多幾何量仍能由頻譜決定：

- 面積 (area)：由 Weyl 定律的主項決定；
- 周長 (perimeter)：由次主項或熱跡的第二項決定；
- 對多邊形，角點的角度會在熱跡中留下獨特「指紋」；
- 拓樸結構 (connectivity, holes) 會影響低階特徵值與模態分佈。

直覺地說，高階特徵值反映局部幾何 (短波長探測細節)，低階特徵值則反映整體形狀與拓樸 (長波長探測全局)。

—

8.6 對聲音與成像的啟示 (Takeaway for Sound and Imaging)

在聲學乃至成像領域，頻譜揭示了物體的隱藏結構：它能告訴我們大小、邊界與材質特性。但正如兩個不同的鼓可能是等頻譜的，兩張不同的影像也可能共享相同的直方圖或某種轉換結果。要「看見」完整形狀，往往需要多重資訊 —— 例如不同邊界條件、多種測量或動態資料。

這個洞見激發了現代的**反問題 (inverse problems)** 與**譜方法 (spectral methods)**，廣泛應用於醫學影像與機器學習 (machine learning) 中，藉由多重測量重建整體結構。

歷史註：Kac 的問題催生了譜幾何 (spectral geometry) 這門學科，連結分析、幾何與物理。研究「幾何如何影響頻譜、頻譜如何限制幾何」的課題，至今仍在數學與工程領域持續發展。

Part III

音色與共振濾波

9 長笛的音色：一維共振器

9.1 聲源–共振器的觀點

聲音的音色（timbre）是一種知覺特性，使我們能夠在音高與響度相同的情況下，分辨由不同聲源所產生的聲音。從物理與數學的角度來看，音色主要由聲音訊號的頻譜包絡（spectral envelope）所決定，亦即聲學能量隨頻率分布的方式，而這種分布是由聲源與樂器之共振結構之間的相互作用所塑造的。

在數學上，這種關係可表示為

$$X(\omega) = H(\omega)\, S(\omega),$$

其中

- $S(\omega)$ 表示聲源的頻譜，
- $H(\omega)$ 表示共振器的傳遞函數，
- $X(\omega)$ 表示輸出的頻譜。

所輻射出的聲音之頻譜包絡，定義為 $|X(\omega)|$ 經適當平滑（smoothing）後的幅值分佈。

在各種樂器之中，長笛提供了一個極為清楚的例子，說明音色如何透過一個近似為一維的聲學共振器而形成。由於其數學結構相對簡單，長笛成為理解共振結構如何塑造頻譜包絡的理想起點。

9.2 氣流激發與聲源頻譜

在以聲源–濾波器分解 $X(\omega) = H(\omega)S(\omega)$ 介紹音色之後，我們首先探討長笛中聲源頻譜 $S(\omega)$ 的起源。與弦樂器或簧片樂器不同，長笛並不存在任何振動的固體元件；其發聲機制是由一股細長的氣流噴射，橫跨吹口處的銳利邊緣所驅動的。

長笛管內的微小聲壓擾動會在吹口處與氣流相互作用，使氣流在向邊緣對流的過程中產生橫向偏折。當氣流撞擊吹口邊緣時，這些偏折會調制進入管內的體積流量，進而產生聲壓起伏。此一氣流–邊緣的交互作用形成了一個自持的回饋機制：聲學場激發氣流，而氣流又反過來向聲學場注入能量。

在繞定常氣流狀態進行線性化之後，氣流–邊緣機制可視為一個寬頻的聲學聲源。其在頻率域中的表現即定義了聲源頻譜 $S(\omega)$。與弓弦樂器中具有明顯諧波結構、且振幅大致隨 $1/k$ 衰減的激發機制不同，長笛中的氣流聲源產生的是一個相對平滑的頻譜，僅呈現溫和的頻率依賴性。高頻成分會因黏滯效應與氣流動力學而逐漸衰減，但聲源本身並未施加任何強烈的諧波規律。

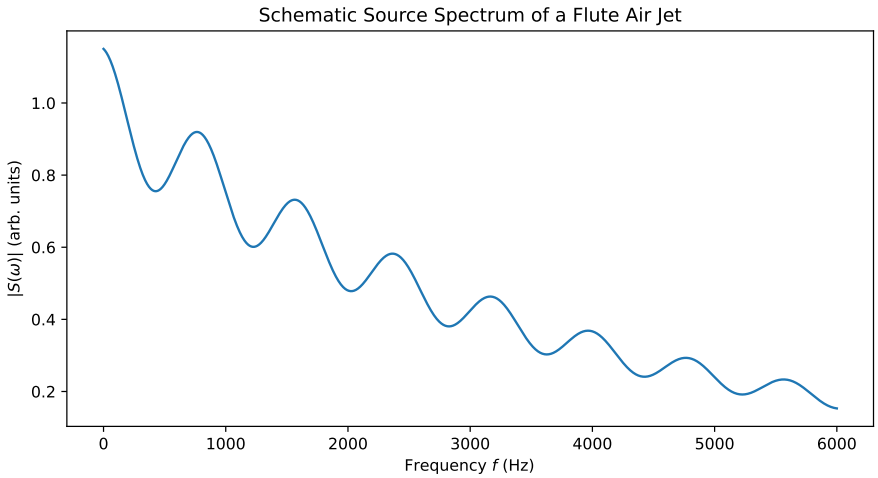


Figure 21: 長笛氣流聲源頻譜幅值 $|S(\omega)|$ 的示意圖。此頻譜呈現寬頻特性，高頻端緩慢衰減，且僅具有微弱的結構，反映出缺乏振動固體元件的特性。因此，輻射聲音中各諧波之間的細緻平衡，主要是由長笛管內的共振傳遞函數所塑造。

由於聲源頻譜 $S(\omega)$ 隨頻率變化相當平滑，長笛特有的音色主要由空氣柱的共振濾波作用所主導。因此，接下來我們將轉而討論長笛管內的共振性質，以及對應的傳遞函數 $H(\omega)$。

9.3 長笛的一維共振器模型

當噴流所產生的寬頻源頻譜 $S(\omega)$ 形成之後，最終的聲音會受到長笛內部共振氣柱的調制與塑形。在一階近似下，長笛的管腔（bore）可被視為一維聲學波導。

令 $x \in [0, L]$ 表示沿著一根具有恆定橫截面積 A 的圓柱形管道之軸向座標。設 $p(x,t)$ 為聲壓擾動，$U(x,t) = A\,u(x,t)$ 為體積流率（volume velocity）。線性聲學給出以下控制方程：

$$\partial_t p + \frac{\rho_0 c^2}{A}\,\partial_x U = 0, \qquad \partial_t U + \frac{A}{\rho_0}\,\partial_x p = -\eta U.$$

第一個方程為（線性化的）連續方程，源自質量守恆定律；第二個方程則是牛頓運動定律。其中項 $-\eta U$ 用以描述由黏滯效應與邊界層作用所導致的摩擦（耗散）效應。

藉由消去體積流率 U，可將上述方程組合併為聲壓所滿足的波動方程：

$$\partial_{tt} p + \eta\,\partial_t p - c^2\,\partial_{xx} p = 0.$$

邊界條件　對於一端封閉、一端開放的配置（即封閉管，stopped pipe），其邊界條件為

$$\text{開口端：}\quad p = 0, \qquad \text{封閉（剛性）端：}\quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0\text{。}$$

Remark 9.1 (開口端的輻射邊界條件). 在開口端施加 $p = 0$ 的邊界條件是一種理想化的近似。從物理上而言，開放端並不會嚴格地強制聲壓為零；相反地，管內的聲場會透過聲波輻射與外部空氣中的聲場相互耦合。

較為精確的描述是採用 輻射（阻抗）邊界條件，其將開口端（$x = L$）的聲壓與體積流率關聯起來：

$$\widehat{p}(L, \omega) = Z_{\text{rad}}(\omega)\, \widehat{U}(L, \omega),$$

其中 $Z_{\text{rad}}(\omega)$ 為開口端的輻射阻抗。此阻抗具有頻率相依性，並同時反映了聲能輻射以及反應性端部效應。

在低頻極限下，當聲波波長遠大於管徑時，$Z_{\text{rad}}(\omega)$ 相較於管道的特性阻抗而言相當小。在此情形下，開口端的聲壓擾動近似為零，因此採用簡化的邊界條件

$$p(L, t) \approx 0$$

即可對共振頻率與模態形狀提供相當準確的近似。

然而，在較高頻率下，輻射阻抗會引入能量損失與相位位移，進而導致模態阻尼以及共振頻率的微小偏移。這些效應通常以現象學的方式，透過在傳遞函數表示中引入與模態相關的阻尼項來加以描述。

9.4　長笛的駐波與共振傳遞函數

駐波模態　我們尋找聲波方程的時間諧波解，其形式為

$$p(x, t) = \Re\{\phi(x) e^{i\omega t}\}.$$

套用變數分離法可得到 Helmholtz 方程

$$\phi''(x) + k^2 \phi(x) = 0, \qquad k = \frac{\omega}{c},$$

其中 c 表示聲速。

對於一端封閉、一端開放的配置（封閉管，stopped pipe），空間模態函數 ϕ 滿足以下邊界條件：

$$\phi'(0) = 0 \ \text{（剛性端）}, \qquad \phi(L) = 0 \ \text{（開口端）}.$$

這些條件分別表達了封閉端處粒子速度為零，以及開口端處近似的聲壓節點。

由此得到的特徵值問題具有一組離散的駐波模態：

$$\phi_n(x) = \cos\!\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right), \qquad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

這些模態對應於四分之一波長共振。因此，系統僅支援基頻的奇次諧波。此種共振結構是封閉管的典型聲學特徵，並構成下一小節中所推導之長笛管腔傳遞函數的模態基礎。

模態展開　我們將聲壓以駐波特徵模態展開為

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,\phi_n(x), \tag{9.1}$$

其中 $q_n(t)$ 為各模態的振幅函數。

將展開式 (9.1) 代入含耗散項的波動方程 (**??**)，再乘以 $\phi_n(x)$，並在區間 $(0, L)$ 上積分，同時利用特徵函數族 $\{\phi_n\}$ 的正交性，可得到每一個模態座標所滿足的相互解耦之二階常微分方程：

$$\ddot{q}_n(t) + \eta\,\dot{q}_n(t) + \omega_n^2\,q_n(t) = 0, \qquad \omega_n := \frac{(2n-1)\pi c}{2L}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9.2}$$

因此，每一個模態的行為皆可視為一個輕微阻尼的簡諧振盪器，其自然角頻率 ω_n 由管腔長度與邊界條件所決定。

聲源的引入方式　為了定義 傳遞函數，必須先明確指定一組輸入與輸出變數。從工程觀點來看，一個自然且常用的選擇為：

- 輸入：噴口（embouchure）處的有效聲源頻譜 $\widehat{S}(\omega)$，用以表示由氣流噴射所產生的聲學激發；
- 輸出：開口端所輻射的聲壓或體積流率（或與其成線性關係的任一可觀測量），其頻譜記為 $\widehat{X}(\omega)$。

在偏微分方程層次上，一種方便且數學上清楚的方式來描述噴口激發，是將一個外力項加入含耗散的波動方程中：

$$\frac{1}{c^2}\,\partial_{tt}p(x,t) - \partial_{xx}p(x,t) + \frac{\eta}{c^2}\,\partial_t p(x,t) = f(x,t), \tag{9.3}$$

其中 $f(x,t)$ 表示由噴流與吹口邊緣（jet–labium）相互作用所產生的淨聲學驅動。

當激發在空間上局限於噴口附近時，常將其理想化為位於 $x = x_s$ 的點聲源（其中 x_s 接近開口端）：

$$f(x,t) = \alpha\,S(t)\,\delta(x - x_s), \tag{9.4}$$

此處 $S(t)$ 為有效聲源訊號，α 為耦合係數，其單位選取使得方程 (9.3) 在量綱上保持一致。

將受迫波動方程 (9.3) 投影至特徵模態 ϕ_n 上，即可得到對應的 受迫模態方程：

$$\ddot{q}_n(t) + \eta\,\dot{q}_n(t) + \omega_n^2\,q_n(t) = F_n(t), \tag{9.5}$$

其中模態的受迫項 $F_n(t)$ 定義為

$$F_n(t) = \frac{\displaystyle\int_0^L f(x,t)\,\phi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \phi_n(x)^2\,dx}.$$

此結果可直接由特徵函數族 $\{\phi_n\}$ 在區間 $(0,L)$ 上的正交性導出。

對於局部化聲源模型 (9.4)，

$$f(x,t) = \alpha\,S(t)\,\delta(x - x_s),$$

模態受迫項可化簡為

$$F_n(t) = \alpha\,S(t)\,\frac{\phi_n(x_s)}{\|\phi_n\|^2_{L^2(0,L)}},$$

此式清楚地顯示噴口激發如何透過空間重疊因子 $\phi_n(x_s)$，耦合至各個聲學模態之中。

頻域解與模態傳遞函數　對受迫模態方程 (9.5) 進行時間上的傅立葉轉換（以帽號表示），可得

$$\widehat{q}_n(\omega) = \frac{\widehat{F}_n(\omega)}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\,\eta\,\omega}. \tag{9.6}$$

為了定義一組輸入–輸出關係，我們選擇輸出 $X(t)$ 為聲學場 $p(\cdot,t)$ 的一個線性可觀測量。常見的選擇包括某一觀測點處的聲壓，或開口端的體積流率。為了簡化討論，本文取

$$X(t) = p(x_o,t),$$

其中 x_o 為固定的觀測位置。

利用模態展開式 (9.1)，輸出訊號的頻譜可寫為

$$\widehat{X}(\omega) = \widehat{p}(x_o,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{q}_n(\omega)\,\phi_n(x_o).$$

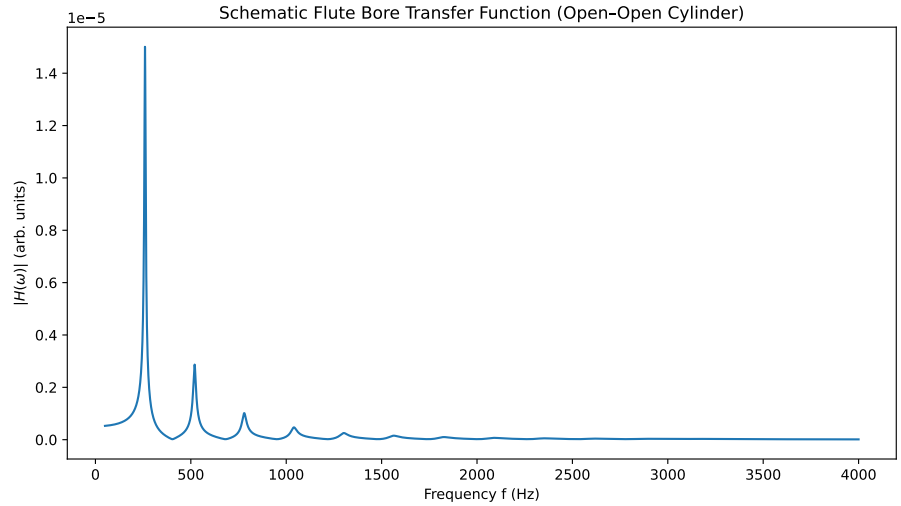
將式 (9.6) 以及模態受迫項的表達式代入，可得

$$\widehat{X}(\omega) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\,\eta\,\omega} \right) \widehat{S}(\omega), \qquad C_n := \alpha\, \frac{\phi_n(x_s)\phi_n(x_o)}{\|\phi_n\|^2_{L^2(0,L)}}. \tag{9.7}$$

因此，長笛管腔的傳遞函數可表示為以下模態展開形式：

$$\boxed{H(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\,\gamma_n \omega},} \tag{9.8}$$

其中 γ_n 表示第 n 個模態的有效阻尼係數。在最簡單的集中損失模型中，有 $\gamma_n \equiv \eta$；而在更一般的情況下，若考慮開口端的頻率相依輻射阻抗以及黏滯熱邊界層損失，則各模態將具有不同的阻尼係數，並伴隨著微小的共振頻率偏移，這些效應皆可透過式 (9.8) 的現象學描述加以良好刻畫。




```
Illustrative open–open bore modes (first 6):
n=1: f_n=260 Hz, Q≈40, γ_n=41 rad/s, C_n=1.00
n=2: f_n=520 Hz, Q≈38, γ_n=86 rad/s, C_n=0.80
n=3: f_n=780 Hz, Q≈36, γ_n=135 rad/s, C_n=0.67
n=4: f_n=1039 Hz, Q≈35, γ_n=189 rad/s, C_n=0.57
n=5: f_n=1299 Hz, Q≈33, γ_n=249 rad/s, C_n=0.50
n=6: f_n=1559 Hz, Q≈31, γ_n=317 rad/s, C_n=0.44
```

Figure 22: 長笛管道轉移函數 $|H(\omega)|$ 幅值的示意圖，顯示出規則排列的共振峰，且在較高頻率處阻尼逐漸增加。模態轉移函數 (9.8) 可視為位於 ω_n 的共振峰之疊加，每一個共振峰皆對應於空氣柱的一個駐波模態。各共振峰的有效寬度以 $\Delta\omega_n$ 表示，其大小約為 $2\gamma_n$。

工程觀點下的詮釋　由式 (9.8) 可知，長笛的管腔可視為多個輕微阻尼之二階共振器的並聯組合。其共振（極點）的位置由特徵角頻率 $\omega_n = c\,k_n$ 所決定，而這些頻率則取決於管腔的幾何形狀與邊界條件。係數 C_n 則同時量化了噴流激發耦合進第 n 個模態的效率，以及該模態對所選輸出變數（如聲壓、體積流率或其輻射代理量）的貢獻程度。

若以 $S(\omega)$ 表示有效噴流聲源的頻譜，$X(\omega)$ 表示最終輸出的頻譜，則其輸入–輸出關係

可寫成標準的線性系統形式：

$$X(\omega) = H(\omega)\, S(\omega),$$

其中管腔的傳遞函數 $H(\omega)$ 由式 (9.8) 所給定。

對長笛音色的意涵　由模態傳遞函數表示式 (9.8) 可直接理解長笛音色的若干關鍵特徵。首先，共振頻率集合 $\{\omega_n\}$ 近似呈現諧波式排列，因此產生清晰且穩定、非諧性極低的音高感受。其次，由於噴流激發本身為一種寬頻聲源，其內在頻譜結構相對單純，故聲音的整體頻譜包絡主要由管腔的傳遞函數所主導，而非由聲源頻譜本身所決定。最後，長笛演奏中音色的變化主要來自噴流動力學的改變——包括呼吸壓力、吹口幾何形狀以及流動不穩定性——而共振器本身則基本保持不變。

從此觀點來看，長笛提供了一個經典且概念上相當簡潔的例子，展示音色如何透過線性共振濾波機制形成。相較之下，如小提琴等樂器則具有三維、結構複雜的共振體，並且與非線性的弦振動激發機制強烈耦合，因此導致更為豐富且精細的頻譜塑形過程。

9.5　品質因數及其在長笛音色中的角色

模態轉移函數 (9.8) 顯示，長笛管道的聲學響應可視為一系列共振峰的疊加，每一個共振峰皆對應於空氣柱的一個駐波模態。每個共振峰的中心頻率位於 ω_n 附近，在輕阻尼條件下，其有效頻寬 $\Delta\omega_n$ 約為 $2\gamma_n$。共振尖銳程度可方便地以 品質因數（quality factor）來刻畫：

$$Q_n := \frac{\omega_n}{\Delta\omega_n},$$

其中 ω_n 為第 n 個模態的共振頻率，而 $\Delta\omega_n$ 表示 $|H(\omega)|$ 中相應共振峰的有效頻寬（例如半功率頻寬）。在與長笛聲學相關的輕阻尼情形下，有 $\Delta\omega_n \approx 2\gamma_n$，因此 $Q_n \approx \omega_n/(2\gamma_n)$。

從音色的觀點來看，品質因數決定了長笛管道對激發頻譜中不同頻率成分的選擇性增強能力。高 Q 模態會產生狹窄而尖銳的共振峰，強烈放大接近 ω_n 的頻率成分，同時抑制鄰近頻率，從而形成清晰且穩定的諧波結構，並促成集中而明確的音色。相反地，較低 Q 的模態具有較寬的共振峰，導致頻率選擇性減弱，諧波輪廓較為平滑，音色表現也較不銳利。

由於長笛僅支撐基頻的奇次諧波，各模態品質因數 Q_n 的相對大小在塑造聲音的頻譜包絡中扮演核心角色。Q_n 的變化——源於黏滯熱損失、開口端的聲輻射，以及音孔的開閉狀態——會改變低頻與高頻諧波之間的能量分布。較高的品質因數傾向於強調離散的諧波分量，產生明亮且帶有振鈴感的音色；而較低的品質因數則會使共振峰變寬，形成較柔和、較具氣息感的音色。

因此，品質因數在長笛聲學中提供了一個物理上清晰的橋樑，連結了管道的線性轉移函數與樂器所呈現的音色特徵：它量化了各聲學模態儲存能量的效率，以及對吹口處所產生激發頻譜的頻率濾波銳利程度。

Remark 9.2 (**具有音孔的長笛**). 上述分析將長笛視為一根均勻的一維管腔，並假設其邊界條件為固定不變。然而在實際的長笛中，音孔（tone holes）的存在會在管腔沿線引入額外的開口，從而同時改變有效聲學長度與整體的共振結構。從建模角度來看，開啟的音孔可近似視為局部的聲壓釋放點，而關閉的音孔則會為系統引入額外的慣性與順應性。

在偏微分方程層次上，音孔可透過內部邊界條件，或與主管腔耦合的局部阻抗項來加以描述。其主要效應包括共振頻率的偏移、模態耦合係數的改變，以及額外輻射損失的引入。關於具有音孔之長笛的詳細分析，包括合適的阻抗模型及其對傳遞函數的影響，將留待附錄中再作深入討論。

10　小提琴的音色

小提琴的音色是一種知覺特性，使其能夠與其他在相同音高與相同響度下演奏的樂器區分開來。如同人聲一般，小提琴的音色並非僅由音高所決定，而是主要取決於聲音的頻譜包絡。

10.1　聲源–共振器的觀點

小提琴的發聲機制可透過聲源–共振器的分解來理解：

$$\text{輻射聲音} = \underbrace{(\text{琴身–空氣傳遞函數})}_{\text{共振腔體}} \times \underbrace{(\text{琴橋振動的諧波成分})}_{\text{弦–琴橋激發}}.$$

在數學上，這一關係可表示為

$$X(\omega) = H(\omega)\, S(\omega).$$

- **聲源**：由振動的弦透過琴橋傳遞至琴身的週期性作用力。
- **共振器**：小提琴的琴身結構與其內部的空氣腔體，對特定頻率進行選擇性放大。

因此，小提琴的琴身在聲學上扮演的角色，與人類語音中的聲道具有相當類似的功能。

10.2　弓弦激發與琴橋振動的諧波結構

被弓拉動的弦會產生一種稱為 黏滑運動（stick–slip，亦稱 Helmholtz 運動）的振動型態。在每一個振動週期中，弦會在「黏附於弓毛」與「快速滑動」之間交替，使得傳遞至琴橋的振動波形近似於一個鋸齒波。

對於一條以基頻 f_0 振動的弦，作用於琴橋上的激發力可展開為傅立葉級數

$$F_{\text{bridge}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f_0 t).$$

雖然在 Helmholtz 運動中，弦的位移波形近似鋸齒形，其傅立葉係數的大小約隨 $1/k^2$ 衰減，但施加於琴橋上的力並不與位移本身成正比，而是與弦的斜率成正比（$F_{\text{bridge}} \sim T\, u_x$）。由於在每一次黏滑轉換時，弦的斜率會出現跳躍不連續，因此琴橋所承受的激發力之諧波振幅僅以

$$A_k \sim \frac{1}{k}$$

的速度衰減。

圖 23 示意了琴橋激發力的諧波振幅頻譜。圖中的圓點表示位於 f_0 整數倍處的離散諧波，而虛線則表示振幅隨諧波階數 k 以 $1/k$ 衰減的趨勢。

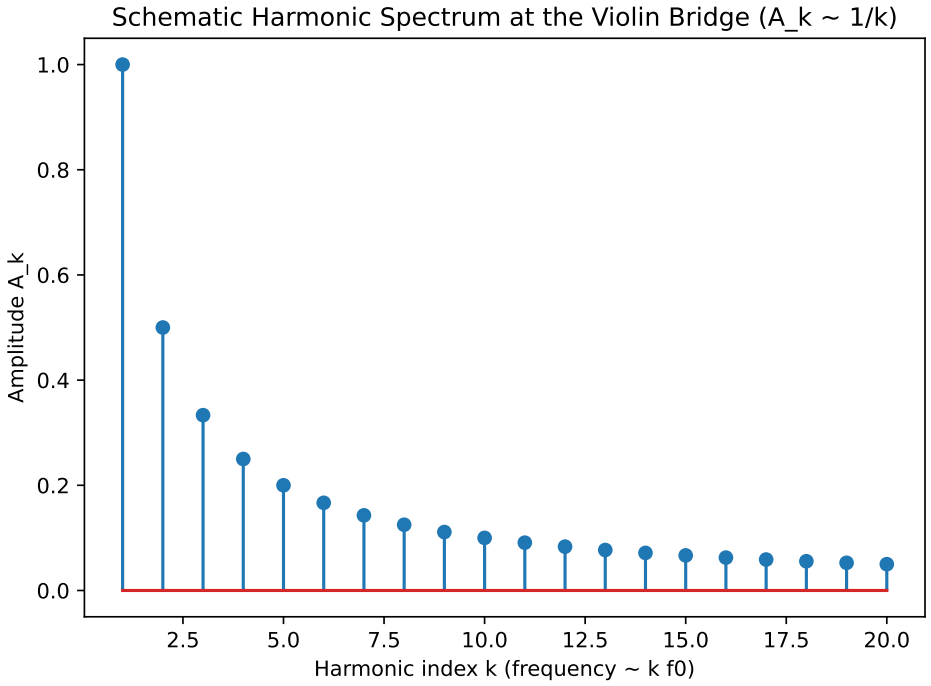


Figure 23: 弓弦激發下琴橋作用力的諧波頻譜示意圖，顯示諧波振幅隨階數緩慢地以 $1/k$ 衰減。

這種緩慢的 $1/k$ 衰減具有清楚的物理意涵：

- 快速的滑動階段在時間波形中引入尖銳的轉折，
- 時間上的尖銳特徵對應於強烈的高頻成分，
- 在數學上，斜率的不連續會導致諧波振幅以 $1/k$ 衰減。

因此，弓弦激發本身具有極為豐富的諧波成分，且其頻譜結構對音高的改變相對不敏感。

然而，單靠這樣的激發機制並不足以有效地輻射聲音；要產生可觀的聲音輸出，仍需仰賴小提琴琴身作為高效率的聲學輻射體。

10.3 小提琴琴身的傳遞函數

對於一把特定的小提琴而言，其琴身–空氣系統定義了一個 內在的線性傳遞函數 $H(\omega)$，而此傳遞函數與實際演奏的音符無關。它是由小提琴的幾何形狀、材料性質以及邊界條件所共同決定的，並可由以下兩組參數來刻畫：

$$\{\omega_n\}_{n\geq 1}, \qquad \{\gamma_n\}_{n\geq 1},$$

其中 ω_n 為各共振（本徵）頻率，而 γ_n 則為對應的阻尼係數。

小提琴琴身的低階共振模態，常以一些傳統名稱來指稱，例如 A_0、CBR、B_1^- 與 B_1^+。在數學上，這些名稱對應於耦合的振動–聲學系統中最低階的本徵對 (ω_n, γ_n)。這些標記所反映的是模態的物理性質（例如以空氣運動為主或以結構振動為主），而非固定的模態序號。由於製作細節的差異，這些模態在頻率上的排列順序可能略有不同，但每一個被命名的共振模態，都對應於傳遞函數模態展開中的某一特定項。

模態表示

在主導階近似下，小提琴的琴身可視為一個由琴橋所驅動的具阻尼之線性共振器。令 $F(\omega)$ 表示作用於琴橋上的力之傅立葉轉換，而 $P(\omega)$ 表示所輻射聲壓的頻域表示，則二者之間滿足

$$P(\omega) = H(\omega)\, F(\omega),$$

其中傳遞函數 $H(\omega)$ 具有以下的模態展開形式：

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\gamma_n \omega}.$$

在此表示中：

- ω_n 為耦合之彈性–聲學系統的本徵頻率，
- γ_n 描述由內部摩擦與聲輻射所造成的能量耗散，
- C_n 則量度琴橋與各個模態之間的耦合強度。

這種模態表示方式，與振動弦、薄膜以及聲學腔體中常用的模態展開在數學結構上是類似的。

典型共振頻率

大量的實驗與數值研究顯示，現代小提琴在低頻範圍內具有數個界定良好的低階共振模態，且其頻率範圍在不同樂器之間具有相對一致性。表 1 列出了具代表性的數值。

模態	物理意涵	f_n（Hz）	$\omega_n = 2\pi f_n$（rad/s）
A_0	空氣模態（類 Helmholtz 共振）	250–300	$(1.6\text{–}1.9) \times 10^3$
CBR	琴身彎曲模態	350–400	$(2.2\text{–}2.5) \times 10^3$
B_1^-	第一琴身模態	430–480	$(2.7\text{–}3.0) \times 10^3$
B_1^+	第二琴身模態	500–580	$(3.1\text{–}3.6) \times 10^3$

Table 1: 小提琴琴身之典型低頻共振模態。實際頻率值會依幾何形狀、木材性質與製作細節而有所差異。

當頻率高於約 700–800 Hz 時，模態密度開始增加，個別共振在頻率上的間距逐漸縮小。在約 2–3 kHz 以上的頻率範圍，模態之間出現明顯重疊，整體響應在頻譜上呈現出近似平滑的行為。

典型阻尼係數

模態阻尼常以品質因子（quality factor）

$$Q_n = \frac{\omega_n}{\gamma_n}$$

來描述，其中 γ_n 為第 n 個模態的阻尼係數。

具代表性的實驗數值如下：

模態類型	典型 Q_n	典型 γ_n（rad/s）
空氣模態 A_0	10–20	100–200
琴身模態 $B_1^{\pm}$	20–40	80–150
中頻模態	30–60	100–200
高頻模態	10–30	強烈重疊

低頻模態的阻尼相對較小，因此在傳遞函數幅值 $|H(\omega)|$ 中會表現為清楚可辨的共振峰。相對地，在較高頻率範圍內，模態之間的重疊程度顯著增加，其集體效應在頻譜上形成一個近似平滑的背景結構。

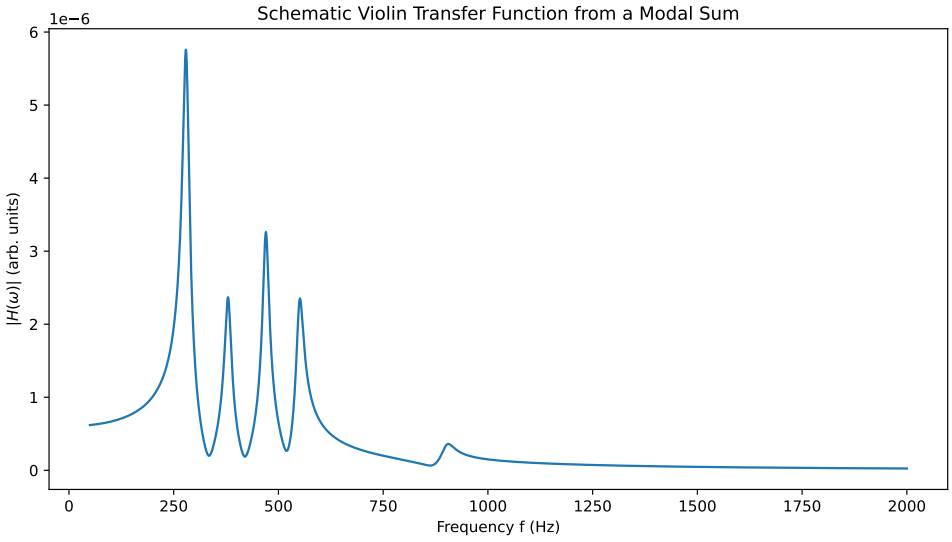
$|H(\omega)|$ 的定性形狀

因此，小提琴琴身內在的幅值響應 $|H(\omega)|$ 呈現出一種具代表性的定性形狀：

- 在低頻區域出現彼此分離的共振峰，
- 在中頻範圍內，共振峰開始部分重疊，
- 在高頻區域，響應則變得平滑，且僅隨頻率緩慢變化。

這種形狀與實際演奏的音高無關。演奏的音符僅決定弦之激發所產生的諧波，如何在固定的函數 $|H(\omega)|$ 上進行取樣，進而塑造聲音的頻譜包絡與所感知的音色。

圖 24 示意了小提琴傳遞函數幅值 $|H(\omega)|$ 的典型形狀。其中的共振峰對應於琴身與空氣的各種模態，而阻尼的存在則避免了無限大的放大效應。




```
Illustrative modal parameters:
n=1: f_n=280 Hz, ω_n=1759 rad/s, γ_n=100 rad/s, C_n=1.00
n=2: f_n=380 Hz, ω_n=2388 rad/s, γ_n=100 rad/s, C_n=0.55
n=3: f_n=470 Hz, ω_n=2953 rad/s, γ_n=95 rad/s, C_n=0.90
n=4: f_n=550 Hz, ω_n=3456 rad/s, γ_n=110 rad/s, C_n=0.85
n=5: f_n=900 Hz, ω_n=5655 rad/s, γ_n=200 rad/s, C_n=0.35
```

Figure 24: 小提琴傳遞函數 $|H(\omega)|$ 的示意圖，顯示具代表性的琴身與空氣共振模態。

10.4 頻譜包絡與小提琴音色

將聲源與共振器的效應結合後，第 k 個輻射諧波的振幅可寫為

$$A'_k = |H(2\pi k f_0)|\, A_k.$$

其中 A_k 表示弓弦作用於琴橋上的激發力中，第 k 個諧波分量的振幅。具體而言，琴橋所承受的作用力可展開為

$$F_{\text{bridge}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f_0 t),$$

其中 f_0 為弦的基頻。對於弓弦的 Helmholtz（黏滑）運動而言，這些係數滿足

$$A_k \sim \frac{1}{k},$$

反映出在每一次拉弓週期中，弦在琴橋處的斜率會出現尖銳變化。

通過平滑地插值各諧波振幅 A'_k 所形成的曲線，即定義了聲音的頻譜包絡。正是這個頻譜包絡，決定了人們所感知的亮度、溫暖感與穿透力等音色特質。

由於小提琴琴身的幾何結構在演奏過程中基本保持不變：

- 傳遞函數 $H(\omega)$ 可視為時間不變，
- 頻譜包絡在很大程度上與音高無關，

- 因此，小提琴的音色在整個演奏音域中皆具有高度可辨識性。

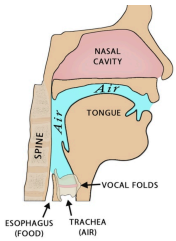
11　男性與女性人聲的音色差異

在本節中，我們將看到，人類聲音的音色在物理原理上遵循與長笛與小提琴相同的基本機制。其關鍵差異在於，聲道是一個可主動變形的共振器，使得共振頻率（亦即共振峰，formants）能夠在說話與歌唱的過程中隨時間動態改變。

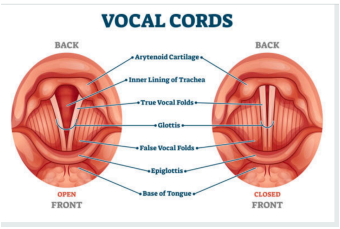
11.1　發聲系統的解剖結構

發聲系統的主要解剖組成包括：

- **肺部（Lungs）**：提供氣流與聲門下壓力。
- **聲帶（Vocal folds）**：具有彈性的組織，透過振動產生週期性的氣流。
- **喉部（Larynx）**：包含聲帶，並控制其張力與長度。
- **聲道（Vocal tract）**：充滿空氣的腔體，其形狀可被主動調整。



(a) 聲道



(b) 聲帶：在靜止或呼吸時呈開啟狀態

聲帶並非弦狀結構，而是一對具有層狀結構的柔軟組織摺疊，在氣道中形成一個隨時間變化的狹窄通道。在有聲發聲（voiced phonation）過程中，由肺部產生的聲門下壓力驅動氣流通過聲門，使聲帶產生自持振盪。此振盪源於流體與結構之間的耦合機制：氣流通過狹窄區域時會降低局部壓力，而組織的彈性與慣性效應則促使聲門重新閉合。因此，聲門開口會週期性地張開與關閉，產生準週期性的氣流脈衝，進而激發聲道的聲學共振。

11.2　聲源–濾波器的觀點

人類聲音的產生可透過聲源–濾波器的分解來理解：

$$\text{人聲訊號} = (\text{聲帶激發}) \times (\text{聲道傳遞函數}).$$

- **聲源**：由聲帶振動所產生的近似週期性氣流。

- **濾波器**：由咽喉、口腔與鼻腔所構成的聲道，其在聲學上可視為具有頻率依賴性共振的波導。

由這兩個組成部分相互作用所塑造的頻譜包絡，即被人耳感知為人聲的音色。

11.3 基頻範圍

基頻 f_0 決定了人耳所感知的音高。其典型數值取決於生理結構以及使用方式（例如日常說話或歌唱）。

說話（慣用音高）

	典型範圍（Hz）	對應音名範圍
成年男性	80–150	E_2–D_3
成年女性	150–300	D_3–D_4

歌唱（約略範圍）

	頻率範圍（Hz）	音域範圍
男性歌手	80–440	E_2–A_4
女性歌手	220–1000 以上	A_3–C_6

這些頻率範圍彼此之間具有相當程度的重疊；男性與女性歌手皆可自在地演唱許多相同的音符。

11.4 聲道共振（共振峰，formants）

聲道在聲學上可視為一個具有共振特性的濾波器。其共振頻率稱為共振峰（formants），通常記為 $F_1, F_2, F_3, \ldots$。

	F_1（Hz）	F_2（Hz）	F_3（Hz）
成年男性（典型值）	400–600	900–1500	2200–2600
成年女性（典型值）	500–700	1100–1700	2600–3200

由於女性的平均聲道長度較短，其共振峰頻率通常整體向高頻方向位移約 10–20%。共振峰的頻率主要取決於聲道的幾何形狀與母音的發音構型，而非聲帶振動所決定的音高。

11.5 頻譜包絡與音色

設聲帶激發可表示為

$$u_{\text{source}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k),$$

其中 ω_0 為基頻，而 $H(\omega)$ 表示聲道的傳遞函數。

則輸出聲音中第 k 個諧波的振幅滿足

$$A'_k = |H(k\omega_0)|\, A_k.$$

由各諧波振幅 A'_k 所形成、並經平滑插值的曲線，稱為聲音的頻譜包絡。正是這個頻譜包絡，決定了人耳所感知的音色特性。

具體而言，下列因素的差異：

- 諧波間距，
- 共振峰（formants）的位置，
- 頻譜高頻端的衰減速率，
- 高頻噪聲成分的強弱，

共同造成了男性與女性人聲在音色上的典型差異，即使在演唱相同音高時亦然。

11.6 男性與女性人聲的比較表

男性與女性人聲在音色上的差異，主要來自以下幾個因素：

1. 聲帶所產生的諧波結構不同（A_k, f_0）；
2. 聲道長度的差異導致共振峰頻率出現不同的整體位移；
3. 所形成的頻譜包絡 A'_k 在形狀上有所差異；
4. 相量軌跡 $z(t)$ 呈現出不同的幾何結構。

這些因素共同作用，形成了我們在知覺上所熟悉的男性與女性人聲之典型差異。

	男性人聲	女性人聲
基頻 f_0	通常為 80–150 Hz（聲帶較長且較厚）	通常為 150–300 Hz（聲帶較短且較輕）
諧波間距	低頻諧波密集（kf_0 間距較小）	由於 f_0 較高，諧波間距較大
聲道長度	較長（約 17–18 cm），共振峰頻率較低	較短（約 14–15 cm），共振峰整體上移
共振峰對齊	諧波主要與較低階共振峰作用，低頻成分較強	諧波較多與高階共振峰作用，頻譜較為明亮
頻譜包絡	低階諧波能量較多，音色常被感知為較暗、較溫暖	高頻成分較強，音色常被感知為較明亮
噪聲 / 氣息感	高頻噪聲通常較少（依發聲方式而異）	常具有較明顯的氣息感與高頻噪聲成分
相量軌跡	旋轉速度較慢，$z(t)$ 中低頻結構較為豐富	旋轉速度較快，$z(t)$ 受高階諧波調制較為明顯

Table 2: 男性與女性人聲在頻譜與聲學特性上的典型差異摘要。雖然個體之間存在顯著變異，但由於聲帶性質與聲道幾何結構的不同，仍可觀察到清楚的系統性趨勢。

11.7 不同樂器與人聲之音色（頻譜包絡）比較

不同樂器在激發機制（聲源）與共振結構（濾波器）上的可變程度並不相同，這將影響音色究竟主要由傳遞函數 $H(\omega)$ 所主導，或是由聲源本身的頻譜特性所主導。

樂器 / 系統	聲源變異性	濾波器變異性	音色主要由
小提琴（弓弦）	低	極低（琴身固定）	傳遞函數 $H(\omega)$
銅管樂器（如小號）	中等	中等（嘴唇＋管身）	聲源 $\times$ 濾波器
長笛（氣流噴射）	中等	低至中等（管道）	兩者皆有，常偏向濾波器
單簧管（簧片＋管道）	中等	低（管道共振）	偏向濾波器
鋼琴（擊弦）	高（與觸鍵、起音強烈相關）	低（音板）	偏向聲源，特別是起音階段
人聲	中等	高（可調式聲道）	聲源 $\times$ 濾波器

12　房間的音色：阻尼、擴散與殘響

12.1　房間中的聲波與 Green 函數

在理想的剛性房間中，聲壓場 $p(\mathbf{x},t)$ 滿足波動方程式

$$\partial_{tt}p = c^2\Delta p + s,$$

並在牆面上滿足 Neumann 邊界條件 $\partial_n p = 0$。對於一個長方形房間，利用變數分離法可得到一族駐波本徵模態

$$\phi_{mnl}(x,y,z) = \cos\!\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right)\cos\!\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)\cos\!\left(\frac{l\pi z}{L_z}\right),$$

其對應的本徵頻率為

$$\omega_{mnl} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n}{L_y}\right)^2+\left(\frac{l}{L_z}\right)^2}.$$

將聲壓場展開為

$$p(\mathbf{x},t) = \sum_{mnl} q_{mnl}(t)\,\phi_{mnl}(\mathbf{x}),$$

則每一個模態振幅 $q_{mnl}(t)$ 皆滿足一個受迫簡諧振子的方程式：

$$\ddot{q}_{mnl}(t) + \omega_{mnl}^2 q_{mnl}(t) = f_{mnl}(t).$$

在忽略能量損失的情況下，其頻域 Green 函數可寫為

$$\hat{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \sum_{mnl}\frac{\phi_{mnl}(\mathbf{x})\,\phi_{mnl}(\mathbf{x}')}{\omega_{mnl}^2-\omega^2},$$

該表達式在本徵頻率 ω_{mnl} 處於實頻軸上呈現極點結構。

12.2　由阻抗邊界條件所導致的阻尼

在真實的房間中，聲學阻尼主要並非來自空氣本身的體黏滯效應，而是源於邊界處的能量耗散，包括牆面吸收、表面順應性以及聲輻射等機制。在偏微分方程層級上，這些效應可透過對聲壓場 $p(\mathbf{x},t)$ 施加一個阻抗邊界條件（*impedance boundary condition*）來建模：

$$\partial_{tt}p - c^2\Delta p = s(\mathbf{x},t) \quad \text{於}\Omega, \tag{12.1}$$

$$\partial_n p + \beta(\mathbf{x})\,\partial_t p = 0 \quad \text{於}\partial\Omega, \tag{12.2}$$

其中 ∂_n 表示沿外法向的導數，而 $\beta(\mathbf{x}) \geq 0$ 則刻畫邊界的局部聲學導納（admittance）。當 $\beta = 0$ 時，邊界為完全剛性，能量不會發生損失。

能量恆等式。 定義聲學能量為

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho_0 c^2} \, p_t^2 + \frac{1}{\rho_0} \, |\nabla p|^2 \right) \, d\mathbf{x}.$$

將方程式 (12.1) 乘以 p_t，並在區域 Ω 上積分，再配合分部積分與邊界條件 (12.2)，可得能量平衡關係

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c^2}{\rho_0} \int_{\partial\Omega} \beta(\mathbf{x}) \, p_t^2 \, dS \; + \; \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, t) \, p_t \, d\mathbf{x}. \tag{12.3}$$

在無外力激發的情況下，總聲學能量會隨時間單調遞減。其衰減速率完全由邊界導納 β 以及牆面上的聲壓速度分佈所決定。

由 PDE 到模態阻尼、峰寬與殘響

模態展開與有效阻尼。 在具有阻抗邊界條件 (12.2) 的情況下，仍可將聲壓場展開為本徵模態的形式

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{n} q_n(t) \, \phi_n(\mathbf{x}),$$

其中 ϕ_n 為理想剛性房間的空間模態，對應本徵頻率 ω_n。將此展開代入波動方程 (12.1)，並利用模態正交性，可得每一個模態振幅 $q_n(t)$ 近似滿足一個具有阻尼的受迫振子方程：

$$\ddot{q}_n(t) + 2\gamma_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n(t).$$

其中 $\gamma_n > 0$ 為第 n 個模態的有效阻尼率，其大小由邊界導納 $\beta(\mathbf{x})$ 與該模態在牆面上的能量分佈所決定。

阻尼率的近似表達式。 由能量平衡關係 (12.3) 可知，在無外力的情況下，單一模態的能量滿足

$$\frac{dE_n}{dt} \approx -2\gamma_n E_n.$$

因此，阻尼率可寫為牆面耗散與模態總能量之比：

$$\gamma_n \;\approx\; \frac{c^2}{2\rho_0} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega} \beta(\mathbf{x}) \, |\partial_t \phi_n(\mathbf{x})|^2 \, dS}{\displaystyle\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho_0 c^2} \, \omega_n^2 |\phi_n|^2 + \frac{1}{\rho_0} \, |\nabla \phi_n|^2 \right) d\mathbf{x}}.$$

這個公式清楚地顯示：

- 阻尼主要來自牆面，而非空氣體黏滯；

- 與模態在邊界附近的「活躍程度」密切相關；
- 高階模態通常具有較大的阻尼率。

頻域表示與峰寬。 在頻域中，第 n 個模態對應的傳遞函數項可寫為

$$H_n(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\,2\gamma_n\omega}.$$

其幅度在 $\omega = \omega_n$ 附近達到最大值，並形成一個洛倫茲型（Lorentzian）共振峰。由半功率準則（half-power criterion）可得該共振峰的全寬半高（FWHM）近似為

$$\boxed{\Delta\omega_{\text{FWHM}} \;\approx\; 2\gamma_n.}$$

因此，阻尼率 γ_n 直接決定了頻譜中模態峰值的寬度。

在時間域中，對應的模態響應可表示為

$$q_n(t) \sim e^{-\gamma_n t}\cos(\omega_n t).$$

因此，頻譜峰越狹窄，殘響時間越長，而 頻譜峰越寬廣，衰減則越迅速。這種頻域與時間域之間的對偶關係，乃是由偏微分方程層次透過阻抗邊界條件所引入之阻尼的直接結果。

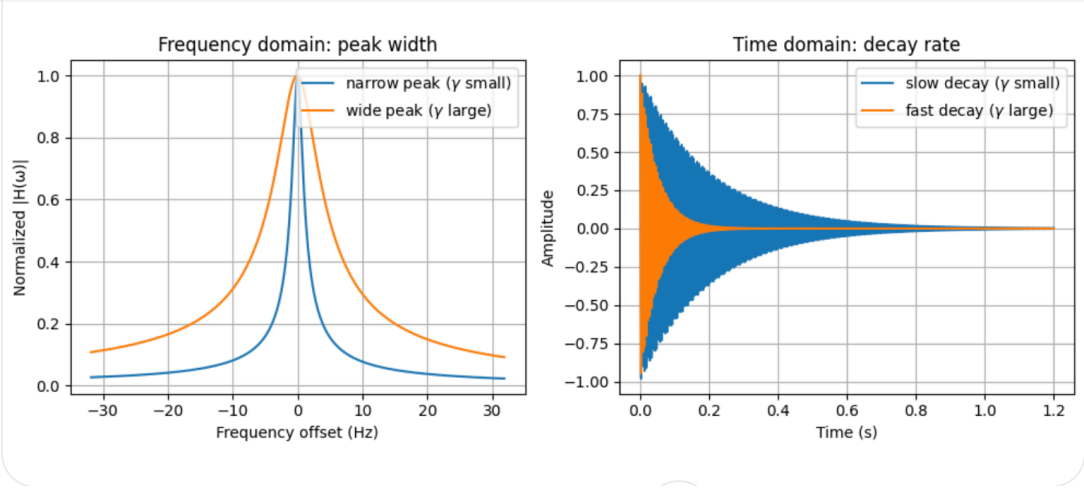


Figure 26: **阻尼的頻域–時間域對偶關係。**左圖：單一阻尼模態之傳遞函數幅值 $|H(\omega)|$。較大的阻尼係數 γ_n 會導致共振峰變寬（半高全寬 $\Delta\omega_{\text{FWHM}} \approx 2\gamma_n$）。右圖：對應的時間域脈衝響應 $q_n(t) \sim e^{-\gamma_n t}\cos(\omega_n t)$。狹窄的頻域共振峰對應於較慢的時間衰減（較長的殘響），而寬廣的頻域峰則對應於快速衰減（較短的殘響）。

殘響時間。 在時間域中，阻尼振子的自由衰減行為為

$$q_n(t) \sim e^{-\gamma_n t}.$$

聲能以 $e^{-2\gamma_n t}$ 的速率衰減。定義殘響時間 T_{60} 為聲能衰減 $60\,\mathrm{dB}$（即 10^{-6}）所需的時間，則有

$$e^{-2\gamma_n T_{60}} = 10^{-6}$$

即

$$\boxed{T_{60}^{(n)} \;\approx\; \frac{3\ln 10}{\gamma_n} \;\approx\; \frac{6.9}{\gamma_n}.}$$

這說明：

- 峰寬越窄（γ_n 小），殘響越長；
- 峰寬越寬（γ_n 大），殘響越短；
- 頻域結構與時間域聽感之間存在直接對應。

從知覺與聲學設計的角度來看，不同的混響時間 T_{60} 對應於截然不同的聽覺印象與空間功能需求。表 3 彙整了常見的 T_{60} 取值、其主觀聽覺感受，以及典型的聲學設計目標。

T_{60}（秒）	聽覺印象	典型空間 / 設計目標
< 0.3	極乾、近似無回響、聲學上「死」	無響室、精密聲學量測空間
0.3–0.6	乾淨、清晰、音染極小	錄音室、控制室
0.6–1.0	平衡、語音清晰度高	教室、演講廳、會議室
1.0–2.0	具混響感、溫暖、音樂性豐富	音樂廳（室內樂、交響樂）
> 2.0	非常「活」、回聲明顯、空間感強	教堂、大型宗教或儀式空間

Table 3: 混響時間 T_{60} 的典型取值、其主觀聽覺印象，以及對應的聲學設計目標。

品質因數與模態尖銳度。 刻畫室內各模態阻尼及其感知後果的一種等價且簡潔的方法，是引入每一個房間模態的品質因數（quality factor）Q_n，其定義為

$$Q_n := \frac{\omega_n}{\Delta\omega_n}.$$

在輕阻尼模態的情形下，利用 $\Delta\omega_n \approx 2\gamma_n$ 的關係，可得

$$Q_n \;\approx\; \frac{\omega_n}{2\gamma_n}.$$

因此，品質因數可視為衡量某一模態在其能量顯著衰減之前所能振盪的週期數。

從物理角度來看，高 Q 的房間模態對應於較弱的邊界吸收、較窄的頻譜共振峰以及較長的殘響時間。此類模態能夠有效地儲存聲學能量，並產生明顯的共振效應，從而對聲音造成強烈的染色。相對地，低 Q 模態源自較強的邊界損失，表現為較寬的頻譜峰值並在時間上快速衰減，使得聲學響應更趨於中性。

就音色而言，各房間模態品質因數的分布扮演著核心角色。以高 Q 模態為主的空間往往聽起來具有明顯共鳴或「低頻轟鳴」感，呈現強烈的模態染色；而品質因數較低且分布較為均勻的房間，則表現出較平滑的頻譜響應與較清晰的時間解析。因此，品質因數在房間的物理阻尼機制與所感知的空間音色之間，提供了一個直接而清楚的連結。

物理意義與音色。 總結而言，

$$\text{邊界吸收} \implies \gamma_n \implies \Delta\omega_n \implies T_{60}.$$

房間的音色正是由這一整條鏈條所塑造：牆面的材料與幾何決定了模態阻尼，阻尼決定了頻譜峰寬，而峰寬與殘響時間則共同塑造了我們所感知的空間音色。

12.3 聲學處理：吸音、擴散與反射控制

設計目標與模態品質因數的角色

從物理觀點來看，聲學處理的主要目標並非完全消除共振，而是調控不同頻率與空間位置上各模態之品質因數的分布。每一個房間模態皆可由其品質因數

$$Q_n \approx \frac{\omega_n}{2\gamma_n}$$

來刻畫，該量衡量了聲學能量的儲存效率以及在顯著衰減前所能持續的時間。過高的 Q 模態會導致狹窄的頻譜峰值、較長的衰減時間，以及強烈的模態染色；而過低的 Q 模態則會造成能量快速流失，使空間聽感趨於「死寂」。

因此，有效的聲學處理旨在抑制 Q_n 的極端變化，尤其是在低頻區域，並促進模態阻尼在整個頻譜範圍內呈現較為平滑且均勻的分布。在實務上，此一目標並非透過追求單一理想的品質因數來實現，而是藉由調整邊界互動，使各共振模態能以受控且平衡的方式衰減。殘響時間、頻率相依的衰減速率，以及聲場在空間上的均勻性，皆是反映此一設計目標的間接但實用指標。

在此架構下，吸音、擴散與反射控制分別扮演著彼此互補的角色。吸音透過在邊界處耗散聲學能量來降低模態的品質因數；擴散則將能量重新分配至不同方向與模態，減輕局部共振而不造成過度能量損失；反射控制則藉由調整早期反射路徑，以提升聲音的清晰度與空間感。這三種機制相互配合，使聲學設計者得以調校房間的模態結構，同時滿足物理規律性與感知品質的需求。

駐波與房間模態顯示，在封閉空間中，聲場的性質受到邊界互動的強烈影響。從物理與數學的角度來看，聲學處理可分為三種相互補充的機制：吸音、擴散以及反射控制。

吸音

吸音是透過黏滯與熱傳損耗，將聲學能量轉換為熱能，從而降低聲音能量的機制。在數學上，這可對應為在聲學波動方程

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$$

中引入具有耗散性的邊界條件，使得入射至邊界的部分能量通量被移除。

常用的定量指標是吸音係數

$$\alpha(\omega) = 1 - \frac{E_{\text{ref}}(\omega)}{E_{\text{inc}}(\omega)}, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

其中 E_{inc} 與 E_{ref} 分別表示在角頻率 ω 下的入射與反射聲學能量。理想的吸音體具有 $\alpha = 1$，而完全剛性的牆面則對應於 $\alpha = 0$。

由於低頻聲音的波長較長，低頻吸音在實務上特別具有挑戰性。為此，常採用低頻陷阱（bass traps）。低頻陷阱是一種專門用來抑制房間模態的低頻吸音裝置，其設計目的在於於聲壓或粒子速度振幅較大的位置（最常見的是房間角落）有效地耗散聲學能量。

從模型的觀點來看，低頻陷阱主要可分為兩類：

- 厚層多孔吸音體，其效果來自振盪氣流中的黏滯損耗；
- 共振型系統（如面板式或 Helmholtz 型），在聲學上可視為與聲場耦合的阻尼振盪器。

透過降低低頻模態的能量與衰減時間，低頻陷阱能有效緩解駐波理論所預測的空間分布不均問題。

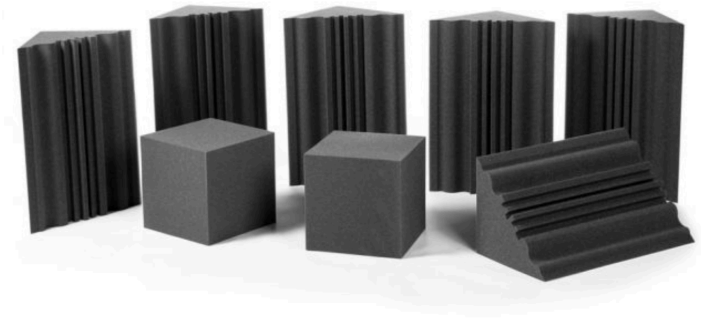


Figure 27: 低頻陷阱由多孔材料構成，通常放置於房間角落，以衰減低頻室內模態。

擴散

擴散的作用在於重新分配聲學能量於空間中的分布，而不顯著降低其總能量。與吸音不同，擴散並非透過耗散聲音，而是藉由改變邊界的幾何形狀，使原本的鏡面反射轉變為朝多個方向散射的反射行為。

在數學上，擴散可理解為改變邊界的散射算子：入射的波向量不再對應到單一的反射方向，而是產生一個出射波向量的分布。例如，二次剩餘擴散器（quadratic residue diffuser, QRD）便是利用數論中的序列來設計其表面結構，使反射波所產生的相位位移在角度上近似呈現均勻分布。

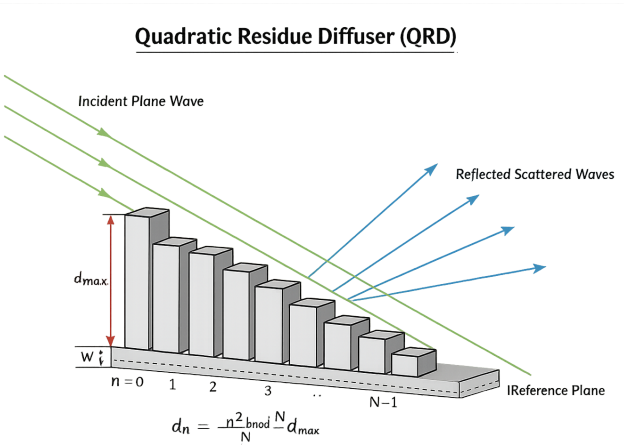


Figure 28: 二次剩餘擴散器，用以隨機化反射波的相位。

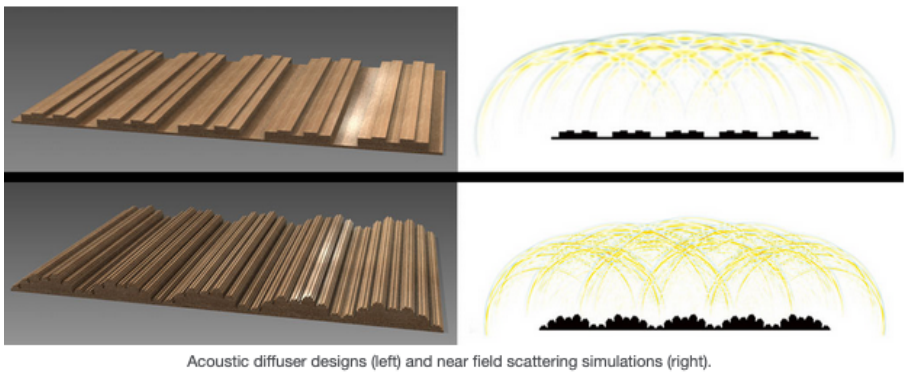


Figure 29: 利用二次剩餘序列所設計的數學型擴散器表面圖樣。

在房間與音樂廳中，擴散的主要功能包括：

- 防止聲音聚焦與顫動回聲（flutter echoes）的產生；
- 促進聲學能量在空間中的均勻分布；
- 在避免過度混響的同時，保留聲音的包圍感與空間感。



Figure 30: 設有擴散器的音樂廳。此類表面可將反射聲音均勻散射，以營造開闊且具包圍感的聽覺空間。

反射控制與早期反射

反射控制關注的是早期反射的到達時間與強度，而這些反射在聲音的清晰度與定位感知中扮演主導性的角色。若反射聲在短時間內到達（通常不超過 $\lesssim 50$ 毫秒），它們在知覺上會與直達聲結合；較晚到達的反射則主要構成混響。

從幾何聲學的觀點來看，早期反射可透過射線理論與鏡像法來分析。在第一反射點進行聲學處理——例如吸音、重新導向或擴散——會改變房間的脈衝響應

$$h(t) = \sum_{k} A_k \, \delta(t - t_k),$$

藉由削弱或重塑其中占主導地位的早期項。

有效的反射控制需要在三個彼此競爭的目標之間取得平衡：

1. 清晰度（抑制過強的早期回聲）；
2. 空間感（保留側向反射所帶來的臨場感）；
3. 能量守恆（避免過度阻尼導致聲音貧乏）。

總結而言，吸音、擴散與反射控制共同構成現代聲學設計的基礎，將波動與模態的數學理論與從小型房間到大型音樂廳的實際聽覺需求緊密地連結起來。

12.4 混響與能量衰減

一個空間的聲學品質常以其混響時間來描述，記為 T_{60}——亦即在聲源停止之後，聲學能量衰減 60 dB 所需的時間。Sabine 的經驗定律將混響時間 T_{60} 與房間體積 V 以及總吸音量 A 聯繫起來：

$$T_{60} = 0.161 \, \frac{V}{A}, \qquad A = \sum_{i} \alpha_i S_i,$$

其中 α_i 為第 i 個表面的吸音係數（介於 0 與 1 之間），而 S_i 則為該表面的面積。

較長的混響時間（例如 2–3 秒）適合交響音樂等需要豐富延音的演出；較短的混響時間（約 0.5–1 秒）則更適合語音，可提升清晰度與可懂度。

清晰度、溫暖感與空間感的量化　儘管 清晰度（clarity）、溫暖感（warmth）與 空間感（spatial impression）本質上屬於感知層面的描述，它們仍可透過房間的傳遞函數 $H(\omega)$，或等價地，透過房間的脈衝響應

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$$

來加以精確量化。在實務上，這些量通常於倍頻程或三分之一倍頻程頻帶中進行評估。

清晰度。　清晰度衡量的是早期到達聲能與後期到達（殘響）聲能之間的比例。其常用的量化指標為清晰度指數

$$C_{80} = 10\log_{10}\frac{\int_0^{80\ \mathrm{ms}} h^2(t)\,dt}{\int_{80\ \mathrm{ms}}^{\infty} h^2(t)\,dt}, \qquad C_{50} = 10\log_{10}\frac{\int_0^{50\ \mathrm{ms}} h^2(t)\,dt}{\int_{50\ \mathrm{ms}}^{\infty} h^2(t)\,dt},$$

其中 C_{80} 通常用於音樂，C_{50} 則多用於語音。C_{80} 或 C_{50} 的數值越大，代表聲音的清晰度越高。從頻域的角度來看，模態阻尼的增加（亦即 $|H(\omega)|$ 中共振峰變寬）會減少後期殘響能量，因而提升清晰度。

溫暖感。　溫暖感主要與低頻聲能相對持續時間的長短有關。一個常用的量化指標為低頻比（bass ratio），定義為

$$\mathrm{BR} = \frac{T_{60}(125) + T_{60}(250)}{T_{60}(500) + T_{60}(1000)},$$

其中 $T_{60}(f)$ 表示以頻率 f（單位為 Hz）為中心之倍頻程頻帶內的殘響時間。BR 的數值越大，聲音通常被感知為越溫暖。從模態觀點來看，當低頻模態的阻尼係數 γ_n 小於中頻模態時，低頻聲能的衰減時間較長，因而形成較為溫暖的聽感。

空間感。　空間感反映的是聲場在聽覺上所呈現的寬廣感與包圍感，而此性質無法僅透過單一的單耳（monaural）傳遞函數來描述。其量化通常依賴於雙耳脈衝響應 $h_L(t)$ 與 $h_R(t)$，分別由左耳與右耳的傳遞函數所導出。

一個廣泛使用的指標為 耳間互相關係數（interaural cross-correlation coefficient, IACC）：

$$\mathrm{IACC} = \max_{\tau \in [-1\ \mathrm{ms},\, 1\ \mathrm{ms}]} \frac{\int h_L(t)\, h_R(t+\tau)\,dt}{\sqrt{\int h_L^2(t)\,dt \int h_R^2(t)\,dt}}.$$

IACC 的數值越小，表示左右耳接收到的訊號相關性越低，對應於更強的空間感與包圍感。從物理角度來看，強烈的側向反射以及擴散性散射會透過降低左右耳傳遞函數之間的相關性，進而增強空間感的知覺。

Remark 12.1 (**總結**). 房間的音色源自模態結構、阻尼以及波動散射之間的相互作用，這些效應可透過房間的傳遞函數 $H(\omega)$ 及其在時間域中的脈衝響應來加以刻畫。邊界吸收控制了模態阻尼與殘響時間，而擴散元件則在空間與頻譜上重新分佈聲能。這些物理機制進一步產生了清晰度、溫暖感與空間感等感知屬性，並可分別透過早期／晚期能量比、頻率相依的衰減時間，以及雙耳相關性指標來加以量化。從物理觀點而言，房間音色受頻域與時間域之間的對偶關係所支配，此對偶關係連結了頻譜峰寬、能量衰減與聲場的空間結構。

References

[1] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, 5th ed., Spon Press / Taylor & Francis, London, 2009.

[2] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1968.

Part IV

聽覺系統作為時間–頻率分析器

13 耳朵作為時頻分析器

我們對振動弦與薄膜的探討顯示，物理上的聲音可表現為多個諧波的疊加。於是，一個自然的問題隨之產生：人類的聽覺系統是如何實現這類分解的？

令人驚訝的是，耳朵在實際運作中執行了一種即時的時頻分析，將複雜的聲壓訊號轉換為在空間與時間上具有組織結構的頻率選擇性響應模式。

13.1 聽覺的解剖結構與機械濾波

聲波進入外耳道後，會引起鼓膜（耳膜）的振動。這些振動經由中耳的聽小骨系統——鎚骨（malleus）、砧骨（incus）與鐙骨（stapes）——傳遞至內耳。中耳在聲學上扮演阻抗匹配與機械放大的角色，使空氣中的聲波能有效地將能量傳入充滿液體的內耳。鐙骨在卵圓窗處的運動，進一步激發耳蝸內液體中的壓力波。

耳蝸是一個呈螺旋狀、逐漸變細的管道，其長度約為 35 mm。耳蝸內部充滿液體，並沿縱向分隔為三個腔室：前庭階（scala vestibuli）、中階（scala media，又稱耳蝸管），以及鼓階（scala tympani）。其中，中階由兩層膜所界定，且其內部還包含第三層膜。這三層膜在聽覺過程中各自扮演不同且相互補充的角色：

- **基底膜（Basilar membrane）。**基底膜構成中階（scala media）的下邊界，並承載柯蒂氏器（organ of Corti）。其力學性質沿著耳蝸長度方向呈現系統性的變化：在基底端（靠近卵圓窗）較窄且較為僵硬，而在頂端則較寬且更具順應性。因此，入射的聲音會在耳蝸內激發一個行進波，其振幅會在一個由頻率所決定的位置達到最大值。高頻聲音的峰值出現在基底端附近，而低頻聲音則在頂端附近達到峰值。這種空間上的頻率選擇性構成了耳蝸音調定位（tonotopy）的機械基礎，也是耳蝸進行頻率分析的主要機制。

- **覆膜（Tectorial membrane）。**覆膜是一種位於中階內部、覆蓋於柯蒂氏器之上的凝膠狀結構。它並不分隔不同的液體腔室，而是與毛細胞的纖毛束產生機械性的交互作用。基底膜與覆膜之間的相對運動會產生剪切力，使毛細胞的立體纖毛發生偏轉，從而將機械振動轉換為電訊號。因此，覆膜在機械—電訊號轉換中扮演關鍵角色，而非直接負責頻率選擇性。

- **萊斯納氏膜（Reissner's membrane）。**萊斯納氏膜構成中階的上邊界，將其與前庭階（scala vestibuli）分隔開來。其主要功能在於維持耳蝸液體之間不同的離子

組成。在力學上，該膜極薄且高度柔順，會隨著壓力變化被動移動。它在頻率分辨或訊號轉換中幾乎不直接參與。

從訊號處理的觀點來看，基底膜可視為一組沿耳蝸空間分布的 機械式帶通濾波器組，對入射聲音進行具有空間組織結構的頻率分解。覆膜則使這些經過機械濾波後的訊號得以轉換為神經活動，而萊斯納氏膜主要扮演輔助性的生理角色。

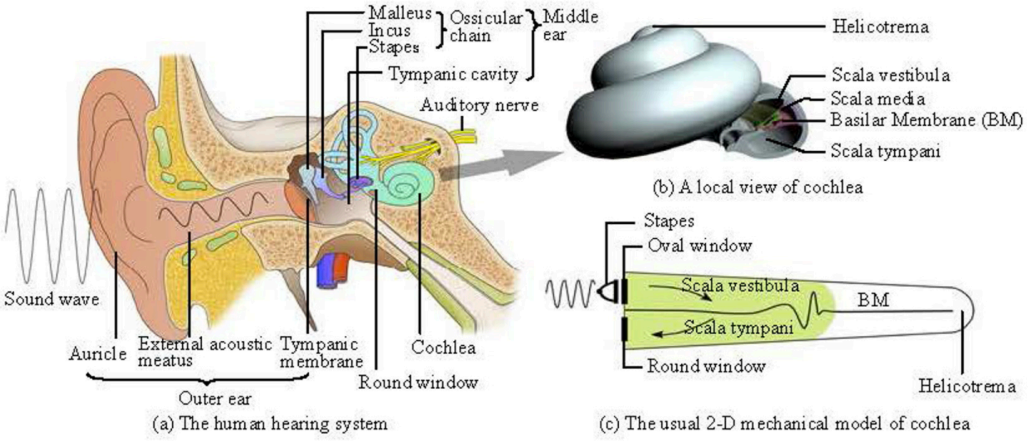


Figure 31: 來源：Ren 等人 [8]。

13.2 音調定位與生物頻譜

音位拓撲與對數頻率映射

基底膜上沿空間方向所呈現的頻率組織結構，稱為音調定位（tonotopy）。基底膜上的每一個位置都可視為一個具有自身自然頻率的調諧共振器。位於基底膜之上的毛細胞會將這些機械振動轉換為電訊號，並透過聽神經傳送至大腦。

因此，在任何一個時刻，不同的神經纖維同時攜帶著來自不同頻帶的資訊——這可被視為數學上傅立葉轉換在生物系統中的一種實現。

在定量上，頻率與耳蝸位置之間的對應關係可近似為一種對數尺度：

$$x(f) \approx a \, \ln\!\left(1 + \frac{f}{f_0}\right),$$

其中 x 表示自耳蝸頂端起算的位置，而 f_0 與 a 為由實驗資料所擬合得到的常數。這意味著：

- 耳蝸上等距的空間區段，對應於頻率上的等比例變化；
- 耳蝸在機械結構上，已適應於對數型的頻率感知。

這種對數尺度反映了人類音高知覺的乘法性質：頻率加倍（例如由 $220\,\mathrm{Hz}$ 提升至 $440\,\mathrm{Hz}$），無論起始音高為何，在知覺上皆對應於上升一個八度。

音高的知覺取決於頻率的比例，而非頻率的差值。引入音高座標

$$p(f) = \log\left(\frac{f}{f_0}\right),$$

即可使等音程對應於 p 的等量增量。

在實驗上，基底膜上振動幅值達到最大的位置 x 滿足近似關係

$$x(f) \approx a - b \log f,$$

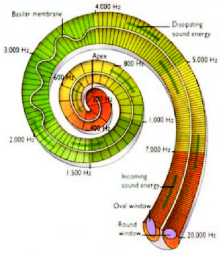
或等價地寫成

$$x = \alpha + \beta\, p(f),$$

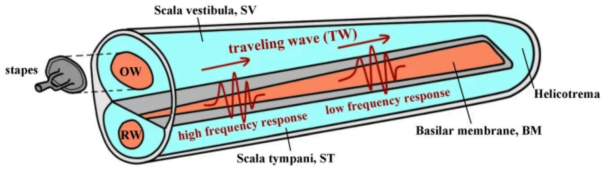
這表示等音程會對應到耳蝸上等距的空間位置。在中頻與高頻範圍內，常用的正則化形式

$$x(f) \approx a \ln\left(1 + \frac{f}{f_0}\right)$$

與上述對數定律在數值上是一致的。



(a) 音調定位：頻率沿耳蝸路徑的空間分布。



(b) 聲音傳遞至耳蝸的路徑示意。

Figure 32: 人類耳蝸作為機械式即時傅立葉分析器的示意圖。基底膜上不同的位置對應並回應不同的頻率成分。

耳蝸的行波模型

耳蝸的一個簡化一維行進波模型，描述了基底膜在橫向（垂直）方向上的位移 $u(x,t)$，以及前庭階與鼓階之間的流體壓力差 $p(x,t)$ 之間的耦合關係。一個最基本的線性模型可寫為

$$m(x)\,\partial_{tt}u(x,t) + r(x)\,\partial_t u(x,t) + k(x)\,u(x,t) = p(x,t), \qquad x \in [0,L], \tag{13.1}$$

其中 $m(x)$、$r(x)$ 與 $k(x)$ 分別表示基底膜的等效質量、阻尼與剛性，且皆隨耳蝸座標 x 緩慢變化。

流體耦合在縱向方向上建立了壓力與基底膜加速度之間的關係。在長波近似下，該關係可寫為

$$\partial_{xx} p(x,t) = \alpha\, \partial_{tt} u(x,t), \qquad x \in [0, L], \tag{13.2}$$

其中常數 $\alpha > 0$ 由流體密度與耳蝸的幾何結構所決定。

由於壓力方程在空間變數 x 上為二階微分方程，因此必須為 $p(x,t)$ 指定兩個空間邊界條件。一組標準且最簡化的選擇為

$$p(0,t) = p_{\text{in}}(t), \qquad p(L,t) = 0,$$

其中 $p_{\text{in}}(t)$ 表示由鐙骨 / 卵圓窗所施加的輸入壓力，而 $p(L,t) = 0$ 則用來描述在螺旋孔 (helicotrema) 附近壓力得以平衡的情形。

知覺與頻率解析度

耳蝸對頻率的解析能力並非無限精細。相反地，在基底膜上的每一個位置 x，其機械響應都可近似視為線性且具有頻率選擇性。

在頻率域中，基底膜位移可表示為

$$U(x;\omega) = G_u(x,\omega)\, P_{\text{in}}(\omega), \tag{13.3}$$

其中 $P_{\text{in}}(\omega)$ 為施加於卵圓窗的聲壓輸入，而 $G_u(x,\omega)$ 則是隨位置而變化的傳遞函數。對於固定的 x 而言，其幅值 $|G_u(x,\omega)|$ 呈現為一個平滑的帶通響應，並以某個特徵頻率 $\omega_c(x)$ 為中心，同時具有有限的頻寬 $\Delta\omega(x)$。

對於感覺毛細胞而言，一個方便的理想化量是其所受到的局部機械驅動之 頻譜能量，定義為

$$E(x) \;\propto\; \int_0^\infty |G_u(x,\omega)|^2\, |P_{\text{in}}(\omega)|^2\, d\omega. \tag{13.4}$$

此一表達式顯示，耳蝸並非直接編碼原始的聲學頻譜 $|P_{\text{in}}(\omega)|^2$，而是對其進行一種平滑化處理，其平滑核正是 $|G_u(x,\omega)|^2$。

由於頻寬 $\Delta\omega(x)$ 為有限值，相鄰的耳蝸位置會對重疊的頻率範圍產生響應。因此，頻率資訊在基底膜上是以 連續且具冗餘性的方式來表示，而非由彼此銳利分離的頻譜線所構成。這種重疊性在聽覺感知的穩定性中扮演關鍵角色，能避免在頻率出現微小變化時，神經活化產生突兀的不連續跳變。

關於 $G_u(x,\omega)$ 的具體形式，以及特徵頻率 $\omega_c(x)$ 與頻寬 $\Delta\omega(x)$ 的來源，將於附錄 M 中加以推導與說明。

音高、音色與對數頻率組織

耳蝸組織的一個關鍵特徵，是特徵頻率與基底膜上位置之間近似呈指數關係，

$$\omega_c(x) = \omega_0\, e^{-ax}, \tag{13.5}$$

其中 $\omega_c(x)$ 表示位置 x 處的特徵頻率，而 $\omega_0, a > 0$ 為常數。此一指數型映射意味著，沿著基底膜的等距空間區間對應於頻率的等比變化。

耳蝸的頻率選擇性通常以品質因數（quality factor）來描述，

$$Q(\omega_c) = \frac{\omega_c(x)}{\Delta\omega(x)}, \tag{13.6}$$

其中 $\Delta\omega(x)$ 表示局部耳蝸濾波器的有效頻寬。在實驗上可觀察到，耳蝸濾波器運作於近似常數-Q 的區域，亦即 $\Delta\omega(x) \propto \omega_c(x)$。

因此，自然地引入對數頻率變數

$$\nu = \log \omega.$$

在此座標下，特徵頻率可寫為

$$\nu_c(x) = \log \omega_c(x) = \log \omega_0 - ax, \tag{13.7}$$

顯示耳蝸的位置—頻率對應關係在 ν 空間中為線性。此外，對數頻率中的有效頻寬滿足

$$\Delta\nu \;\approx\; \frac{\Delta\omega(x)}{\omega_c(x)} \;=\; \frac{1}{Q}, \tag{13.8}$$

其大小近似與位置無關。由於 $\nu_c(x)$ 與 x 呈線性關係，這亦意味著耳蝸激發在基底膜上的空間展寬

$$\Delta x \;\approx\; \frac{1}{aQ}$$

近似為常數。

因此，在對數頻率空間中，耳蝸可視為一組形狀與寬度近乎一致的濾波器，其差異主要表現為沿著 ν 軸（或等價地，沿著空間座標 x）的平移。

對於一個基頻為 ω^* 的諧波聲音，其頻譜成分 $\omega_k = k\omega^*$ 對應於

$$\nu_k = \log \omega^* + \log k. \tag{13.9}$$

因此，改變音高 ω^* 會在 ν 空間中產生整體的剛性平移，並透過 (13.7) 轉換為沿基底膜方向的平移。此一平移編碼了音高資訊。

相較之下，諧波的相對振幅則決定了激發圖樣的內部形狀，

$$E(x) \;\sim\; \sum_{k\geq 1} |a_k|^2 \, \Phi\big(Q\big[\log(k\omega^*) - \log \omega_c(x)\big]\big)\,, \tag{13.10}$$

而該形狀在平移下保持不變。這些相對權重獨立於音高，並編碼了音色資訊。

總結而言，指數型的位置—頻率映射 (13.5) 與近似常數-Q 的性質 (13.6) 將乘法形式的頻率結構轉換為加法形式的空間結構：音高對應於沿基底膜的平移，而音色則對應於該平移激發圖樣的內在幾何結構。

此一表示法的數學基礎，以及其與小波分析之間的關聯，將於附錄 J 中加以闡述。

13.3 耳蝸的品質因數與音高辨識

耳蝸的頻率選擇性通常以品質因數（quality factor）來量化，

$$Q(\omega) := \frac{\omega}{\Delta\omega},$$

其中 ω 為耳蝸某一位置所對應的特徵頻率，而 $\Delta\omega$ 則表示相應耳蝸濾波器的有效頻寬。此一定義自然地適用於前一小節所描述的基底膜之對數型頻率—位置對應關係。

事實上，根據指數形式的關係

$$\omega_c(x) = \omega_0 e^{-ax},$$

對數頻率變數 $\nu = \log\omega$ 與空間座標 x 呈線性關係。因此，若品質因數近似為常數，

$$Q(\omega) \approx \text{const},$$

則等價於在對數頻率空間中具有常數頻寬 $\Delta\nu = \Delta\omega/\omega$。在此表徵下，耳蝸濾波器在形狀與寬度上近似一致，彼此之間主要差異表現為沿著 ν 軸的平移。此一結構性特徵構成了將耳蝸視為近似常數-Q 濾波器組的理論基礎。

從音高辨識的觀點來看，品質因數決定了系統分辨相近頻率的能力。較大的 Q 對應於較窄的相對頻寬，使得彼此接近的頻譜成分能被更清楚地區分，並有助於諧波結構的精細編碼。相反地，較小的 Q 則意味著較寬的調諧曲線與較弱的頻率選擇性，導致音高解析度降低，但同時增強了時間整合能力。

在生理層面上，耳蝸的有效品質因數並非在整個頻帶內嚴格為常數。於正常聽覺中，實驗量測顯示 $Q(\omega)$ 會隨特徵頻率逐漸增加。此趨勢反映了耳蝸主動機制隨頻率變化的作用，尤其是外毛細胞運動性所造成的調諧銳化與靈敏度提升。值得注意的是，這種 Q 隨頻率增加的現象並不與常數-Q 的組織原則相矛盾，而是對既有對數型濾波結構所進行的受控調制，而非對其的偏離。

總而言之，耳蝸的品質因數在一個以對數方式組織的感覺系統中，提供了衡量頻率選

擇性與音高解析能力的定量指標。它將基底膜的機械濾波特性與聽覺系統辨識音高、解析諧波結構的能力緊密地聯繫在一起，並適用於整個可聽頻率範圍。

品質因數與頻率選擇性。 無因次量

$$Q := \frac{\omega}{\Delta\omega},$$

稱為品質因數（quality factor），用以簡潔地刻畫共振的尖銳程度以及線性聲學系統的頻率選擇性。在頻率域中，$\Delta\omega$ 描述了轉移函數 $|H(\omega)|$ 中共振峰的有效頻寬；而在時間域中，該量則與相應模態的衰減速率成反比。因此，較大的品質因數意味著較窄的頻譜共振峰以及較長的暫態響應壽命；反之，較小的品質因數則對應於較寬的頻率響應與較快的能量耗散。

在長笛管道等聲波導中，第 n 個模態的品質因數可近似表示為

$$Q_n \simeq \frac{\omega_n}{2\gamma_n},$$

其中 γ_n 為該模態的衰減率。高 Q 模態能夠支撐穩定且明確的音高，並有效儲存聲學能量；而低 Q 模態則表現出較寬的共振峰與較快的衰減。在室內聲學中亦有類似的詮釋：模態的品質因數與殘響時間密切相關，並量化了聲場中模態染色 (modal coloration) 的程度。

相較之下，人類耳蝸是在近似對數尺度的頻率軸上進行頻率分析。若沿基底膜引入一個空間座標 $x \propto \log\omega$，則相應的選擇性量度可定義為 $Q := x/\Delta x$，其對應於常數相對頻寬 $\Delta\omega/\omega$。此種常數-Q 的組織方式意味著聽覺系統是依據頻率比值而非絕對差值來解析聲音，從而為八度結構、諧波感知以及音高的對數尺度提供了自然的生理學基礎。

14 結論

本文從「聲音作為振動」的觀點出發，系統性地探討了聲音的物理結構、數學表示與聽覺感知之間的關係。透過傅立葉分析，我們看到任何複雜的聲音波形都可以分解為簡單的正弦成分，而這些成分的組合方式決定了聲音的頻譜結構。

在理想化的振動系統中，特徵模態提供了頻率與空間形狀之間的直接連結；在實際的聲音環境中，阻尼與耗散則使這些模態在頻域中形成具有有限寬度的共振峰。這種由模態、頻譜與幾何所構成的結構，構成了音色的物理基礎。

進一步地，我們指出人類耳蝸的機械結構並非單純執行傅立葉分析，而是實現了一種在對數頻率座標下具有平移不變性的分析方式。其近似常數品質因子的特性，使耳蝸的濾波行為更接近於小波轉換，自然地結合了頻率解析度與時間解析度。

從這個角度來看，音高、音色與協和度不再只是主觀感受，而是可以被理解為頻譜結

構在幾何空間中的排列方式。傅立葉分析、模態理論與小波觀點，提供了一套共同的語言，將物理、數學與聽覺經驗連結在一起。

15　最終評論：為何在今日仍要學習這些「經典」主題？

學生常會問，為什麼我們仍需要學習如傅立葉分析、特徵模態與波動方程等在一百多年前即已建立的理論。其答案在於，數學並不像科技那樣會隨時間而過時。一個思想若能歷經數百年而不衰，往往是因為它捕捉了自然與資訊組織方式中的某些根本結構。

傅立葉分析提供了一種系統化的方法，將複雜的訊號分解為較為簡單的組成成分。此一觀念正是現代訊號處理、音訊分析與資料表示的核心。在當代的機器學習與人工智慧中，神經網路同樣致力於建構資料的有效表示；從這個角度來看，所謂的表示學習（representation learning）可視為古典調和分析的直接延伸。

起源於振動弦、鼓膜與房間聲學中的特徵模態與譜理論，同樣在現代應用中扮演核心角色。譜方法廣泛出現在圖神經網路、降維技術、擴散模型以及分群演算法之中。經典問題「是否能從聲音中聽出鼓的形狀？」在資料科學中也有其現代對應：僅憑譜資訊，究竟能回復多少結構性的資訊？

音色模型與耳蝸力學則提供了另一個引人注目的連結。人類聽覺系統會即時執行一種對數尺度、多重尺度的時頻分析，其運作方式與現代音訊處理中所使用的小波轉換高度相似。語音辨識與音樂分析中所採用的許多特徵，皆直接受到此一生物濾波機制的啟發。

因此，這些經典主題並非僅具歷史意義。它們構成了許多現代科技（包括人工智慧）之概念基礎。研習這些理論，不僅使我們能夠使用當代工具，更讓我們理解其限制、詮釋其輸出，並在物理與數學原理的基礎上設計出新的方法。

A 複變數與歐拉公式（Complex Variables and Euler's Formula）

A.1 複數（Complex Numbers)

一個複數是形如

$$z = x + iy,$$

的表達式，其中 $x, y \in \mathbb{R}$，而 i 是滿足 $i^2 = -1$ 的虛數單位。我們稱 x 為 z 的實部（real part），y 為其虛部（imaginary part）：

$$\Re(z) = x, \qquad \Im(z) = y.$$

相等性（Equality）. 兩個複數相等，當且僅當它們的實部與虛部分別相等：

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

複數系統（Complex Number System） 所有複數所形成的集合記為 $\mathbb{C}$：

$$\mathbb{C} := \{\, x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

A.2 複數的代數（Algebra of Complex Numbers）

複數的加法與乘法遵循一般代數規則，再結合 $i^2 = -1$：

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

模長（Modulus / Length）. 若 $z = x + iy$，則其模長定義為

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

這正是平面上點 (x, y) 的歐幾里得距離。

共軛複數（Complex Conjugate）. 若 $z = x + iy$，其共軛複數為

$$\overline{z} = x - iy.$$

利用此定義，我們有

$$\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \Im z = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$

A.3 幾何觀點：複平面（Geometry: The Complex Plane）

我們可以將

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

這樣對應起來。因此，複數可以視為平面上的一個點（或向量）。水平軸稱為**實軸**（real axis），垂直軸稱為**虛軸**（imaginary axis）。

複平面中的單位圓為

$$|z| = 1,$$

也就是所有與原點距離為 1 的點所形成的集合。

A.4 向量空間結構（Vector Space Structure）

在上述識別 $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ 之下，複數可以視為一個 **二維實向量空間**，其運算如下：

$$z_1 + z_2 \ \leftrightarrow\ \mathbb{R}^2 \text{ 中的向量加法},$$

$$\alpha z \ \leftrightarrow\ \text{實數對向量的純量倍乘}.$$

在此向量空間上，可定義內積如下：

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re(z_1 \overline{z_2}) = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

其中 $z_1 = x_1 + iy_1$、$z_2 = x_2 + iy_2$。

A.5 極座標形式與複數乘法（Polar Form and Complex Multiplication）

一個複數也可以寫成**極座標形式（polar form）**：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

其中

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arg z = \text{自正實軸量起的輻角（argument）}.$$

複數乘法的幾何意義。 令

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

為兩個以極座標形式表示的複數，其中 $r_k \geq 0$ 為長度，θ_k 為自正實軸量起的角度。將兩者相乘：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\,[\,(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]. \end{aligned}$$

利用角度加法公式：

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2,$$

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2,$$

得到

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

結論：

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2, \qquad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2.$$

因此，複數乘法在幾何上等同於：

- 先將向量放大（縮放）倍數 r_2，
- 再將它旋轉角度 θ_2。

理解此幾何結構後，歐拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

提供了一個更簡潔的記號：極座標式可以寫成 $re^{i\theta}$，而角度加法則變成指數律

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

A.6 歐拉公式（Euler's Formula）

歐拉公式是極為重要且優美的恆等式：

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.}$$

它將指數函數、三角函數與複數乘法三者緊密地連結在一起。

利用此公式，單位圓上的任意點都可寫成

$$e^{i\theta},$$

代表複平面中繞原點旋轉角度 θ 的向量。

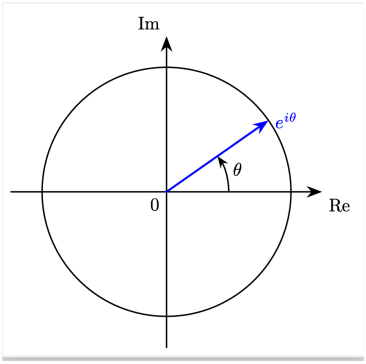


Figure 33: 歐拉公式將單位圓上的旋轉與時間中的振盪行為連結起來。

歐拉公式可由各種冪級數展開式推導而得：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

將 $x = i\theta$ 代入 e^x 的展開式後，便自然得到上述恆等式。

從幾何的角度看，複數 $e^{i\theta}$ 是複平面上單位圓的一點，其與正實軸的夾角為 θ。其實部與虛部正好對應於 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$。

因此，一個正弦型運動 $A\cos(\omega t)$ 可以視為旋轉複指數 $Ae^{i\omega t}$ 的實部。

歐拉公式的應用（Applications of Euler's Formula）

- **指數律（Exponential law）**：

$$\boxed{e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}}$$

  等價於三角函數的角度加成公式：

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2,$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2.$$

- **等比級數求和（Summation of Geometric Series）**：

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta} = \frac{e^{iN\theta}-1}{e^{i\theta}-1}.}$$

  此公式常用於推導離散傅立葉轉換（DFT）的反演公式。

- **複共軛**：

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

歐拉公式使得描述振盪（oscillations）的代數計算變得格外簡潔。使用複數表示法（complex notation）能有效處理多個振盪的相加（相量疊加）、交流電（AC circuit）的分析，以及量子力學中波函數的描述。

A.7　旋轉向量（相量，Phasors）

相量（*phasor*）是一個旋轉的複數向量，其形式為

$$Ae^{i(\omega t+\phi)},$$

其中：

- A 是向量的長度（振幅），
- ω 是角頻率，
- ϕ 是初始相位。

其實部是一個餘弦波：

$$\Re\big(Ae^{i(\omega t+\phi)}\big) = A\cos(\omega t+\phi) = \frac{1}{2}\Big(Ae^{i(\omega t+\phi)} + Ae^{-i(\omega t+\phi)}\Big),$$

這正是本文用來表示聲音波形的基本形式。

複數幾何觀點是理解傅立葉分析的關鍵，包括相量疊加、拍頻、干涉，以及在第 1–6 節中出現的解析訊號（analytic signal）。

A.8　習題

1. 將複數 $1+i$、$-1+2i$、$2-3i$ 繪製在複平面上，並計算它們的模長與幅角。
2. 證明：將任意複數乘上 i，其效果是在複平面上將該點逆時針旋轉 90°。

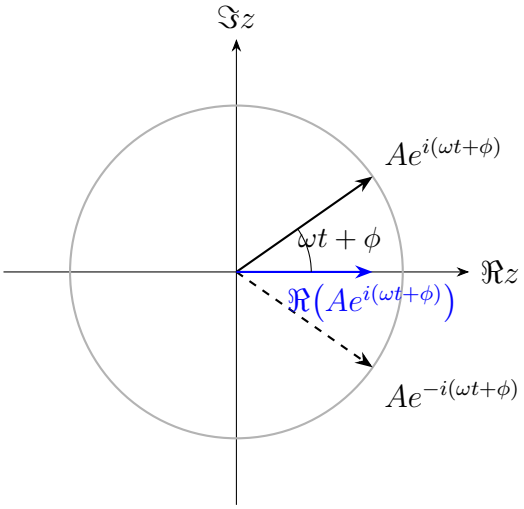


Figure 34: 相量 $Ae^{i(\omega t+\phi)}$ 的實部是其在實軸上的投影，即餘弦波 $A\cos(\omega t+\phi)$。虛線箭頭為其共軛相量 $Ae^{-i(\omega t+\phi)}$。

3. 將下列複數寫成極座標（極形式）：

$$2+i, \qquad -1+i\sqrt{3}, \qquad -3-3i.$$

4. 利用三角恆等式 $\cos(\alpha+\beta)$ 與 $\sin(\alpha+\beta)$，直接驗證複數乘法的幾何意義（模長相乘、角度相加）。

5. 證明：軌跡 e^{it} 是單位圓，而軌跡 $2e^{i(t+\pi/4)}$ 是一條半徑為 2 且整體旋轉 $\pi/4$ 的圓。

6. 證明下列三角恆等式：

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos(\theta_1+\theta_2)\big),$$
$$\sin\theta_1\sin\theta_2 = \frac{1}{2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos(\theta_1+\theta_2)\big),$$
$$\sin\theta_1\cos\theta_2 = \frac{1}{2}\big(\sin(\theta_1-\theta_2)+\sin(\theta_1+\theta_2)\big).$$

7. 將 $\cos(3\theta)$ 與 $\sin(3\theta)$ 表示為 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 的多項式。

8. 計算以下兩個同頻率相量之和：

$$A_1e^{i\omega t}+A_2e^{i(\omega t+\phi)}.$$

   求合成後的振幅與相位。

9. 計算以下不同頻率相量之和：

$$A_1e^{i(\omega_1 t+\phi_1)}+A_2e^{i(\omega_2 t+\phi_2)}.$$

   求其瞬時振幅與相位的表達式。

10. 以定性的方式說明：相量圖如何幫助理解兩個頻率接近時所產生的拍頻現象。

B 傅立葉級數與傅立葉變換（Fourier Series and Fourier Transform)

B.1 傅立葉級數：分解週期運動（Fourier Series: Decomposing Periodic Motion)

以正弦–餘弦表示（Representation in terms of sine–cosine） 假設 $x(t)$ 是一個週期為 2π 的函數。傅立葉（Fourier）發現，它可以展開成無限多項正弦與餘弦函數之和：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big),$$

其中係數由下式給出：

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(kt)\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(kt)\, dt.$$

這可以由三角函數的正交性（orthogonality）推導而來：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(\ell x)\, dx &= \delta_{k\ell}, \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(\ell x)\, dx &= \delta_{k\ell}, \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(\ell x)\, dx &= 0,
\end{aligned}$$

其中

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & k \neq \ell, \end{cases}$$

為 Kronecker delta。

以複指數表示（Representation in terms of complex exponentials） 利用複指數，可寫成更簡潔的形式：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt}\, dt.$$

這來自於：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}\,dt = \delta_{k\ell}.$$

若 $x(t)$ 為實函數，則係數滿足：

$$c_{-k} = \overline{c_k}.$$

每一項 e^{ikt} 代表頻率為 k 的諧波震盪（harmonic oscillation），而係數 c_k 包含其振幅與相位資訊。傅立葉定理指出：**任何複雜的振動，都可以表示為多個簡單諧振子的疊加。**

係數之間的關係（Relation between the coefficients）

- 由 a_k, b_k 表達 c_k：

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}, \quad c_{-k} = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}, \qquad k \geq 1.$$

- 由 c_k 表達 a_k, b_k：

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_k = c_k + c_{-k} = 2\Re(c_k), \qquad b_k = -i(c_k - c_{-k}) = \Im(c_k), \qquad k \geq 1.$$

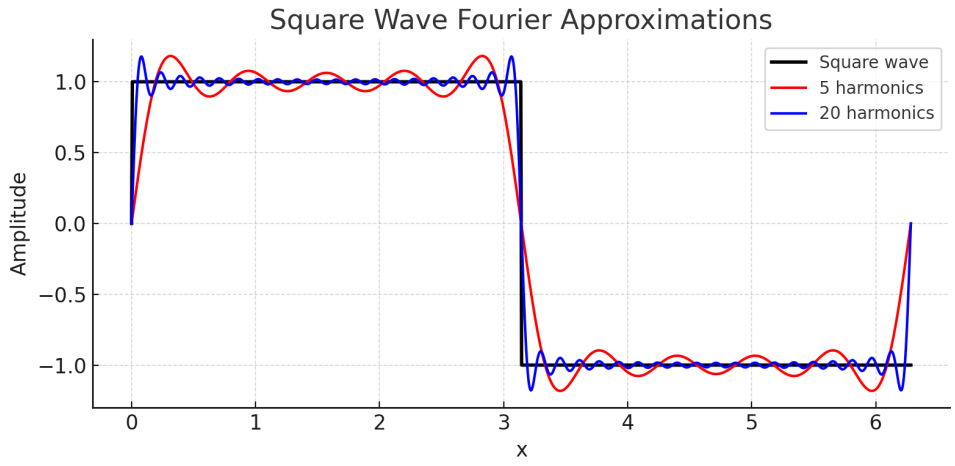


Figure 35: 方波可用有限多項正弦函數的傅立葉級數近似。

B.2 傅立葉變換（Fourier Transform）

前一小節中，我們看到傅立葉級數（Fourier series）的展開公式：

任何週期為 2π 的函數 $x(t)$ 都可寫成複指數形式的傅立葉級數：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,e^{-ikt}\,dt,$$

其中 c_k 稱為 x 的傅立葉係數。

若將時間變數縮放 $t \mapsto t/\Delta\omega$，則可得到週期 $2\pi/\Delta\omega$ 的傅立葉展開：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ik\Delta\omega t}, \qquad c_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} x(t) \, e^{-ik\Delta\omega t} \, dt.$$

這個公式可視為導出傅立葉變換的起點。

傅立葉變換（Fourier transform） 對於一般函數（不必是週期性的），其傅立葉表示為

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \, e^{i\omega t} \, d\omega, \qquad \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-i\omega t} \, dt,$$

其中 $\hat{x}(\omega)$ 稱為 $x(t)$ 的傅立葉變換。

這個公式可由傅立葉級數經由極限過程形式地導出：令

$$\Delta\omega \to 0, \qquad k\Delta\omega \to \omega,$$

則離散頻率的總和便轉換為一個連續頻率的積分。

統一觀點。 傅立葉級數與傅立葉變換提供了一個統一的框架，用以分析聲音訊號：

- **週期性聲音**（如長音、持續的樂器音）分解成離散的頻率線（spectral lines），其振幅與相位決定音色。
- **非週期性聲音**（如語音、擊碎聲、環境噪音）以連續頻譜（continuous spectrum）描述能量分布。

無論週期或非週期，聲音的基本構成單位都是正弦波。傅立葉表示法讓我們能在時間域（time domain）與頻率域（frequency domain）之間自由切換，從而以清晰的數學方式理解音訊的結構。

B.3 數學觀念總結（Summary of Mathematical Ideas)

- **歐拉公式（Euler's formula）**將「平面上的旋轉」與「時間中的振盪」連結起來，優雅地結合了幾何與代數。
- **三角函數（trigonometric functions）**描述具有週期性的運動，是所有振動現象的核心語言。

- **傅立葉分析（Fourier analysis）**告訴我們任何波形都能拆解成多個純正弦波的組合——這讓複雜聲音的頻率結構得以被「看見」。
- **離散傅立葉變換（Discrete Fourier Transform）**使上述分析能在數位世界中被計算、視覺化與應用，是現代音訊技術與科學計算的核心工具。

綜合以上觀念，這些數學工具構成了「聲音、振動與現代聲學」的基礎架構，再一次展示了抽象的數學如何解釋我們耳中所聽見的物理世界。

C 加窗傅立葉轉換與短時傅立葉轉換

真實世界中的聲音訊號通常是非週期且隨時間變化的。為了分析其頻率成分如何隨時間演化，我們引入加窗傅立葉轉換（windowed Fourier transform, WFT），亦稱為短時傅立葉轉換（short-time Fourier transform, STFT）。本附錄將簡要總結此方法的數學基礎。

C.1 連續加窗傅立葉轉換（CWFT）

令 $x(t)$ 為一個聲音訊號，而 $w(t)$ 為一個窗函數，通常選取為平滑且具局部性的函數（例如 Hann、Hamming、Blackman、Gaussian 等）。在時間 t_0 與角頻率 ω 處，$x(t)$ 的加窗傅立葉轉換定義為

$$X(t_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, w(t - t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

其中窗函數 $w(t - t_0)$ 將訊號 $x(t)$ 限制在 t_0 附近的一小段時間區間內，因此 $X(t_0, \omega)$ 表示在時間 t_0 附近的局部頻率內容。

備註。 位移後的窗函數並不必須形成單位分割：

$$\sum_k w(t - t_k) \quad \text{不需要等於} 1.$$

窗函數的用途僅在於將分析局部化；若要進行訊號重建，則需滿足的是框架條件（frame conditions），而非簡單的單位分割性質。

C.2 離散加窗傅立葉轉換（DWFT）

假設連續訊號 $x(t)$ 以取樣頻率 f_s 進行取樣，得到離散序列

$$x[n] = x(n/f_s).$$

令 $w[n]$ 為一個離散的分析窗函數。給定跳躍步長（hop size）H 以及傅立葉轉換長度 N，離散加窗傅立葉轉換（DWFT）定義為

$$X[m,k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n+mH]\, w[n]\, e^{-i2\pi kn/N}, \qquad 0 \le m \le M,$$

其中 m 用來標記時間框架（time frames），而 k 則對應於離散的頻率索引（frequency bins）。在每一個時間框架中，訊號會先與窗函數 $w[n]$ 相乘，再進行一次離散傅立葉轉換。

詮釋。 對於每一個以 m 為索引的時間框架，

$$x_m[n] = x[n+mH]\, w[n]$$

表示一段經過加窗的短時間訊號，其中心時間約位於

$$t = \frac{mH}{f_s}.$$

對 $x_m[n]$ 進行快速傅立葉轉換（FFT），即可得到該時間附近的局部頻譜。

C.3 常用窗函數

令 N 表示窗長，並令

$$n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

在離散加窗（短時）傅立葉轉換中，訊號在進行離散傅立葉轉換之前，會先與一個實值窗函數 $w[n]$ 相乘。常見的窗函數包括以下幾種。

Hann 窗。 Hann 窗（常被誤稱為 “Hanning” 窗）定義為

$$w_{\text{Hann}}[n] = \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos\!\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right), \qquad 0 \le n \le N-1.$$

此窗函數在端點處取零值，在頻率解析度與旁瓣抑制之間提供了一個良好的折衷。

Hamming 窗。 Hamming 窗定義為

$$w_{\text{Hamming}}[n] = 0.54 - 0.46\cos\!\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \qquad 0 \le n \le N-1.$$

與 Hann 窗不同，Hamming 窗在端點處並不為零，但其第一旁瓣的幅度較低。

Blackman 窗。 Blackman 窗定義為

$$w_{\text{Blackman}}[n] = 0.42 - 0.50\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), \qquad 0 \le n \le N-1.$$

此窗函數能有效抑制旁瓣，但代價是主瓣在頻率域中較為寬廣。

高斯窗（離散形式）。 以 $(N-1)/2$ 為中心的離散高斯窗可寫為

$$w_{\text{Gauss}}[n] = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\frac{n - \frac{N-1}{2}}{\sigma\frac{N-1}{2}}\right)^2\right), \qquad 0 \le n \le N-1,$$

其中 $\sigma > 0$ 用來控制窗函數的有效寬度。高斯窗在端點處並不嚴格為零。

高斯窗（連續形式）。 在理論分析中，例如於 Gabor 轉換的情境下，常使用對應的連續時間高斯窗

$$w_{\text{Gauss}}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

在所有窗函數之中，高斯窗是唯一能使 時間—頻率不確定性乘積達到最小的窗函數。

窗函數	主瓣寬度	旁瓣高度	頻譜洩漏抑制	STFT 常見用途
矩形窗	窄	非常高	差	極少使用
Hann 窗	中等	–31 dB	良好	標準 STFT
Hamming 窗	中等	–43 dB	非常好	語音 / 音訊分析
Blackman 窗	較寬	–58 dB	極佳	高精度頻譜分析
Kaiser 窗（β）	可調	可調	可調	高彈性、高精度分析

Table 4: 常用分析窗函數之比較。Hann 窗在頻率解析度與頻譜洩漏抑制之間提供良好的折衷，因此在音訊分析的聲譜圖中常被作為預設選擇。

C.4 週期邊界與頻譜洩漏

N 點離散傅立葉轉換（DFT）在隱含上假設有限序列 $x_m[n]$ 是以週期方式延拓的。若 $x_m[n]$ 在端點 $n = 0$ 與 $n = N-1$ 處無法連續銜接，則其週期重複將產生不連續點，進而導致頻譜洩漏（可視為 Gibbs 現象的離散類比）。

窗函數的角色。 使用具漸縮特性的窗函數 $w[n]$ （如 Hann、Hamming、Blackman 窗）可有效減少端點處的不連續性，並顯著抑制頻譜洩漏。相對而言，矩形窗（$w[n] = 1$）會產生最嚴重的頻譜洩漏。

C.5 零填補（Zero Padding）

在進行 FFT 之前，對加窗後的訊號區段進行零填補，並不會改變真正的頻率解析度，但可使頻譜在頻率軸上取樣得更為細緻：

$$x_m[n] \longrightarrow \begin{cases} x_m[n], & 0 \le n < N, \\ 0, & N \le n < M, \end{cases} \qquad M > N.$$

此作法會產生視覺上較為平滑的頻譜，並有助於辨識頻譜峰值的位置。

C.6 重建（重疊相加法）

若希望由 STFT 進行訊號重建，則窗函數必須滿足某種框架條件。其中一個常見的特例為 常數重疊相加（constant overlap–add, COLA）條件：

$$\sum_m w[n - mH] = C,$$

其中 $C > 0$ 為常數。例如，當步長 $H = N/2$ 時，Hann 窗便滿足 COLA 條件。此時可透過重疊相加法實現完全重建：

$$x[n] = \frac{1}{C} \sum_m x_m[n - mH]\, w[n - mH].$$

需要強調的是，COLA 條件並非時頻分析所必須；它僅在我們希望由 $X[m, k]$ 重建原始訊號 $x[n]$ 時才具有重要性。

C.7 時間—頻率解析度

窗長決定頻率解析度，而窗函數的頻寬則決定時間解析度。概念上可總結為：

$$\text{長窗} \;\Rightarrow\; \text{良好的頻率解析度，較差的時間解析度,}$$

$$\text{短窗} \;\Rightarrow\; \text{良好的時間解析度，較差的頻率解析度.}$$

這可視為 海森堡不確定性原理在離散時頻分析中的一種對應表現。

C.8 離散短時傅立葉轉換中的參數

以下列出離散短時傅立葉轉換（short-time Fourier transform, STFT）中所涉及的主要參數，以及它們之間的相互關係。

取樣參數。 令 f_s 表示取樣頻率（sampling rate），單位為 Hz。對應的微觀時間步長為

$$\tau = \frac{1}{f_s},$$

因此離散時間訊號 $x[n]$ 可視為連續訊號在時間點 $x(n\tau)$ 的取樣值。

窗長。 令 N 表示窗長，亦即每一次局部傅立葉轉換中所使用的取樣點數。單一分析窗在物理時間上的長度為

$$T_w = N\tau = \frac{N}{f_s}.$$

跳躍步長與時間解析度。 令 H 表示跳躍步長（hop size 或 frame shift），其單位為取樣點數。相鄰兩個 STFT 時間框架的中心時間相隔

$$\Delta t = H\tau = \frac{H}{f_s}.$$

此量 Δt 即為 STFT 的有效時間解析度。

過取樣因子。 實務上常引入過取樣因子 L，定義為

$$H = \frac{N}{L}.$$

因此 $L = 1$ 對應於窗之間沒有重疊，而 $L > 1$ 則會產生重疊的分析窗，使聲譜圖在時間方向上的變化更為平滑。

頻率解析度。 長度為 N 的離散傅立葉轉換會產生以 $k = 0, 1, \ldots, N-1$ 為索引的頻率區間（frequency bins）。相鄰頻率區間之間的間距為

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}.$$

因此，每一個頻率區間可視為代表一個寬度為 Δf 的頻帶。

奈奎斯特頻率。 可解析的最高頻率為奈奎斯特頻率

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{f_s}{2},$$

在 N 為偶數時，其對應的頻率索引為 $k = N/2$。

STFT 公式。　在上述參數設定下，離散訊號 $x[n]$ 的短時傅立葉轉換可寫為

$$X[m,k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[mH+n]\, w[n]\, e^{-i2\pi kn/N},$$

其中 $w[n]$ 為所選用的窗函數，而 m 則為時間框架索引。

聲譜圖。　聲譜圖（spectrogram）定義為 STFT 的幅值平方：

$$S[m,k] = |X[m,k]|^2,$$

實務上常以對數尺度（dB）來顯示，以符合人類聽覺對強度的感知特性。

範例。　作為一個具體的例子，考慮參數設定

$$f_s = 44100 \text{ Hz}, \qquad N = 2048, \qquad L = 8.$$

則可得

$$\tau = \frac{1}{44100} \approx 2.27 \times 10^{-5} \text{ s},$$

$$T_w = \frac{2048}{44100} \approx 46.4 \text{ ms},$$

$$H = \frac{2048}{8} = 256, \qquad \Delta t = \frac{256}{44100} \approx 5.8 \text{ ms},$$

$$\Delta f = \frac{44100}{2048} \approx 21.5 \text{ Hz}.$$

此一參數選擇在低音高訊號（例如男性語音）中提供了良好的頻率解析度，同時藉由分析窗的重疊維持時間方向上平滑的變化。

C.9　軟體工具

- Sonic Visualiser 是一套科學用的音訊分析與標註工具，廣泛應用於語音、音樂、聲學與聽覺研究中，用以探索聲音的時頻結構、音高、音色以及各種與感知相關的特徵。亦可參考 Sonic Visualiser 的中文教學資源。
- Sonic Tools 是一款 iOS 平台上的多功能分析應用程式，可用於量測與分析聲音、振動以及磁場，並提供相當完整的量測與分析功能。

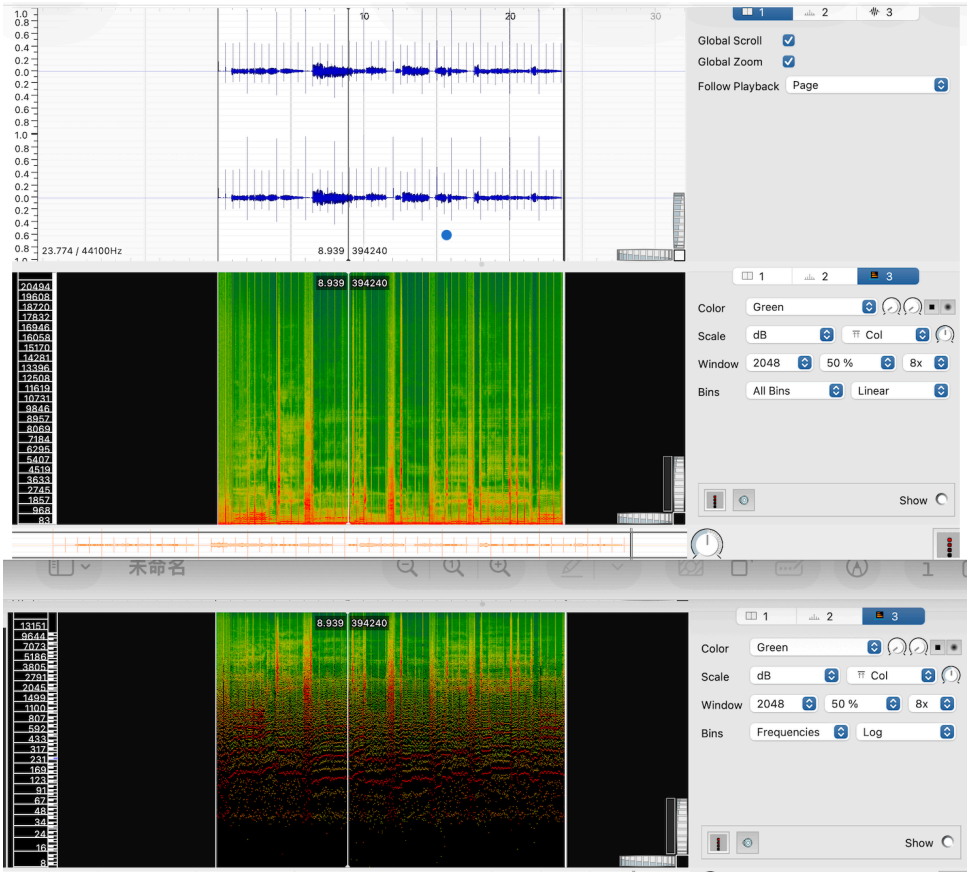


Figure 36: 男性語音的聲譜圖。上圖為頻率以線性刻度顯示的所有頻率區間；下圖則為頻率以對數刻度顯示的聲譜圖。

C.10 總結

加窗傅立葉轉換透過對訊號的局部時間區段進行傅立葉轉換，提供一種適用於語音、音樂以及一般音訊分析的局部頻譜表示。窗函數的使用可有效減輕頻譜洩漏，而短時傅立葉轉換（STFT）則能描述頻譜隨時間變化的行為；零填補雖不提升實際解析度，卻能提供更細緻的頻率取樣。

若需要由 STFT 進行訊號重建，則須額外滿足窗函數的相關條件；然而，在多數標準的分析應用中，完整重建並非必要。

D　聲音與振動的數學基礎

D.1　矩形鼓膜（Dirichlet 邊界；邊長 L_x 與 L_y）

令 $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$，$u(x, y, t)$ 表示膜面的橫向位移。在張力 T 均勻、單位面積質量密度為 ρ，且振幅很小的情況下，有

$$\rho\, u_{tt} = T\, \Delta u \quad \text{於} \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{於} \partial\Omega.$$

設分離變數形式 $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$，並定義 $c^2 := T/\rho$，可得

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2,$$

其中 $k^2 > 0$ 為常數。於是

$$T'' + \omega^2 T = 0, \qquad \omega = c\, k,$$

以及

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \qquad Y'' + \beta^2 Y = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = k^2.$$

在 $x = 0, L_x$ 與 $y = 0, L_y$ 上施加 Dirichlet 邊界條件 $u = 0$，得到

$$X_m(x) = \sin\!\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big), \qquad Y_n(y) = \sin\!\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big), \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

其中

$$\alpha = \frac{m\pi}{L_x}, \qquad \beta = \frac{n\pi}{L_y}, \qquad k_{mn}^2 = \Big(\frac{m\pi}{L_x}\Big)^2 + \Big(\frac{n\pi}{L_y}\Big)^2.$$

因此，算子 $-\Delta$ 的空間特徵函數與特徵值為

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin\!\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\sin\!\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big), \qquad \lambda_{mn} = k_{mn}^2,$$

而相應的正規模態角頻率為

$$\omega_{mn} = c\, k_{mn} = c\sqrt{\Big(\frac{m\pi}{L_x}\Big)^2 + \Big(\frac{n\pi}{L_y}\Big)^2}.$$

一般的時間相依模態可寫為

$$u_{mn}(x, y, t) = \Big(A_{mn}\cos(\omega_{mn} t) + B_{mn}\sin(\omega_{mn} t)\Big)\,\phi_{mn}(x, y).$$

在區域 Ω 上，這些模態彼此正交：

$$\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \phi_{mn}\,\phi_{pq}\,dx\,dy = 0 \quad \text{若} (m,n)\neq(p,q).$$

一組方便的 L^2 正規化基底為

$$\widehat{\phi}_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}}\,\sin\!\Big(\frac{m\pi x}{L_x}\Big)\sin\!\Big(\frac{n\pi y}{L_y}\Big).$$

備註（簡併性）. 若

$$\Big(\tfrac{m}{L_x}\Big)^2+\Big(\tfrac{n}{L_y}\Big)^2 = \Big(\tfrac{p}{L_x}\Big)^2+\Big(\tfrac{q}{L_y}\Big)^2,$$

則有 $\lambda_{mn}=\lambda_{pq}$，相應的頻率出現簡併（degeneracy）。在特殊情形 $L_x=L_y=L$（正方形鼓膜）下，此條件化簡為

$$m^2+n^2 = p^2+q^2.$$

D.2 圓形鼓膜（Dirichlet 邊界；半徑 R）

在極座標下，令

$$\Omega=\{(r,\theta): 0<r<R,\ 0\le\theta<2\pi\},$$

仍考慮相同的波動方程 $\rho u_{tt}=T\Delta u$，以及邊界條件 $u|_{r=R}=0$。設 $c^2=T/\rho$。取分離變數形式 $u(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$，可得

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{1}{R}\Big(R''+\frac{1}{r}R'\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -k^2, \qquad k>0.$$

因此

$$T''+\omega^2 T=0,\quad \omega=c\,k, \qquad \Theta''+m^2\Theta=0,\quad m\in\mathbb{Z},$$

而徑向部分滿足 Bessel 方程

$$r^2R''+rR'+(k^2r^2-m^2)R=0.$$

在 $r=0$ 具有有限能量的解為 $R(r)=J_m(kr)$（第一類 Bessel 函數）。邊界條件 $u(R,\theta,t)=0$ 要求 $J_m(kR)=0$，因此 $k=\alpha_{mn}/R$，其中 α_{mn} 為 J_m 的第 n 個正零點（$n=1,2,\dots$）。於是 Dirichlet Laplace 算子的特徵對為

$$\phi_{mn}(r,\theta)=J_m\Big(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\Big)\begin{cases}\cos(m\theta),\\ \sin(m\theta),\end{cases} \qquad \lambda_{mn}=\Big(\frac{\alpha_{mn}}{R}\Big)^2,$$

其對應的正規模態角頻率為

$$\omega_{mn}=c\,\frac{\alpha_{mn}}{R}.$$

時間相依形式為

$$u_{mn}(r,\theta,t) = \Big(A_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + B_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\Big)\,\phi_{mn}(r,\theta).$$

正交性與正規化. 對固定的 m，若 $\alpha_{mn} \neq \alpha_{m\ell}$，則對應的徑向部分在權重 r 下彼此正交：

$$\int_0^R J_m\Big(\tfrac{\alpha_{mn}}{R}r\Big)\,J_m\Big(\tfrac{\alpha_{m\ell}}{R}r\Big)\,r\,dr = 0 \quad (n \neq \ell),$$

而角向因子 $\{\cos(m\theta), \sin(m\theta)\}$ 在區間 $[0, 2\pi]$ 上亦相互正交。在圓盤上，一個方便的 L^2 正規化可寫為

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^R \phi_{mn}(r,\theta)\,\phi_{m\ell}(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta = 0 \ (n \neq \ell), \qquad = \pi R^2\big[J_{m+1}(\alpha_{mn})\big]^2 \ (n = \ell),$$

因此

$$\widehat{\phi}_{mn}(r,\theta) = \frac{1}{R\sqrt{\pi}\,|J_{m+1}(\alpha_{mn})|}\,J_m\Big(\frac{\alpha_{mn}}{R}r\Big)\begin{cases}\cos(m\theta),\\ \sin(m\theta)\end{cases}$$

在圓盤上是 L^2 正規化的。

簡併性. 當 $m \geq 1$ 時，每一個特徵值 λ_{mn} 至少具有二重簡併，分別對應於角向因子 $\cos(m\theta)$ 與 $\sin(m\theta)$。當 $m = 0$ 時，模態具有軸對稱性，且不發生簡併。

不同於一維弦振動，這些頻率並非某一基頻的整數倍；這也是為什麼鼓聲通常較不具「音高感」，而呈現出更偏向打擊性的音色。

E Weyl 定律：一個初等推導

在本附錄中，我們概述一個以 k 空間中格點計數為基礎的 Weyl 定律標準推導。我們先給出物理直覺，接著處理特徵值可顯式寫出的矩形情形，最後說明如何透過 Dirichlet–Neumann 夾擠法將結果推廣到一般區域。

E.1 Weyl 定律的物理直覺

考慮特徵值問題

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{於} \Omega,$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 為有界區域，並在其邊界上施加 Dirichlet 或 Neumann 邊界條件。令 $N(\lambda)$ 表示滿足 $\lambda_j \leq \lambda$ 的特徵值個數。Weyl 定律指出，當 $\lambda \to \infty$ 時，

$$N(\lambda) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi}\,\lambda.$$

其物理直覺可由以下觀點理解：高頻特徵函數可視為平面波 $e^{ik\cdot x}$ 的疊加，其中波向量 $k \in \mathbb{R}^2$，其能量為 $|k|^2 = \lambda$。在遠離邊界的區域內，高頻模態的行為幾乎與整個平面中的自由波相同。因此，計算能量不超過 λ 的特徵值個數，在本質上等同於計算有多少滿足 $|k|^2 \le \lambda$ 的波向量能夠「容納」在區域 Ω 之中。

在 k 空間中，允許的波向量形成一個半徑為 $\sqrt{\lambda}$ 的圓盤，其面積為 $\pi\lambda$。每一個特徵模態在 k 空間中佔據的有效面積約為 $(2\pi)^2/\operatorname{Area}(\Omega)$，因此能量不超過 λ 的模態數大約為

$$N(\lambda) \approx \frac{k\text{ 空間圓盤的面積}}{\text{每一模態的面積}} = \frac{\pi\lambda}{(2\pi)^2/\operatorname{Area}(\Omega)} = \frac{\operatorname{Area}(\Omega)}{4\pi}\,\lambda.$$

邊界條件的影響僅侷限於靠近 $\partial\Omega$ 的一層薄區域，不會影響主導項；而此主導項只取決於 Ω 的面積。

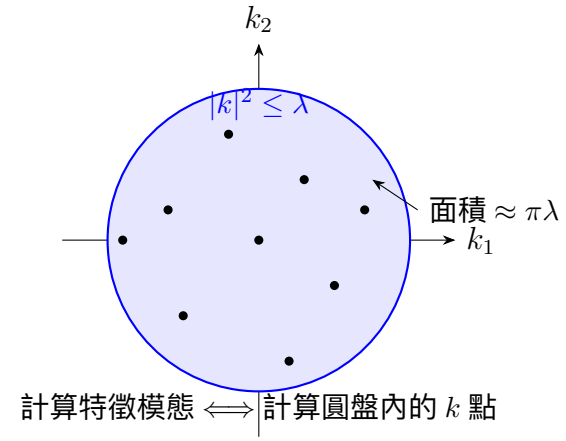


Figure 37: 以 k 空間計數觀點理解 Weyl 定律。高頻特徵模態的行為近似為具有波向量 k 的平面波，其能量為 $|k|^2 = \lambda$，並且在 k 空間中每一模態對應的有效面積為 $(2\pi)^2/\operatorname{Area}(\Omega)$。滿足 $|k|^2 \le \lambda$ 的模態數，在漸近意義下，等於 k 空間圓盤的面積除以每一模態的面積，從而得到 $N(\lambda) \sim \frac{\operatorname{Area}(\Omega)}{4\pi}\lambda$。

E.2 矩形情形

令 $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \subset \mathbb{R}^2$，考慮 Dirichlet 特徵值問題

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{於}\Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

其特徵函數為

$$u_{m,n}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{m\pi x_1}{L_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_2}{L_2}\right), \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

對應的特徵值為

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2.$$

定義計數函數

$$N(\lambda) = \#\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 :\ \lambda_{m,n} \le \lambda\}.$$

不等式 $\lambda_{m,n} \le \lambda$ 等價於

$$\left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 \le \lambda,$$

或等價地寫成

$$\left(\frac{m}{L_1/\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2/\pi}\right)^2 \le \lambda.$$

因此，整數點 (m,n) 位於第一象限中的橢圓區域

$$E_\lambda = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1}{L_1/\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{L_2/\pi}\right)^2 \le \lambda,\ x_1,x_2 \ge 0\right\}$$

之內。

當 λ 很大時，E_λ 中的整數點數目在漸近意義下等同於該區域的面積：

$$N(\lambda) \sim \text{Area}(E_\lambda) = \frac{1}{4}\,\pi\lambda\,\left(\frac{L_1}{\pi}\right)\left(\frac{L_2}{\pi}\right) = \frac{L_1 L_2}{4\pi}\,\lambda.$$

由於 $\text{Area}(\Omega) = L_1 L_2$，因此得到

$$N(\lambda) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi}\,\lambda.$$

相同的論證亦適用於 Neumann 邊界條件。在此情形下，特徵值為

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2, \qquad m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

而計數問題仍然歸結為同一個格點計數問題，因此其漸近公式保持不變。

E.3 推廣至一般區域

對於具有足夠光滑邊界的一般有界區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，其特徵值通常無法顯式寫出。然而，藉由將 Ω 與矩形區域進行比較，並使用 Dirichlet–Neumann 夾擠法（bracketing），仍可恢復其主導的漸近行為。

Dirichlet–Neumann 夾擠法（概念）． 以有限個彼此不重疊的矩形 $\{R_j\}$ 覆蓋 Ω，並分別在每個 R_j 上考慮 Dirichlet 與 Neumann 問題。在 Ω 上的 Dirichlet 特徵值，可由在矩形聯集上加上人工內部邊界的 Dirichlet 條件所得到的特徵值給出下界；而 Ω 上的 Neumann 特徵值，則可由在內部邊界上施加 Neumann 條件的情形給出上界。這樣可得

到如下形式的不等式：

$$N_D(\lambda) \geq \sum_j N_{D,R_j}(\lambda) - C_1\sqrt{\lambda}, \qquad N_N(\lambda) \leq \sum_j N_{N,R_j}(\lambda) + C_2\sqrt{\lambda},$$

其中常數 C_1, C_2 僅依賴於 Ω 的幾何性質。此處 N_D 與 N_N 分別表示 Ω 上的 Dirichlet 與 Neumann 計數函數，而 N_{D,R_j}、N_{N,R_j} 則是各矩形上的對應計數函數，它們皆滿足矩形情形的 Weyl 漸近公式。

這些餘項至多以 $O(\sqrt{\lambda})$ 的速度成長，反映了邊界對頻譜的貢獻。由於面積項為 λ 階，邊界貢獻屬於次階修正。將所有矩形的貢獻加總，並適當地讓矩形尺寸趨於零，便可得到

$$N_D(\lambda) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi}\,\lambda, \qquad N_N(\lambda) \sim \frac{\text{Area}(\Omega)}{4\pi}\,\lambda.$$

更精細的分析還能給出包含 Ω 周長的二階修正項，以及在 Dirichlet 情形下涉及邊界曲率的項。然而，就主導項而言，只有區域的面積會出現，這也解釋了為何 Weyl 定律在 Dirichlet 與 Neumann 邊界條件下具有相同的形式。

F 熱跡漸近展開

在本附錄中，我們說明熱跡

$$\text{Tr}(e^{t\Delta})$$

在小時間極限下的行為，如何編碼一個具有光滑邊界的平面有界區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的幾何資訊，以及如何導出其漸近展開的前幾項。

F.1 熱核與熱跡

令 Δ 表示定義在 Ω 上、並施加 Dirichlet 或 Neumann 邊界條件的 Laplace 算子。熱方程

$$\partial_t u = \Delta u, \qquad u|_{t=0} = f$$

的解可寫為

$$u(t,x) = (e^{t\Delta} f)(x) = \int_\Omega K_\Omega(t,x,y)\, f(y)\, dy,$$

其中 $K_\Omega(t,x,y)$ 稱為熱核（heat kernel）。算子 $e^{t\Delta}$ 屬於 trace class，其跡可表示為熱核在對角線上的積分：

$$\text{Tr}(e^{t\Delta}) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \int_\Omega K_\Omega(t,x,x)\, dx,$$

其中 $\{\lambda_j\}$ 為 $-\Delta$ 的特徵值（依重數計算）。

我們關心的是當 $t \to 0^+$ 時，此熱跡的短時間漸近行為。

F.2 主導項：內部行為與面積

在整個平面 $\mathbb{R}^2$ 上，熱核可明確寫為

$$K_{\mathbb{R}^2}(t,x,y) = \frac{1}{4\pi t}\exp\!\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right).$$

此核在長度尺度約為 $\sqrt{t}$ 的範圍內，於 $x=y$ 附近高度集中。

對於有界區域 Ω，若點 x 位於區域內部，且滿足 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \gg \sqrt{t}$，則從 x 出發的熱量在時間 t 內尚未觸及邊界。因此，在 x 的鄰近區域中，擴散行為幾乎與整個平面中的情形無法區分，從而有

$$K_\Omega(t,x,x) \approx K_{\mathbb{R}^2}(t,x,x) = \frac{1}{4\pi t}.$$

當 $t \to 0^+$ 時，這類「內部點」幾乎佔據整個 Ω；距離邊界不超過 $\sqrt{t}$ 的區域，其面積約為 $|\partial\Omega|\sqrt{t}$，只對熱跡提供次階貢獻。因此

$$\int_\Omega K_\Omega(t,x,x)\,dx \sim \int_\Omega \frac{1}{4\pi t}\,dx = \frac{|\Omega|}{4\pi t}, \qquad t \to 0^+.$$

這便是熱跡漸近展開中的主導項。它僅依賴於區域 Ω 的面積，可視為 Weyl 定律主導項在熱方程情境下的對應結果。

F.3 邊界修正：半平面模型與周長項

為了得到下一階項，我們需研究距離邊界約為 $\sim\sqrt{t}$ 的點對熱跡的貢獻。在邊界上一個小鄰域內，引入局部座標 (s,n)，其中 s 為沿著 $\partial\Omega$ 的弧長座標，n 為指向內部的法向座標。在一階近似下，邊界附近的區域可視為半平面

$$H = \{(s,n) \in \mathbb{R}^2 :\ n > 0\}.$$

在此座標下，自由空間中的熱核為

$$K_{\mathbb{R}^2}(t,x,y) = \frac{1}{4\pi t}\exp\!\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right),$$

而半平面上的熱核可由鏡像法（method of images）構造。若 $x=(s,n)$，其關於邊界的鏡像點為 $x^*=(s,-n)$，則在 Dirichlet（$n=0$ 上 $u=0$）與 Neumann（$n=0$ 上 $\partial_n u=0$）邊界條件下，

$$K_H^D(t,x,y) = K_{\mathbb{R}^2}(t,x,y) - K_{\mathbb{R}^2}(t,x,y^*),$$

$$K_H^N(t,x,y) = K_{\mathbb{R}^2}(t,x,y) + K_{\mathbb{R}^2}(t,x,y^*).$$

令 $y = x$，可得

$$K_H^D(t,x,x) = \frac{1}{4\pi t} - \frac{1}{4\pi t}e^{-n^2/t}, \qquad K_H^N(t,x,x) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1}{4\pi t}e^{-n^2/t}.$$

半平面熱核與自由空間熱核之差，正是邊界造成的修正項：

$$K_H^D(t,x,x) - K_{\mathbb{R}^2}(t,x,x) = -\frac{1}{4\pi t}e^{-n^2/t},$$

$$K_H^N(t,x,x) - K_{\mathbb{R}^2}(t,x,x) = +\frac{1}{4\pi t}e^{-n^2/t}.$$

接著對薄薄的邊界層進行積分。在局部座標下，有 $dx \approx ds\,dn$，因此邊界貢獻可近似為

$$\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty \big(K_H(t,(s,n),(s,n)) - K_{\mathbb{R}^2}(t,(s,n),(s,n))\big)\,dn\,ds.$$

對 Dirichlet 邊界條件，上式成為

$$-\int_{\partial\Omega}\int_0^\infty \frac{1}{4\pi t}e^{-n^2/t}\,dn\,ds = -\frac{|\partial\Omega|}{4\pi t}\int_0^\infty e^{-n^2/t}\,dn.$$

內部的高斯積分為

$$\int_0^\infty e^{-n^2/t}\,dn = \sqrt{t}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{t}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

因此

$$-\frac{|\partial\Omega|}{4\pi t}\int_0^\infty e^{-n^2/t}\,dn = -\frac{|\partial\Omega|}{4\pi t}\cdot\sqrt{t}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}}.$$

對 Neumann 邊界條件，符號相反，得到 $+|\partial\Omega|/(8\sqrt{\pi t})$。

因此，熱跡在小時間極限下的下一階漸近項為一個 周長項：

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} \mp \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \cdots, \qquad t \to 0^+,$$

其中負號對應 Dirichlet 邊界條件，正號對應 Neumann 邊界條件。

F.4 曲率與更高階項

下一個修正項涉及邊界的曲率。在前述的半平面模型中，邊界被視為平直的。更精確的局部模型，則以具有曲率 $\kappa(s)$ 的圓弧取代直線，或更一般地，在法向座標中對邊界進行展開。此一局部幾何的影響，會在熱核對角線的漸近展開中產生一個 t^0 階的附加

項。將其沿著 $\partial\Omega$ 積分後，可得到形式為

$$\frac{1}{12\pi}\int_{\partial\Omega}\kappa(s)\,ds$$

的曲率項，其符號則取決於所施加的邊界條件。若 Ω 為多邊形區域，則還會出現額外的角點項，其大小與各頂點的外角有關。

我們在此不推導這些更高階的修正項；它們需要對邊界附近的熱核進行更精細的分析，並使用法向座標下的高階局部展開。對於具有光滑邊界的平面區域，最終結果可概略寫為

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} \mp \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi}\int_{\partial\Omega}\kappa(s)\,ds + \cdots, \qquad t \to 0^{+},$$

其中第一項反映區域的面積，第二項反映邊界的長度，而隨後的項則編碼了邊界的曲率資訊。

F.5 總結：Weyl 定律與熱跡

Laplace 特徵值問題. 在有界區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上，考慮

$$-\Delta u = \lambda u,$$

並施加 Dirichlet（$u|_{\partial\Omega} = 0$）或 Neumann（$\partial_n u|_{\partial\Omega} = 0$）邊界條件。

特徵值計數函數.

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_j \le \lambda\}.$$

Weyl 定律（主導項）. 當 $\lambda \to \infty$ 時，

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi}\,\lambda.$$

高頻特徵函數的行為近似為平面波，因此特徵值的計數可視為在區域 Ω 中「能容納多少個波長」的問題。

熱核. 熱算子 $e^{t\Delta}$ 具有積分核 $K_\Omega(t,x,y)$，使得

$$(e^{t\Delta}f)(x) = \int_\Omega K_\Omega(t,x,y)f(y)\,dy.$$

熱跡恆等式.

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta}) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} = \int_{\Omega} K_{\Omega}(t,x,x)\,dx.$$

短時間行為. 當 $t \to 0^+$ 時，

$$K_{\Omega}(t,x,x) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi t}, & \text{區域內部點,} \\ (\text{自由空間核}) \ \pm (\text{鏡像核}), & \text{靠近邊界.} \end{cases}$$

熱跡的漸近展開. 對於具有光滑邊界的平面區域，

$$\mathrm{Tr}(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} \mp \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi}\int_{\partial\Omega} \kappa(s)\,ds + \cdots, \qquad t \to 0^+.$$

其中各主導項所編碼的幾何意義為：

- 面積 $|\Omega|$：對應於區域內部的「體積型」擴散；
- 周長 $|\partial\Omega|$：來自邊界層的修正；
- 曲率：反映邊界 $\partial\Omega$ 的局部彎曲幾何。

F.6 歷史脈絡（Weyl 定律與熱跡）

- **1911 ——Hermann Weyl** 證明了特徵值計數的漸近公式

  $$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda.$$

  此結果標誌著譜幾何學（spectral geometry）的誕生。

- **1920–1930 年代——Courant 與 Hilbert** 發展特徵值的 min–max 原理，並深化 Weyl 的思想。Courant 的節線定理（1923）賦予特徵函數明確的幾何意義。

- **1950 年代——Levitan 與 Hörmander** 對 Weyl 定律加以精緻化，並引入微局部分析的觀點。

- **1960 年代——Minakshisundaram、Pleijel 與 Seeley** 發展熱核的漸近展開：

  $$K_{\Omega}(t,x,x) \sim \frac{1}{4\pi t} \mp \frac{\kappa_0}{\sqrt{\pi t}} + \cdots.$$

  這一理論將熱流行為與幾何不變量直接連結起來。

- **1966 ——Mark Kac** 發表著名文章 *Can One Hear the Shape of a Drum?*，將「幾何形狀可由熱跡（頻譜）聽出」的思想推廣至廣泛讀者群。
- **1970–1980 年代——Seeley、Gilkey** 系統性地建立熱核係數 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 的理論架構，並揭示其幾何與拓撲意涵。
- **1990 年代——Melrose、Colin de Verdière** 推進 Weyl 定律及其邊界修正項的半經典（semiclassical）與微局部詮釋。
- **2010 年代——Ivrii** 專書 *100 Years of Weyl's Law* 提供 Weyl 定律一百年發展的完整現代綜述。

F.7 延伸閱讀指引：進一步學習的方向

若你想先建立整體直覺：

- M. Kac ——"Can One Hear the Shape of a Drum?"（1966）。可讀性極高，且為此主題的經典入門文章。

若你想先理解 Weyl 定律：

- 任一本偏重 Fourier 級數與 Laplace 算子的偏微分方程入門教材。
- V. Ivrii ——"100 Years of Weyl's Law"（綜述文章）。

若你想理解熱跡與熱核方法：

- Gilkey ——*Spectral Geometry of a Riemannian Manifold*。
- Grigor'yan ——*Heat Kernel and Analysis on Manifolds*，第 1–3 章。

若你對物理連結特別有興趣：

- 量子撞球（quantum billiards）與半經典分析的入門介紹。
- Colin de Verdière 的短文與綜述文章。

若你想深入完整的數學細節：

- Melrose ——"Weyl Asymptotics"（Park City 講義）。
- Gilkey 關於熱核係數的系列專書。

G 具有音孔之長笛的數學模型

G.1 將音孔視為阻抗邊界條件

位於 $x = M$ 的開放音孔，並不滿足精確的壓力釋放條件 $p(M) = 0$。相反地，它的行為更接近一個分流支路（shunt branch）：一部分聲學體積流率經由音孔洩放至管外，而另一部分波動仍可沿主管道繼續傳播。這種行為可自然地以音孔的聲學阻抗模型來描述，並在 $x = M$ 處施加相應的接點（連續性）條件（可參考木管樂器建模中關於音孔與傳遞矩陣的標準討論）。

音孔處的接點條件. 在頻率域中工作，並採用時間相依因子 $e^{i\omega t}$。令 $P(x)$ 表示主管道中的複數聲壓，$V(x)$ 表示複數的體積流率（管道截面為 A）。在音孔位置 $x = M$，聲壓必須連續：

$$P(M^-) = P(M^+) =: P(M),$$

而體積流率則分為下游管道中的流率，以及經由音孔洩放的流率：

$$V(M^-) = V(M^+) + V_h.$$

定義音孔阻抗 $Z_h(\omega)$ 為

$$Z_h(\omega) := \frac{P(M)}{V_h(\omega)}.$$

消去 V_h 後，可得到基本的分流邊界條件

$$\boxed{V(M^-) - V(M^+) = \frac{P(M)}{Z_h(\omega)}.} \tag{G.1}$$

利用主管道中的平面波關係式

$$\frac{dP}{dx} = -\,i\omega\,\frac{\rho_0}{A}\,V,$$

即可得到等價的聲壓梯度跳躍條件：

$$\boxed{\frac{dP}{dx}(M^+) - \frac{dP}{dx}(M^-) = \frac{i\omega\rho_0}{A}\,\frac{P(M)}{Z_h(\omega)}.} \tag{G.2}$$

式 (BC$_P$) 取代了粗略的近似條件 $P(M) = 0$。只有在 $|Z_h(\omega)| \ll Z_c$（音孔洩放極強）的極限下，$|P(M)|$ 才會被強烈抑制，其中 $Z_c = \rho_0 c/A$ 為主管道的特徵阻抗。

音孔阻抗的低頻（集中參數）模型. 將開放音孔視為一個短小的「煙囪」（側向短管），其半徑為 a，有效長度為 ℓ_{eff}（包含實際煙囪高度以及端部修正），其截面積為 $A_h = \pi a^2$。在足夠低的頻率下（低於音孔自身的高階共振頻率），一個實用的近似是將音孔阻抗視

為兩個部分的串聯：(i) 煙囪的慣性阻抗，以及 (ii) 外開口處的輻射阻抗：

$$Z_h(\omega) \approx Z_{\text{chim}}(\omega) + Z_{\text{rad}}(\omega).$$

煙囪的慣性項給出

$$Z_{\text{chim}}(\omega) = i\omega M_h, \qquad M_h = \frac{\rho_0 \ell_{\text{eff}}}{A_h}, \qquad \ell_{\text{eff}} = h + \Delta_{\text{in}} + \Delta_{\text{out}}.$$

其中，一個常用的近似是 $\Delta_{\text{out}} \approx 0.8\,a$（無法蘭開口），而 Δ_{in} 則取決於接點幾何形狀與內削（undercutting）的設計。

音孔開口處的輻射阻抗（較明確的表示）. 對於一個半徑為 a、向自由空間輻射的圓形開口，其輻射阻抗可表示為

$$Z_{\text{rad}}(\omega) = \frac{\rho_0 c}{A_h}\Big(R(ka) + iX(ka)\Big), \qquad k = \omega/c,$$

其中 $R(ka)$ 與 $X(ka)$ 為無因次函數。在 ka 很小的情形下，其定性行為為

$$R(ka) = O\big((ka)^2\big), \qquad X(ka) = O(ka),$$

因此在低頻時，阻性部分很小，而反應性部分則表現為額外的端部修正。關於有法蘭與無法蘭圓管與圓孔的實用近似公式，在聲學文獻中已有大量整理，並被例行性地應用於木管樂器的數值阻抗計算之中。

典型數值尺度：何時 $P(M) \approx 0$ 是合理的？ 為了判斷音孔是否可近似為壓力釋放邊界，可將音孔阻抗的大小 $|Z_h|$ 與主管道的特徵阻抗 $Z_c = \rho_0 c/A$ 進行比較。以具有代表性的長笛參數為例：

$$\text{管徑半徑} r_b \approx 9.5\,\text{mm}, \quad a \approx 4\,\text{mm}, \quad h \approx 3\,\text{mm}, \quad \Delta_{\text{out}} \approx 0.8a,$$

並採用低 ka 模型下的 $Z_h \approx Z_{\text{chim}} + Z_{\text{rad}}$，可得到下列具有指標性的比值：

$$\frac{|Z_h|}{Z_c} \approx \begin{array}{c|ccccc} f\ (\text{Hz}) & 200 & 500 & 1000 & 2000 & 4000 \\ \hline |Z_h|/Z_c & 0.13 & 0.32 & 0.65 & 1.30 & 2.61 \end{array}$$

因此，在較低頻率（數百 Hz）時，音孔能有效洩放聲能，近似 $P(M) \approx 0$ 往往是合理的；而在較高頻率下，音孔行為愈來愈呈現慣性特性，不再像理想的開放端。這種明顯的頻率依賴性，正是音孔陣列具有截止頻率的原因之一，也解釋了為何高次泛音能「感知」到更多下游管段的存在。

傳遞矩陣的實作（多個音孔）. 在存在多個音孔的情況下，計算共振頻率的一種方便方法是傳遞矩陣法（亦稱傳輸線法）。對於一段長度為 Δ 的均勻管段，狀態向量 $\big(P, V\big)^T$

滿足

$$\begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}_{x=x_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(k\Delta) & iZ_c \sin(k\Delta) \\ iZ_c^{-1} \sin(k\Delta) & \cos(k\Delta) \end{pmatrix}}_{T_{\text{tube}}(\Delta)} \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}_{x=x_1}, \qquad \Delta = x_2 - x_1.$$

位於 $x = M$ 的音孔可視為一個分流導納 $Y_h(\omega) = 1/Z_h(\omega)$，其模型為

$$\begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}_{M^-} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y_h(\omega) & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{hole}}(\omega)} \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}_{M^+}.$$

將管段矩陣與音孔矩陣依序相乘，即可得到整個樂器的總傳遞矩陣 $T(\omega)$。再於下游端施加終端條件，便可求得輸入阻抗 $Z_{\text{in}}(\omega)$。

圖 38（示意）說明了開啟單一音孔如何改變並重組阻抗峰的位置。在低頻時，開放音孔具有強烈洩放作用（$|Z_h|$ 很小），使主要共振對應的有效管長約為 M；而在較高頻率下，音孔逐漸呈現慣性行為（$|Z_h|$ 變大），下游管段對共振結構的影響便顯著增加。

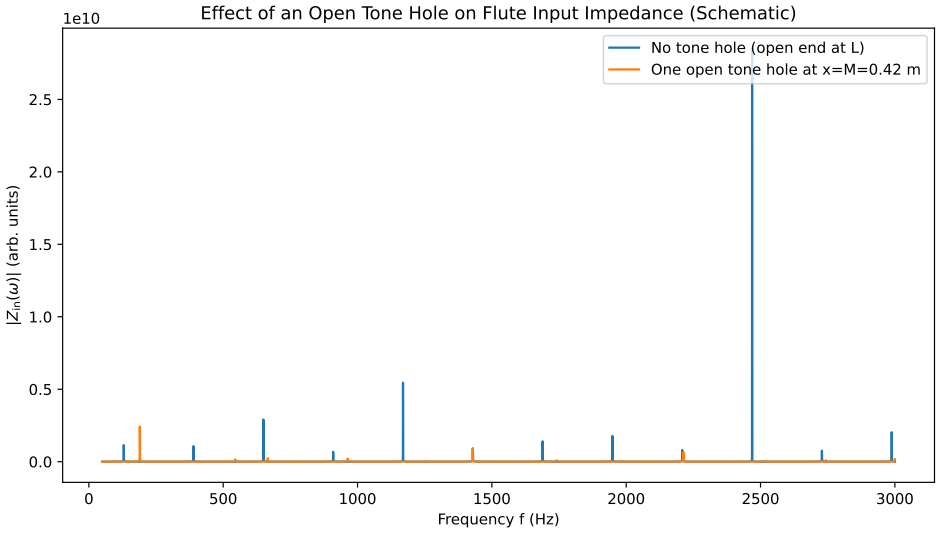


Figure 38: 以傳遞矩陣模型計算之輸入阻抗幅值 $|Z_{\text{in}}(\omega)|$ 的示意圖，比較無音孔的均勻管道，與在 $x = M$ 處開啟一個音孔的情形。在低頻時，開放音孔造成強烈洩放（$|Z_h|$ 小），使主導共振向有效長度 $\approx M$ 位移；在高頻時，音孔變得愈來愈具慣性（$|Z_h|$ 大），下游管段對共振結構的貢獻隨之增加。

H 小提琴傳遞函數的振動—聲學推導

本附錄基於線性振動—聲學理論，給出小提琴傳遞函數的數學推導。小提琴琴身被建模為一個耦合系統，由彈性振動的板件與其所包覆的空氣腔體所組成。所得到的傳遞函數是樂器本身的內在性質，並不依賴於所演奏的音高。

H.1 小提琴的模型方程

幾何與物理場 令 $\Omega_a \subset \mathbb{R}^3$ 表示小提琴內部的空氣腔體。其邊界可分解為

$$\partial\Omega_a = \Gamma_s \cup \Gamma_o,$$

其中 Γ_s 表示振動的結構表面（面板與背板），而 Γ_o 表示開口部分（f 孔）。

相關的物理場為：

- $p(\mathbf{x}, t)$：定義於 $\mathbf{x} \in \Omega_a$ 的聲壓；
- $w(\mathbf{x}, t)$：定義於 $\mathbf{x} \in \Gamma_s$ 的板件法向位移。

這些物理場透過 Γ_s 上的邊界條件彼此耦合。

控制方程

1. 結構動力學. 板件的位移（記為 w）滿足一個線性的彈性方程：

$$\rho_s h\, \partial_{tt} w(\mathbf{x}, t) + \mathcal{D}_s \partial_t w(\mathbf{x}, t) + \mathcal{L}_s w(\mathbf{x}, t) = f_{\text{bridge}}(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t)\big|_{\Gamma_s}, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_s,$$

其中 $\rho_s h$ 為單位面積的質量密度，$\mathcal{L}_s$ 表示線性的彎曲算子，而 f_{bridge} 代表琴弦經由琴橋施加於板件上的外力。算子 $\mathcal{D}_s$ 用來描述由木材、接合處以及清漆所引起的有效結構阻尼（黏彈性耗散）。

在偏微分方程的層級下，空氣—結構耦合系統本身是保守的；對於小提琴聲學而言，空氣中的體黏性損耗可視為可以忽略不計。

2. 聲學場. 空氣腔體內的聲壓滿足波動方程

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} p(\mathbf{x}, t) - \Delta p(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_a.$$

3. 耦合與輻射. 在振動板件所在的邊界 Γ_s 上，法向速度的連續性給出

$$\partial_n p = -\,\rho_0\, \partial_{tt} w \qquad \text{於} \Gamma_s,$$

其中 ρ_0 為空氣密度。在開口邊界 Γ_o 上，輻射損耗以阻抗邊界條件建模，從而在系統中引入聲學阻尼。

H.2 駐波模態與模態展開

諧波形式. 假設系統以角頻率 ω 作時間諧波運動，

$$w(\mathbf{x},t) = \Re\{W(\mathbf{x};\omega)\, e^{i\omega t}\}, \qquad p(\mathbf{x},t) = \Re\{P(\mathbf{x};\omega)\, e^{i\omega t}\},$$

則耦合系統可化為

$$\big(-\omega^2 \rho_s h + i\omega \mathcal{D}_s + \mathcal{L}_s\big) W(\mathbf{x};\omega) = F_{\text{bridge}}(\mathbf{x};\omega) + P(\mathbf{x};\omega)\big|_{\Gamma_s}, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_s,$$

$$(\Delta + k^2) P = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_a, \quad k = \omega/c,$$

其中耦合係透過 Γ_s 與 Γ_o 上的邊界條件來施加。項 $i\omega\mathcal{D}_s W$ 源自時間域中結構阻尼項 $\mathcal{D}_s \partial_t w$，代表振動板件中的不可逆能量耗散。

模態降階. 將物理場展開於模態基底上：

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M} q_m\, \phi_m(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_s,$$

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} a_n\, \psi_n(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega_a,$$

其中 $\{\phi_m\}$ 為結構模態，$\{\psi_n\}$ 為空氣腔體的聲學模態。

將廣義座標收集為

$$\bar{q} = (q_1, \ldots, q_M)^T, \qquad \bar{a} = (a_1, \ldots, a_N)^T,$$

並定義組合狀態向量

$$\mathbf{x} = (\bar{q}, \bar{a})^T \in \mathbb{R}^{M+N}.$$

透過 Galerkin 投影，可得到一個耦合的二階動力系統：

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\, F(t),$$

而在頻率域中則為

$$\big(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}\big)\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{b}\, F(\omega).$$

其中 **M** 與 **K** 為對稱正定矩陣。阻尼矩陣 **D** 主要來自板件的結構耗散，以及經由 f 孔輻射所引起的聲學能量損失。

阻尼的來源 阻尼矩陣 **D** 彙集了多種物理耗散機制：

- 木材中的內部摩擦與黏彈性損耗；

- 經由 f 孔向外界輻射所造成的聲學損耗；
- 空氣中的黏滯與熱傳導損耗。

在模態座標中，這些耗散機制表現為各模態的阻尼係數 γ_n，或等價地，以品質因子 $Q_n = \omega_n/\gamma_n$ 來描述。阻尼使共振峰具有有限寬度，並確保系統中的能量能夠隨時間耗散。

H.3 傳遞函數

令琴橋的速度定義為

$$V_b(t) = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}}(t),$$

其中 **c** 為適當選取的觀測向量。對此取傅立葉轉換，可得

$$Y(\omega) = \frac{V_b(\omega)}{F(\omega)} = i\omega\, \mathbf{c}^T \big(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{D} + \mathbf{K} \big)^{-1} \mathbf{b}.$$

經由頻譜分解，可得到其模態展開形式

$$Y(\omega) = \sum_n \frac{R_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\gamma_n \omega},$$

其中 ω_n 與 γ_n 為小提琴琴身的內在特性，分別對應於各模態的共振頻率與阻尼強度。

傳遞函數 H 的推導　我們現在將傳遞函數 $H(\omega)$ 視為耦合振動—聲學系統的一個輸入—輸出映射來加以推導。關鍵在於：經過線性化與離散化（或模態截斷）之後，小提琴可被視為一個在琴橋處受驅動的有限維線性二階動力系統。

輸入與輸出的選擇

令輸入為施加於琴橋上的（純量）外力 $F(t)$。在降階後的模型中，此力透過一個固定的受力分佈型式（以向量 **b** 表示）進入結構方程，因此廣義外力可寫為 $\mathbf{b}\, F(t)$。

常見的兩種輸出為：

- **琴橋速度（機動度 / 導納）**：$V_b(t)$，此時 $H(\omega) = Y(\omega) = V_b(\omega)/F(\omega)$。
- **某一觀測點的輻射聲壓**：$p_{\text{rad}}(t)$，此時 $H(\omega) = p_{\text{rad}}(\omega)/F(\omega)$。

在這兩種情形下，輸出皆為廣義狀態的一個線性泛函。

二階系統與頻率響應

降階後的耦合系統具有形式

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}\,F(t),$$

其中 $\mathbf{x}(t) = (\bar{q}(t), \bar{a}(t))^T$ 彙集了結構與聲學的廣義座標，**M** 與 **K** 為對稱正定矩陣，而 **D** 為半正定矩陣。在小提琴聲學中，**D** 主要代表板件的結構耗散，以及經由開口（f 孔）輻射所造成的能量損失。

對此系統取傅立葉轉換（或假設時間相依形式為 $e^{i\omega t}$），可得

$$\big(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}\big)\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{b}\,F(\omega).$$

因此

$$\mathbf{x}(\omega) = \big(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}\big)^{-1}\mathbf{b}\,F(\omega).$$

輸出映射與 $H(\omega)$ 的定義

假設輸出具有以下形式：

$$y(t) = \ell^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{m}^T\dot{\mathbf{x}}(t),$$

其中向量 ℓ 與 **m** 用來選取所關心的物理量。例如，琴橋速度可寫為

$$V_b(t) = \mathbf{c}^T\dot{\mathbf{x}}(t),$$

其中 **c** 為適當的觀測向量，此時 $\ell = \mathbf{0}$、$\mathbf{m} = \mathbf{c}$。

在頻率域中，有 $y(\omega) = (\ell^T + i\omega\mathbf{m}^T)\mathbf{x}(\omega)$，因此

$$\frac{y(\omega)}{F(\omega)} = (\ell^T + i\omega\mathbf{m}^T)\big(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}\big)^{-1}\mathbf{b}.$$

我們遂將傳遞函數定義為

$$H(\omega) := \frac{y(\omega)}{F(\omega)} = (\ell^T + i\omega\mathbf{m}^T)\big(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}\big)^{-1}\mathbf{b}.$$

$H(\omega)$ 的共振（模態）表示

在相當溫和的假設下，此一頻率響應可寫成如下的模態展開形式：

$$H(\omega) = \sum_n \frac{R_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\gamma_n\omega},$$

其中：

- ω_n 為耦合振動—聲學系統的共振頻率（亦即解析算子的極點）；
- γ_n 為各模態的阻尼係數；
- R_n 為由輸入與輸出耦合所決定的殘值。

因此，$|H(\omega)|$ 會在 $\omega = \omega_n$ 附近呈現明顯的共振峰，其峰值寬度由 γ_n 所控制。這些參數完全由小提琴的琴身與空氣腔體結構所決定，而與實際演奏的音高無關。

H.4 詮釋

因此，小提琴的傳遞函數可視為一個耦合振動—聲學算子的解算子（resolvent）。其共振頻率 $\{\omega_n\}$ 與阻尼係數 $\{\gamma_n\}$ 共同編碼了樂器的內在聲學指紋。

音樂音高決定了琴弦激發中的哪些諧波會「取樣」這一固定的傳遞函數，從而塑造輸出聲譜的包絡，並最終決定人耳所感知的音色。

由於拉弦所產生的激發頻譜通常具有相當寬的頻帶，且對音高的依賴性相對較弱，小提琴特有的音色主要由琴身本身的內在傳遞函數所主導。

I 二次剩餘擴散器

I.1 二次剩餘擴散器的構造

二次剩餘擴散器（quadratic residue diffuser, QRD）是一種一維的聲學井陣列，各井具有相同的寬度 w，但深度不同。將各井以 $n = 0, 1, \ldots, N-1$ 編號，其深度分佈定義為

$$d_n = \frac{n^2 \bmod N}{N}\, d_{\max},$$

其中 $d_{\max}$ 為最大井深，而 N 通常選為質數。

序列 $n^2 \bmod N$ 在數論中稱為 模 N 的二次剩餘。當 N 為質數時，該序列雖然完全是決定性的，卻呈現出近似隨機的分佈特性以及低空間自相關。這些性質正是擴散器設計中抑制相干反射所需的關鍵條件。

相位控制與反射抑制. 考慮一個角頻率為 ω 的單色平面波，正入射至剛性表面。深度為 d_n 的井會引入一個往返相位位移

$$\phi_n(\omega) = \frac{2\omega}{c}\, d_n,$$

其中 c 為聲速。當不同井所對應的相位 $\phi_n(\omega)$ 隨 n 劇烈變化時，反射波的各分量將以非相干方式疊加，從而有效抑制鏡面反射。因此，一個有效的擴散器設計，其目標在於產生一個在 2π 模意義下近似均勻的相位分佈。

為何選用二次剩餘. 若井深隨編號 n 線性變化，則相位分佈亦呈線性關係，這會導致強烈的空間週期性以及明顯的光柵瓣（grating lobes）。非線性的映射

$$n \longmapsto n^2 \bmod N$$

提供了一種簡單而有效的方式來破壞這種週期性。當 N 為質數時，所得到的序列避免了短距離的空間重複結構，並使相鄰井之間的相關性保持在很低的水準，這正是產生擴散行為所不可或缺的條件。

相位分佈與擴散機制. 在角頻率 ω 下，第 n 個井所對應的相位位移可寫為

$$\phi_n(\omega) = \frac{2\omega d_{\max}}{cN}\,(n^2 \bmod N).$$

當因子 $2\omega d_{\max}/c$ 的量級接近 2π 時，相位 $\phi_n(\omega)$ 會隨 n 快速變化。在遠場中，反射聲壓可近似表示為

$$p_{\mathrm{refl}}(\theta,\omega) \propto \sum_{n=0}^{N-1} \exp\!\big(i\phi_n(\omega)\big)\,\exp(-iknw\sin\theta)\,, \qquad k=\frac{\omega}{c}.$$

當相位之間的相關性很弱時，上述總和在統計意義下類似於複平面中的隨機漫步，使聲能量重新分佈到廣泛的反射角度範圍內，並強烈抑制鏡面反射成分。

工作頻率範圍. QRD 僅在有限的頻率範圍內能有效運作。低頻下限由相位變化需足夠顯著的條件所決定：

$$\frac{2\omega d_{\max}}{c} \gtrsim \pi, \qquad f_{\min} \approx \frac{c}{4d_{\max}}.$$

高頻上限則出現在聲波波長與井寬可比時：

$$\lambda \lesssim 2w, \qquad f_{\max} \approx \frac{c}{2w}.$$

超出此頻段後，聲散射將主要由幾何效應主導，而精心設計的相位關係便會逐漸失效。

質數模數的角色. 選擇 N 為質數可確保二次剩餘序列不含非平凡的週期子結構。若 N 不是質數，通常會引入額外的相關性，從而削弱擴散效果，並在反射聲場中產生方向性假影。

物理詮釋. 井深對編號呈二次依賴，並非來自幾何直覺，而是源於數論結構。此構造提供了一種決定性的方式，使所誘發的相位位移在效果上近似隨機相位，從而在不依賴隨機表面粗糙度的情況下，實現高效率的寬頻聲學擴散。

總結而言，二次剩餘深度公式

$$d_n = \frac{n^2 \bmod N}{N}\, d_{\max}$$

產生了一種具有低空間相關性的決定性深度分佈，能有效抑制鏡面反射，並帶來穩健的擴散行為。

References

[1] T. J. Cox and P. D'Antonio, *Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, Design and Application*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2009.

[2] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, 5th ed., CRC Press, Boca Raton, 2009.

[3] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, Princeton, 1986.

[4] M. R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communication*, Springer, Berlin, 2009.

J 耳蝸濾波的數學模型

J.1 線性耳蝸模型

一個簡化的一維行波模型可用來描述耳蝸中 基底膜的橫向（垂直）位移 $u(x,t)$，以及位於前庭階（scala vestibuli）與鼓階（scala tympani）之間的流體壓力差 $p(x,t)$ 之間的耦合關係。在最簡的線性近似下，模型可寫為

$$m(x)\,\partial_{tt}u(x,t) + r(x)\,\partial_t u(x,t) + k(x)\,u(x,t) = p(x,t), \qquad x \in [0,L], \tag{J.1}$$

其中 $m(x)$、$r(x)$ 與 $k(x)$ 分別代表基底膜的有效質量、阻尼與勁度，且皆沿耳蝸縱向座標 x 緩慢變化。

流體與基底膜之間的耦合在縱向上提供了壓力與膜加速度之間的關係。在長波近似（long-wave approximation）下，該關係可寫為

$$\partial_{xx}p(x,t) = \alpha\,\partial_{tt}u(x,t), \qquad x \in [0,L], \tag{J.2}$$

其中常數 $\alpha > 0$ 由流體密度與耳蝸幾何結構所決定。

初始條件與邊界條件。 在區間 $x \in [0, L]$ 上，簡化後的模型 $m(x)u_{tt}+r(x)u_t+k(x)u = p$ 與 $p_{xx} = \alpha u_{tt}$ 需要指定時間方向的初始條件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \qquad p(x,0) = p_0(x), \quad p_t(x,0) = \pi_0(x),$$

並且這些初始資料需與控制方程式相容。一個常見的選擇是假設系統「由靜止狀態開始」，並在基底端施加外部驅動。

由於壓力方程在空間變數 x 上為二階微分方程，因此需要兩個空間邊界條件。一組標準且最簡的邊界條件可取為

$$p(0,t) = p_{\text{in}}(t), \qquad p(L,t) = 0,$$

其中 $p_{\text{in}}(t)$ 代表由鐙骨 / 卵圓窗傳入的輸入壓力，而 $p(L,t) = 0$ 則用以描述在耳蝸頂端 (helicotrema) 附近的壓力平衡。

在此簡化模型中，不需要對位移 u 額外指定空間邊界條件，因為 u 的控制方程不包含空間微分項；一旦壓力場 $p(x,t)$ 被決定，基底膜的位移 $u(x,t)$ 便可由局部振子方程逐點求得。

J.2 轉移函數 $G(x,\omega)$ 的 WKB 推導

我們考慮一個簡化的一維基底膜–流體耦合模型，其控制方程為

$$\begin{aligned} m(x)\,u_{tt} + r(x)\,u_t + k(x)\,u &= p, \\ p_{xx} &= \alpha\,u_{tt}, \end{aligned}$$

其中 $u(x,t)$ 表示基底膜的位移，$p(x,t)$ 為基底膜兩側的壓力差，而 $\alpha > 0$ 為描述流體與基底膜耦合強度的有效參數。

頻域化簡與阻抗表示

假設系統作時間諧振動，

$$u(x,t) = \Re\{U(x;\omega)e^{i\omega t}\}, \qquad p(x,t) = \Re\{P(x;\omega)e^{i\omega t}\}.$$

則由 (J.1) 可得

$$\big(k(x) - \omega^2 m(x) + i\omega r(x)\big)\,U(x;\omega) = P(x;\omega).$$

定義（複數）機械阻抗

$$Z(x,\omega) := k(x) - \omega^2 m(x) + i\omega r(x),$$

使得

$$P(x;\omega) = Z(x,\omega)\,U(x;\omega). \tag{J.3}$$

另一方面，由 (J.2) 可得 $P_{xx} = -\alpha\omega^2 U$。利用 (J.3) 消去 P，可得到下列純量常微分方程：

$$\partial_{xx}\big(Z(x,\omega)\,U(x;\omega)\big) = -\alpha\,\omega^2\,U(x;\omega). \tag{J.4}$$

將其展開後可寫為

$$Z\,U'' + 2Z'\,U' + (Z'' + \alpha\omega^2)\,U = 0, \tag{J.5}$$

其中撇號表示對空間變數 x 取導數。

WKB 假設與局部色散關係

假設解具有 WKB 形式

$$U(x;\omega) = A(x;\omega)e^{i\theta(x;\omega)}, \qquad q(x,\omega) := \theta'(x;\omega),$$

其中振幅 A 與阻抗 Z 相較於快速變化的相位 θ 皆為緩慢變化的函數。直接計算可得

$$U' = (A' + iqA)e^{i\theta}, \qquad U'' = (A'' + 2iqA' + iq'A - q^2A)e^{i\theta}.$$

將上述表達式代入 (J.5)，並除以 $e^{i\theta}$，得到

$$Z(A'' + 2iqA' + iq'A - q^2A) + 2Z'(A' + iqA) + (Z'' + \alpha\omega^2)A = 0.$$

在 WKB 的主導階次中，主要平衡來自 $-Zq^2A$ 與 $\alpha\omega^2A$ 兩項；所有包含 A', A'', q', Z', Z'' 的項皆屬於較低階的修正項。因此可得近似關係

$$-Zq^2A + \alpha\omega^2A \approx 0,$$

從而導出局部色散關係

$$\boxed{q(x,\omega)^2 \approx \frac{\alpha\,\omega^2}{Z(x,\omega)}.} \tag{J.6}$$

由於阻抗 Z 因阻尼的存在而為複數，局部波數 q 一般亦為複數。選擇滿足 $\Im q > 0$ 的平方根分支，可描述行波在共振區域之外所呈現的空間衰減行為。

傳輸方程與 WKB 振幅

利用 (J.6) 消去主導階次中的 q^2 項，並保留次一階中最大的項（亦即包含 qA'、$q'A$ 與 $Z'qA$ 的項），可得近似關係

$$Z(2iqA' + iq'A) + 2Z'(iqA) \approx 0.$$

將上式除以 iA，得到

$$2Zq\frac{A'}{A} + Zq' + 2Z'q \approx 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{A'}{A} \approx -\frac{1}{2}\frac{q'}{q} - \frac{Z'}{Z}.$$

對此關係積分後，可得 WKB 振幅的近似表達式

$$\boxed{A(x,\omega) \approx \frac{C(\omega)}{Z(x,\omega)\sqrt{q(x,\omega)}},} \tag{J.7}$$

其中 $C(\omega)$ 為僅依賴頻率的常數，由基底端 $x = 0$ 的邊界條件所決定。

WKB 轉移函數 G_u 與 G_p

將 $U = Ae^{i\theta}$、$\theta' = q$ 以及 (J.7) 合併，可得

$$U(x;\omega) \approx \frac{C(\omega)}{Z(x,\omega)\sqrt{q(x,\omega)}} \exp\Big(i\int_0^x q(s,\omega)\,ds\Big). \tag{J.8}$$

再利用關係 $P = ZU$，得到

$$P(x;\omega) \approx \frac{C(\omega)}{\sqrt{q(x,\omega)}} \exp\Big(i\int_0^x q(s,\omega)\,ds\Big). \tag{J.9}$$

令輸入以基底端壓力表示，$P_{\text{in}}(\omega) := P(0;\omega)$。將 (J.9) 於 $x = 0$ 評估，可得 $P_{\text{in}}(\omega) \approx C(\omega)/\sqrt{q(0,\omega)}$，因此

$$C(\omega) \approx P_{\text{in}}(\omega)\sqrt{q(0,\omega)}.$$

將此結果代回 (J.8) 與 (J.9)，可得

$$\boxed{U(x;\omega) = G_u(x,\omega)\,P_{\text{in}}(\omega), \qquad G_u(x,\omega) \approx \frac{\sqrt{q(0,\omega)}}{Z(x,\omega)\sqrt{q(x,\omega)}} \exp\Big(i\int_0^x q(s,\omega)\,ds\Big),} \tag{J.10}$$

$$\boxed{P(x;\omega) = G_p(x,\omega)\,P_{\text{in}}(\omega), \qquad G_p(x,\omega) \approx \sqrt{\frac{q(0,\omega)}{q(x,\omega)}} \exp\Big(i\int_0^x q(s,\omega)\,ds\Big).} \tag{J.11}$$

式 (J.10)–(J.11) 將基底膜的機械位移與壓力場表示為對基底端驅動的線性頻率響應。特別地，轉移函數 $|G_u(x,\omega)|$ 的大小可視為耳蝸濾波器組的數學模型：其在每一位置 x 附近，於對應的特徵頻率處呈現尖銳的峰值。

特徵頻率 $\omega_c(x)$

將阻抗寫成 $Z = Z_r + iZ_i$，其中

$$Z_r(x,\omega) = k(x) - \omega^2 m(x), \qquad Z_i(x,\omega) = \omega r(x).$$

由於 WKB 振幅中包含因子 $|Z(x,\omega)|^{-1}$，系統的響應在 $|Z|$ 最小之處達到最大值。因此，在位置 x 處定義特徵頻率的一個自然方式，便是要求滿足局部共振條件 $Z_r = 0$，亦即

$$\boxed{\omega_c(x) = \sqrt{\frac{k(x)}{m(x)}}.} \tag{J.12}$$

阻尼的存在避免了響應的奇異發散；當 $\omega = \omega_c(x)$ 時，有 $Z(x,\omega_c) \approx i\omega_c r(x)$，因此共振峰值仍保持為有限量。

頻寬 $\Delta\omega(x)$ 與品質因子

對頻寬的簡單估計可由局部阻抗的大小出發：

$$|Z(x,\omega)|^2 = \big(k(x) - m(x)\omega^2\big)^2 + \big(\omega r(x)\big)^2.$$

在共振頻率 $\omega = \omega_c$ 處，上式化為 $(\omega_c r)^2$。定義半功率準則（half-power criterion）下的全寬半高（full width at half-maximum, FWHM），即要求 $|Z(x,\omega)|^2 = 2|Z(x,\omega_c)|^2$。令 $\omega = \omega_c + \delta$ 且 $|\delta| \ll \omega_c$，並作泰勒展開，可得 $k - m\omega^2 \approx -2m\omega_c\delta$，同時 $\omega r \approx \omega_c r$，因此

$$(2m\omega_c\delta)^2 + (\omega_c r)^2 \approx 2(\omega_c r)^2 \quad \Longrightarrow \quad |\delta| \approx \frac{r(x)}{2m(x)}.$$

由此可知半高半寬為 $\Delta\omega_{\mathrm{HWHM}} \approx r/(2m)$，而全寬半高則為

$$\boxed{\Delta\omega_{\mathrm{FWHM}}(x) \approx \frac{r(x)}{m(x)}.} \tag{J.13}$$

相應的品質因子（quality factor）定義為

$$\boxed{Q(x) := \frac{\omega_c(x)}{\Delta\omega_{\mathrm{FWHM}}(x)} \approx \frac{m(x)\omega_c(x)}{r(x)}.} \tag{J.14}$$

特別地，近似的常數-Q 調諧（constant-Q tuning）對應於 $r(x) \propto m(x)\omega_c(x)$，此結果與在對數頻率座標 $\nu = \log\omega$ 中具有近似常數頻寬的性質相一致。

由於特徵頻率滿足對數形式的「位置—頻率關係」$\omega_c(x) \sim \omega_0 e^{-ax}$，因此頻率與空間位置之間的對應關係

$$\omega \;\longleftrightarrow\; x$$

可將原本在頻率軸上呈現的乘法結構（例如倍頻、諧波關係）轉換為在耳蝸空間座標上的加法結構。從這個意義上而言，耳蝸對輸入聲音執行了一種 空間分佈式的、近似的幅值傅立葉分析，且該分析是建立在對數頻率軸之上。

J.3 耳蝸分析作為小波轉換

在小節 J.2 中，我們利用 WKB 近似推導了明確的頻率－位置轉移函數 $G_u(x,\omega)$ 與 $G_p(x,\omega)$，用以描述基底膜位移場與壓力場如何由基底端輸入壓力 $P_{\text{in}}(\omega)$ 所激發：

$$U(x;\omega) = G_u(x,\omega)\,P_{\text{in}}(\omega), \qquad P(x;\omega) = G_p(x,\omega)\,P_{\text{in}}(\omega).$$

我們現在將說明，轉移函數 $G_u(x,\omega)$ 的結構意味著耳蝸在主導階次上對輸入聲音訊號執行了一種 連續小波轉換（continuous wavelet transform）。

由傅立葉合成到耳蝸濾波

令 $p_{\text{in}}(t)$ 表示於卵圓窗處的聲學壓力輸入，其傅立葉轉換記為 $\hat{p}_{\text{in}}(\omega)$。基底膜的位移可由下列反傅立葉表示式給出：

$$u(x,t) = \int_0^\infty G_u(x,\omega)\,\hat{p}_{\text{in}}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega.$$

對於每一個固定的位置 x，小節 1.3 中的 WKB 分析顯示，$|G_u(x,\omega)|$ 在特徵頻率附近呈現高度尖銳的峰值，其中

$$\omega_c(x) = \sqrt{\frac{k(x)}{m(x)}}.$$

其有效頻寬約為

$$\Delta\omega(x) \approx \frac{r(x)}{m(x)}, \qquad Q(x) := \frac{\omega_c(x)}{\Delta\omega(x)} \approx \text{常數}.$$

因此，轉移函數 $G_u(x,\omega)$ 可寫成下列正規化形式：

$$G_u(x,\omega) \approx A(x)\,\Phi\left(\frac{\omega-\omega_c(x)}{\Delta\omega(x)}\right)\exp\left(i\int_0^x q(s,\omega)\,ds\right),$$

其中 Φ 為一個局部化、且在良好近似下具有通用性的剖面函數，其形狀由阻抗 $Z(x,\omega)$ 與 WKB 相位所共同決定。

對數頻率映射與尺度的辨識

如先前所討論，特徵頻率沿耳蝸方向近似呈指數變化，

$$\omega_c(x) = \omega_0 e^{-ax},$$

因此耳蝸位置 x 可視為 $\log\omega$ 的仿射函數。這一事實自然引導我們引入尺度參數

$$a_w(x) := \frac{\omega_0}{\omega_c(x)} = e^{ax},$$

其在此扮演小波尺度（wavelet scale）的角色。常數-Q 的性質，

$$\Delta\omega(x) \propto \omega_c(x),$$

正是小波分析所要求的尺度律，此一特性與傅立葉模態所具有的固定絕對頻寬形成鮮明對比。

局部脈衝響應與小波核

在位置 x 處定義其脈衝響應為轉移函數 G_u 的反傅立葉轉換：

$$\psi_x(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty G_u(x,\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

由於 $G_u(x,\omega)$ 在 $\omega_c(x)$ 附近具有局部化結構，且其頻寬為 $\Delta\omega(x)$，函數 $\psi_x(t)$ 在時間域中表現為一個具阻尼的振盪波形，其形式近似為

$$\psi_x(t) \approx H(t)\, e^{-\gamma(x)t} \cos\bigl(\omega_c(x)t\bigr),$$

其中 $H(t)$ 為 Heaviside 階躍函數。

此外，常數-Q 的性質意味著不同耳蝸位置所對應的脈衝響應在良好近似下彼此具有自相似性（self-similarity）。

事實上，WKB 分析顯示，$G_u(x,\omega)$ 在 $\omega = \omega_c(x)$ 附近局部化，且其頻寬滿足 $\Delta\omega(x) \propto \omega_c(x)$。因此，$G_u(x,\omega)$ 對頻率的依賴主要透過無因次比值 $\omega/\omega_c(x)$ 來體現，並可寫成下列尺度化形式：

$$G_u(x,\omega) \approx \sqrt{a_w(x)}\,\widehat{\psi}\bigl(a_w(x)\,\omega\bigr), \qquad a_w(x) = \frac{\omega_0}{\omega_c(x)}.$$

取反傅立葉轉換後，可得

$$\psi_x(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty G_u(x,\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \approx \frac{1}{\sqrt{a_w(x)}}\,\psi\left(\frac{t}{a_w(x)}\right),$$

其中 ψ 為對應於某一固定特徵頻率的參考脈衝響應。因此，改變耳蝸中的位置等價於在時間域中對脈衝響應進行尺度變換，而不改變其整體形狀。

耳蝸反應的小波表示

利用 (J.3) 與 (J.3)，基底膜的位移可寫成一個卷積形式：

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{in}}(\tau)\, \psi_x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\text{in}}(\tau)\, \frac{1}{\sqrt{a_w(x)}}\, \psi\left(\frac{t-\tau}{a_w(x)}\right) d\tau.$$

將式 (J.3) 與連續小波轉換（continuous wavelet transform）

$$W_p(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \frac{1}{\sqrt{a}}\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

相比較，可見耳蝸位置 x 在此扮演小波尺度 $a = a_w(x)$ 的角色，而時間 t 則對應於平移參數 b。

因此，耳蝸可被視為一個空間分佈式的小波濾波器組：每一個位置 x 皆擷取輸入訊號在特定尺度（頻帶）上的小波係數，而其振幅大小 $|u(x,t)|$ 則編碼了對應的局部時–頻能量分佈。

詮釋

從這一觀點來看，耳蝸的力學結構實現了一種具有對數頻率解析度的、近似的連續小波轉換。低頻成分具有較佳的相對頻率解析度，但時間解析度較差；相對地，高頻成分則具有較佳的時間定位能力。這種隨尺度改變的解析度，可直接由轉移函數 $G_u(x,\omega)$ 的 WKB 結構所推導，而無法由傳統的傅立葉分解所捕捉。

在這一精確的數學意義下，耳蝸對輸入聲音執行了一種小波分析，其中所對應的小波族由基底膜的機械阻抗與其與流體的耦合性質所共同決定。

J.4　音高、音色與對數幾何結構

支撐音高與音色知覺的關鍵幾何結構，源自於指數形式的位置–頻率映射

$$\omega_c(x) = \omega_0 e^{-ax},$$

以及近似為常數的品質因子

$$Q = \frac{\omega_c(x)}{\Delta\omega(x)} \approx \text{常數}.$$

由式 (J.4) 可得局部頻寬

$$\Delta\omega(x) = \frac{\omega_c(x)}{Q}.$$

對數頻率座標。 引入對數頻率變數

$$\nu = \log \omega.$$

則位於位置 x 的特徵頻率對應於

$$\nu_c(x) = \log \omega_c(x) = \log \omega_0 - ax,$$

此即為 x 的一個仿射函數。此外，在 ν 座標中的相對頻寬為

$$\Delta\nu(x) \;\approx\; \frac{\Delta\omega(x)}{\omega_c(x)} \;=\; \frac{1}{Q},$$

與位置 x 無關。因此，在 ν 座標下，每一個耳蝸濾波器皆具有近似相同的寬度與形狀。

濾波器的重疊。 由於相鄰的位置 x 對應於對數頻率中心 $\nu_c(x)$ 的平移量約為 $a\,\Delta x$，當滿足

$$a\,\Delta x \lesssim \frac{1}{Q}$$

時，相鄰的耳蝸濾波器便會彼此重疊。這種重疊直接源自於有限的頻寬 (J.4)，並且對於平滑的頻譜表示而言是不可或缺的：沒有任何單一位置能夠編碼一個完全尖銳的頻率，而只能對一個相對寬度約為 $1/Q$ 的頻帶作出響應。因此，耳蝸在對數頻率軸上實現了一個 冗餘且相互重疊的濾波器組。

諧波結構與平移。 對於一個基頻為 ω_0^* 的諧波音，其頻譜線 $\omega_k = k\omega_0^*$ 在對數頻率座標中對應為

$$\nu_k = \log \omega_0^* + \log k.$$

因此，整個諧波集合可視為將固定的模式 $\{\log k\}_{k\geq 1}$ 沿著對數頻率軸平移 $\log \omega_0^*$ 所得到的結果。改變音高 ω_0^* 因而對應於在 ν-軸上的一個剛性平移，並且經由 (J.4)，等價地表現為在耳蝸座標 x 上的平移。

音高不變性與音色。 由於每一個耳蝸濾波器在對數頻率座標 ν 中皆具有固定的寬度 $\Delta\nu = 1/Q$，且其形狀在良好近似下保持不變，因此其激發圖樣

$$E(x) \;\approx\; \sum_{k\geq 1} |a_k|^2\, \Phi\big(Q\big[\log(k\omega_0^*) - \log \omega_c(x)\big]\big)$$

僅透過在 x 上的平移來依賴於基頻 ω_0^*。這種平移結構為音高知覺在不同頻率範圍中所表現出的穩健性提供了一個力學層面的解釋。

相較之下，係數 $|a_k|^2$ 則控制了式 (J.4) 中各峰值的相對高度，從而決定激發圖樣的包絡形狀。這些相對權重在平移之下保持不變，因此能夠在不依賴音高的情況下編碼音色。

與相量幾何的關係

支撐耳蝸濾波機制的對數頻率幾何結構，可以直接用第 2 節所引入的相量軌跡來詮釋。在該節中，解析訊號被表示為複平面中旋轉向量的疊加，從而以幾何方式呈現諧波結構與相位一致性。

對於一個諧波訊號

$$z(t) = \sum_{k\geq 1} A_k e^{i(k\omega_0 t + \phi_k)},$$

改變音高 ω_0 會同時縮放所有相量的角速度，但保持它們之間的整數比例不變。因此，相量軌跡的整體形狀在改變音高時保持不變，僅相當於時間尺度上的一致縮放。

在此處，相同的不變性以解析的形式出現。耳蝸的「位置–頻率」對應關係 $\omega_c(x) = \omega_0 e^{-ax}$ 將乘法性的頻率結構轉換為沿耳蝸方向的加法平移。在對數頻率座標 $\nu = \log\omega$ 中，諧波集合 $\omega = k\omega_0^*$ 對應為

$$\nu_k = \log\omega_0^* + \log k,$$

亦即一個固定圖樣的剛性平移。因此，音高對應於沿耳蝸方向的位置平移，而相對振幅 A_k 則決定了激發圖樣內部的不變結構。

從這個角度來看，相量幾何與耳蝸的小波分析是對同一內在結構的兩種互補描述。相量軌跡將諧波關係表現為複平面中的封閉或擬週期軌道，而耳蝸濾波則將其表示為對數頻率軸上平移的激發圖樣。在這兩種表示中，音高都扮演全域平移參數的角色，而音色則編碼於圖樣本身的不變幾何結構之中。

協和音與諧波對齊

當多個音的基頻之間滿足簡單的有理數比例關係時，其諧波成分中有相當多的頻率會在耳蝸濾波器的重疊頻寬 $\Delta\omega(x)$ 之內彼此對齊。其結果是，這些音所產生的激發圖樣會相互增強，在基底膜上形成更為一致且結構化的能量分佈。

相反地，對於非諧和（inharmonic）的頻率組合，諧波對齊程度較低，所產生的激發幾何結構也更加不規則。這一差異在任何非線性神經處理發生之前，便已在力學與幾何層面上為協和與不協和之間的知覺區別提供了一個基礎解釋。

總結。 指數形式的位置–頻率映射 (J.4) 與常數-Q 頻寬 (J.4) 共同將原本在頻率軸上呈現的乘法結構轉換為耳蝸空間中的加法結構。在此幾何框架下，音高對應於沿耳蝸方向的平移，而音色則對應於該平移激發圖樣的內在幾何結構。

References

[1] M. J. Lighthill, *Energy flow in the cochlea*, Journal of Fluid Mechanics **106** (1981), 149–213.

[2] J. B. Keller and S. I. Rubinow, *Traveling waves in the cochlea*, SIAM Journal on Applied Mathematics **41** (1981), no. 3, 605–618.

[3] C. R. Steele and L. A. Taber, *Comparison of WKB calculations and experimental results for cochlear models*, Journal of the Acoustical Society of America **65** (1979), no. 4, 1007–1018.

[4] E. de Boer, *Mechanics of the cochlea: modeling efforts*, Hearing Research **89** (1995), no. 1–2, 79–93.

[5] A. D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, 2nd ed., Acoustical Society of America, 1989.

[6] T. D. Rossing (ed.), *Springer Handbook of Acoustics*, Springer, 2007.

[7] R. D. White and J. L. van Hemmen, *Mathematical models of the cochlea*, Biological Cybernetics **94** (2006), no. 1, 1–15.

[8] H. Ren, H. Hua, Y. Ding, Y. Yang, J. Dai, and Z. Zhang, *Hydrodynamic modeling of cochlea and numerical simulation for cochlear traveling wave with consideration of fluid–structure interaction*, Journal of Hydrodynamics **25** (2013), no. 2, 167–173.

K 線上工具與互動資源

本節整理了 `sound.tex` 與 `outline_interact.tex` 中所引用的線上工具與互動式示範，並依照本文的主題結構加以分類。每一項資源皆附有簡短說明，說明其在教學與學習上的用途。

基礎聲音與音高

- **什麼是聲音？**

  以視覺方式介紹聲音作為壓力波的基本概念，著重於頻率、振幅與波形。



- **線上音調產生器**

  產生純音與掃頻訊號，用於說明音高、響度、拍頻與頻率分辨率。



- **Frequency：音調產生器（手機 App）**

  行動裝置上的音調產生器，適合課堂即時或課後練習中快速產生單一頻率聲音。



- **虛擬鋼琴鍵盤**

  透過彈奏音符與和弦，連結音名、音高與其對應的頻率與諧波結構。



- **FreeSound**

  大型開放式聲音資料庫，適合用於比較不同聲音的頻譜、音色與雜訊特性。



頻譜分析與音訊視覺化

- **Sonic Visualiser**

  顯示波形、聲譜圖與部分音軌，分析實際音訊中的共振峰與時頻結構。



- **Sonic Visualiser（中文文件）**

  Sonic Visualiser 的中文安裝指南與操作教學。



- **線上頻譜分析器**

  透過麥克風即時顯示 FFT 頻譜，適合快速展示頻譜內容。



- **Sonic Tools（手機 App）**

  以手機進行頻譜與音壓量測，適合快速測試與實地實驗。



時頻分析與傅立葉級數

- **我的傅立葉旋輪**

  以互動式旋輪展示傅立葉級數如何由旋轉向量重建曲線。



- **傅立葉旋輪（Dynamic Math）**

  清楚呈現傅立葉係數與幾何旋輪重建之間的關係。



- **複數傅立葉級數動畫**

  視覺化複數傅立葉模態與部分和，強調振幅與相位的角色。



- **Desmos 傅立葉旋輪示範**

  輕量化、可即時投影的瀏覽器版旋輪示範。



- **GeoGebra DFT 旋輪**

  離散傅立葉旋輪視覺化，用以動機化有限取樣下的 DFT。



- **Wolfram 示範：傅立葉級數**

  參考型互動示例，說明收斂性、Gibbs 現象與典型波形。



- **3Blue1Brown：什麼是傅立葉轉換？**

  以直觀方式解釋傅立葉轉換作為與複指數函數的相關分析。



- **3Blue1Brown：什麼是傅立葉級數？**

  直觀介紹傅立葉級數、部分和與頻譜詮釋。



波動、振動與特徵模態

- **聲波與水波動畫**

  比較行進波與駐波，觀察相位、波長與群速度。



- **PhET：弦上的波**

  透過改變邊界條件、驅動頻率與阻尼，互動式產生駐波。



- **HyperPhysics：振動弦**

  關於弦之諧波、節點與模態形狀的精簡參考。



- **Falstad 物理模擬**

  包含波動、振盪器、管柱與共振系統的互動式模擬集合。



- **圓形鼓膜的正常模態**

  顯示膜振動的特徵模態，突顯退化與節線結構。



- **能否聽出鼓的形狀？**

  連結幾何與頻譜的概念性問題，引出反譜理論。



室內聲學與共振

- **AMROC 室內模態計算器**

  計算軸向、切向與斜向模態，並視覺化模態密度。



- **Hunecke 室內特徵模態計算器**

  矩形房間的實用模態計算工具，適合設計檢核與直觀理解。



音色與樂器聲學

- **為何不同樂器聽起來不同？**

  從諧波、共鳴器與頻譜包絡的角度說明音色差異。



- **樂器的音色**

  比較不同樂器在相同音高下的聲音，強調頻譜包絡差異。



- **定音鼓振動**

  影片展示膜振動的複雜模態與非諧性泛音。



聽覺系統與耳蝸力學

- **線上聽力測試**

  示範可聽頻率範圍與敏感度（請注意安全音量）。



- **聽覺路徑總覽**

  從耳朵到聽神經與大腦皮層的聽覺路徑概觀。



- **耳蝸頻率分析**

  介紹音調定位（tonotopy）與耳蝸力學，補充本文中的 PDE 與濾波器組模型。