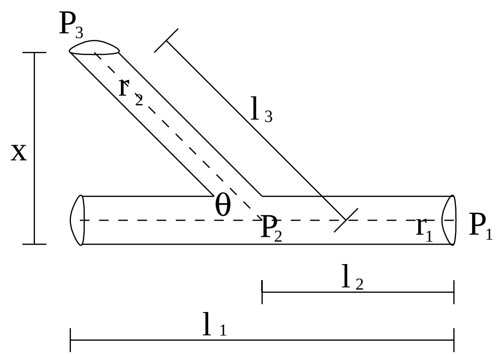
血液在血管中的流動

在人體中, 血液藉由動脈, 靜脈, 微血管來輸送, 從心臟出發到達各組織或器官再返回心臟, 在這個過程當中所需的能量越少, 心臟的負荷就越小, 血液在血管中除了受重力作用之外, 也受到黏滯力的影響, 考慮一個較為簡單的情形,



如圖所示, 有條血管半徑為r_1, 長度為l_1 , P_3處有一器官, 與此血管距離為x, 需要一條半徑為r_2的血管連接到主血管來獲得血液, 請問兩血管的夾角多少時, 才能使血液由P_1經P_2到P_3所受到的黏滯力最小?

解: 根據Poiseuille's law, 當血管長度為l, 半徑為r時, 血液在血管中所受的黏滯力為$R = \frac{\alpha l}{r^4}$, 其中α為比例常數. 血液由P_1到P_2所受的黏滯力為$\frac{\alpha l_2}{r_1^4}$, 由P_2到P_3所受的黏滯力為 $\frac{\alpha l_3}{r_2^4}$, 所以由P_1經P_2到P_3所受總力$\bar{R}$為

$$\bar{R} = \alpha\left(\frac{l_2}{r_1^4} + \frac{l_3}{r_2^4}\right) = \alpha\left(\frac{l_1 - x\cot\theta}{r_1^4} + \frac{x\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

$\bar{R}$為θ的函數, $\bar{R}$的極值發生在$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = 0$.

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = \alpha\left(\frac{x\csc^2\theta}{r_1^4} - \frac{x\csc\theta\cot\theta}{r_2^4}\right) = \frac{\alpha x}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos\theta}{r_2^4}\right) = 0$$

由於$\frac{\alpha x}{\sin^2\theta} \neq 0$. 所以 $\frac{d\bar{R}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_1^4} - \frac{\cos\theta}{r_2^4} = 0$, 即$\cos\theta = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$ 令θ_0滿足$\cos\theta_0 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$, 當$\theta > \theta_0$時, $\cos\theta < \cos\theta_0$, $\frac{d\bar{R}}{d\theta} > 0$ 當$\theta < \theta_0$時, $\cos\theta > \cos\theta_0$, $\frac{d\bar{R}}{d\theta} < 0$ 所以θ滿足$\cos\theta = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$時, $\bar{R}$有最小值.

在R. Roseu所著的Optimality Principles in Biology(London: Butterworth, 1967)當中提到, 在許多情況之下, 血管分支的角度的確符合上面所推導出來的結論.