

Contents

1 前言：關於證明和邏輯	2
1.1 一個例子	3
2 命題演算	4
2.1 複合命題	4
2.1.1 命題的否定: 非 P	4
2.1.2 P 且 Q	5
2.1.3 P 或 Q	5
2.1.4 若 P 則 Q	5
2.1.5 P 和 Q 等價	6
2.1.6 複合命題的真假值	7
2.1.7 恆真命題和恆假命題	8
2.2 等價的命題	8
2.3 命題演算與邏輯推理律	9
2.3.1 反例	11
2.4 回到最前面的例子	12
3 述詞演算; 一階邏輯	14
3.1 量詞的必要性	14
3.2 量詞與其性質	15
3.3 雙量詞的性質	17
3.4 述詞演算的推理	18
4 應用：關於輾轉相除法之二三事	19
4.1 基本定義	19
4.2 輾轉相除法	20
4.3 重要應用	21
4.3.1 算術基本定理	22
4.3.2 丟番圖線性不定方程	22
4.3.3 質數無限多個	23
4.3.4 $\sqrt{2}$ 是無理數	23

5 集合的概念	24
5.1 關係與函數	27
5.1.1 等價關係	27
5.1.2 函數	30
5.2 無限集合有多大	33
5.2.1 有限集合	33
5.2.2 可數的無限	35
5.2.3 不可數的無限	39
5.2.4 反省無限：選擇公設	42

1 前言：關於證明和邏輯

自然科學觀察的對象是大自然。科學家發展的學說，無論多麼有天才巧思，最後的判斷標準來自外在的大自然，而不是人的心靈。

但是數學很特別，數學透過科學理論間接與大自然有關。當科學家以數學語言建構理論時，如果遇到與預測不符，並沒有人懷疑是其中的數學有問題，這表示數學理論的成立，另有特殊的來源，和科學非常不同。

一般人視數學為真理，其理論的成立來自嚴格的證明，現代數學的領域雖然博雜，有些異常深刻，但這個原則始終不變。數學家和科學家都需要高超的想像與洞識，發明玄妙的概念，解決難纏的問題，但是作為最後裁判依據的，前者依靠證明、後者仰賴現實世界（實驗）。這個倚賴嚴格推理的原則是數學的基本特徵。換句話說，學數學首先要知道如何證明你手中的命題。

數學證明和邏輯有重要的關係，但兩者並不相等。證明就像寫論理的文章，內容可以關乎各式各樣大家關心的議題，而邏輯在其中只占有是否符合文法、論證是否成立的部分，和文章實質內容完全無關。這個角色看似側面，卻異常關鍵：因為論理的文章如果論證有問題就沒有價值了。

邏輯就好像每天跑步、體操或健身，是為了鍛鍊身體，協助我們完成人生的重要目標。學習邏輯的目的，是協助我們順利學習和研究數學¹。尤其，邏輯來自日常語言的思想結構，如果你思想一向條理清楚，或許沒有必要特意學習邏輯，就能寫出嚴格的數學證明。另一方面，邏輯的某些論證規律，有時也相當困擾人，否則就不會出現許多夾纏不清的論戰。

因此，接下來兩節邏輯的介紹，是一種輔助性的材料，說明在數學中常見的論證方式、規則、應用，甚至來龍去脈。如果你已經很熟悉，盡可以跳過去。但如果你比較陌生或常常有疑惑，希望其中一些說明，能夠對你有幫助。

值得提醒的是，證明如同寫論理文章，除了確認自己想法的正確性之外，同時也是寫給其他關心相同論題的人閱讀的。既然書寫證明本身帶有與同行溝通的目的，因此即使邏輯相同，如何書寫一個證明或經營一系列證明，讓其他人能很快看懂證明的本質與意義，也是各位學習數學時應該著墨的地方。

總之，研究數學不等於書寫邏輯正確的證明，這只是一個必要條件。如果你學習數學時，能夠深入思考證明背後的意義，積極學習和同學溝通你的看法，很快就能理解這層意思了。

¹當然，有人可能把健身當作人生目標，但這是少數人。在數學中有一個專攻邏輯的領域，稱為數理邏輯，但是絕大部分數學家，都只理解數理邏輯到某種程度，而不是數理邏輯家。

1.1 一個例子

示例. a 是偶數且 b 是奇數, 則 $a + b$ 是奇數.

證明.

a 是偶數, 表示 $a = 2k$; 而 b 是奇數, 表示 $b = 2l + 1$, 因此 $a + b = 2k + 2l + 1 = 2(k + l) + 1$, 證完.

□

這是一個直接的證明, 各位在高中做的證明基本上都是直接計算證明. 但是底下類似的敘述, 可以這樣來證明嗎?

示例. 若 a 是有理數, b 是無理數, 則 $a + b$ 是無理數.

a 是有理數, 表示 $a = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 是非零整數, 且不妨假設 p, q 互質 (不是重點). 但是無理數呢? 「 b 是無理數」只能透過「 b 不是有理數」來定義, 缺乏正面可計算的表示法. 如此一來, 上面的直接計算證明法就毫無用武之地. 怎麼辦呢? 注意: 在這個脈絡裡, 能算的只有有理數, 有可能透過這一點來證明嗎?

底下有四個「證明」, 哪一個是正確的? 已知 a 是有理數, 寫成 $a = \frac{p}{q}$.

1. 「如果 b 不是無理數而是有理數, 由計算知道 $a + b$ 是有理數, 所以如果 b 是無理數, 那 $a + b$ 必是無理數。」
2. 「已知 b 是無理數. 若 $a + b$ 不是無理數而是有理數, 由計算知 $b = (a + b) - a$ 是有理數, 與前提矛盾, 因此 $a + b$ 必為無理數。」
3. 原來的敘述相當於「若 a 是有理數, $a + b$ 是有理數, 則 b 是有理數」, 但由計算這顯然正確, 因此原來的敘述是正確的。」
4. 原來的敘述相當於「若 a 是有理數, $a + b$ 是有理數, 則 b 是有理數」, 但因為由計算知「 b 是有理數且 $a + b$ 是有理數, 則 a 是有理數」, 因此原來的敘述是正確的。」

討論. 那個論證是對的?

注意到上面四個「證明」裡的計算都是對的, 因此問題完全不在計算, 而是論證的方式是否合理. 我們要如何判斷自己做了一個合理或不合理的論證呢? 底下先介紹一般數學敘述常用的語句形式。

2 命題演算

可以判斷真 (T) 或假 (F) 的句子, 稱為命題 (proposition) . 數學敘述的基礎即是命題. 例如「7 是質數」、「 $\sqrt{5} > 3$ 」、「四邊形的四邊平方和等於兩對角線平方和」、「任何一個自然數都有另一個自然數比它小」等都是數學的命題。

P
<hr style="width: 100%;"/>
T
F
<hr style="width: 100%;"/>

2.1 複合命題

從某些「原子」命題開始, 依靠五種邏輯連接詞, 可以得到更長更複雜的複合命題:

2.1.1 命題的否定: 非 P

命題 P 的否定「非 P 」記為 $\neg P$, $\neg P$ 和 P 的真假關係如下:

P	$\neg P$
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
T	F
F	T
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>

例如真命題「7 是質數」的否定「7 不是質數」就是假命題; 假命題「 $\sqrt{5} > 3$ 」的否定命題「 $\sqrt{5} \not> 3$ 」(或寫成「 $\sqrt{5} \leq 3$ 」) 為真。有趣的是「四邊形的四邊平方和等於兩對角線平方和」的否定命題是什麼? 是「四邊形的四邊平方和不等於兩對角線平方和」嗎? 「任何一個自然數都有另一個自然數比它小」的否定命題是什麼? 是「任何一個自然數都有另一個自然數不小於它」嗎?(後面我們會再回到這個問題)

2.1.2 P 且 Q

像「5 是質數且 $5+2$ 也是質數」這類命題，牽涉到邏輯連接詞「且」(and)。「 P 且 Q 」記為 $P \wedge Q$ ，其複合命題的真假如下：

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

換句話說，只要 P 或 Q 其中有一個為假，則 $P \wedge Q$ 就是假命題。或者說，複合命題 $P \wedge Q$ 想要為真，就必須子命題 P 和 Q 同時皆為真。

例如「5 是質數且 $5+2$ 是質數」是真命題，但是「7 是質數且 $7+2$ 是質數」是假命題。另外，雖然看起來有點怪，不過「13 是質數且對頂角相等」是真命題。

2.1.3 P 或 Q

「1 是質數或 1 是合成數」這類命題牽涉到邏輯連接詞「或」(or)。「 P 或 Q 」記為 $P \vee Q$ ，其複合命題的真假如下：

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

換句話說，只要 P 或 Q 其中有一個為真，則 $P \vee Q$ 就是真命題。或者說，複合命題 $P \vee Q$ 要為假，就必須子命題 P 和 Q 同時皆為假。

例如「1 是質數或 1 是合成數」是假命題，但是「3764323 是質數或 3764323 是合成數」則是真命題。另外，怪怪的「13 是質數或對頂角相等」是真命題。

2.1.4 若 P 則 Q

由命題 P 「推理」出 Q 是證明的根本，像「13 是整數則 13 是有理數」這類命題牽涉到邏輯連接詞「則」。「若 P 則 Q 」記為「 $P \Rightarrow Q$ 」，其複合命題的真假

如下：

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

「若 P 則 Q 」英文寫成 If P then Q ，不過也可寫成 Q if P 或 P only if Q 。其中 P 稱為 Q 的充分條件 (sufficient condition)， Q 稱為 P 的必要條件 (necessary condition)。所以「13 是整數則 13 是有理數」是真命題，「-2 是整數則 -2 是自然數」則是假命題。如果用日常的例子：「天雨則地濕」是真命題，「天雨則地不濕」是假命題。至於「天不雨」，則「地濕」「地不濕」都有可能，因此都算真命題！

其實 $P \Rightarrow Q$ 的真假值安排經常讓人感到疑惑，例如按照這個規則「13 是質數則對頂角相等」是一個真命題。但是我們怎麼從「13 是質數」推導到「對頂角相等」呢?! 更糟的是，如果以「4 是質數」為前提，則「4 是質數則 $\sqrt{2}$ 不是有理數」和「4 是質數則 $\sqrt{2}$ 是有理數」都是真命題。

簡而言之， \Rightarrow 真假值規則只保證：前提為真時「推出」真命題的整個命題為真；前提為真時「推出」假命題的整個命題為假。我們通常認為的推理，牽涉到命題內容之間的因果關係，這時如果真命題 P 的確能推理出 Q (因此 Q 也是真命題)，則至少前述規則保證 $P \Rightarrow Q$ 為真。另外真命題 P 竟然推理出假命題 Q ，這是不可能的，那麼至少前述規則保證 $P \Rightarrow Q$ 為假。換句話說， \Rightarrow 的真假值規則至少相容於真正的推理。至於，假命題前提既然為假，那結論是真或假都有可能，因此都給 $P \Rightarrow Q$ 真值。

總之，就像學語文時要學文法，正確的句子必須遵守文法，但遵守文法的句子並不見得有意義。命題演算 $P \Rightarrow Q$ 是一種文法式的規則，和牽涉到語意內容的推理並不相同，只是相容罷了²。但是後面我們會看到它的用處。

2.1.5 P 和 Q 等價

「 P 等價於 Q 」意思是 P 和 Q 的真假值相同，記為 $P \Leftrightarrow Q$ ，其真值表

²請參考

<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=32474> (〈奇怪的若 P 則 Q (一)〉)

<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=32530> (〈奇怪的若 P 則 Q (二)〉)

<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=12492> (李國偉〈真值蘊涵〉)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

其意義我們後面再來說明。

2.1.6 複合命題的真假值

所有複合命題都是由「原子」命題以連接詞組成的，因此其真假值由各原子命題的真假值，透過上述真值表來決定。

示例. 討論 $P \wedge (Q \vee R)$ 的真假。共有八種情況，依序取值如下：

P	\wedge	$(Q$	\vee	$R)$	P	\wedge	$(Q$	\vee	$R)$	P	\wedge	$(Q$	\vee	$R)$
T		T		T	T		T		T	T		T		T
T		F		T	T		F		T	T		F		T
F		T		T	F		T		T	F		F		T
F		F		T	F		F		T	F		F		T
T		T		F	T		T		T	F		T		F
T		F		F	T		F		F	F		F		F
F		T		F	F		T		T	F		F		F
F		F		F	F		F		F	F		F		F

□

示例. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

$(P$	\Leftrightarrow	$Q)$	\Leftrightarrow	$((P$	\Rightarrow	$Q)$	\wedge	$(Q$	\Rightarrow	$P))$
T		T		T		T		T		T
T		F		T		F		F		F
F		T		F		T		T		F
F		F		F		T		F		F

這可以解釋成 $P \Leftrightarrow Q$ 相當於 $((P \Rightarrow Q)$ 而且 $(Q \Rightarrow P))$ 的意思，很多人根本用這個敘述當作「 \Leftrightarrow 」的定義。

□

2.1.7 恆真命題和恆假命題

有一類特別的複合命題稱為「恆真」命題 (tautology) . 這類命題和各原子命題的真假取值毫無關係, 是和具體內容無關, 絕對為真的邏輯命題, 因此可以當作命題系統內的定理, 性質或公設. 後面將會大量討論.

如果你懷疑怎麼可能有這樣的命題, 最簡單的例子只用到一個原子命題 P :

示例. $P \vee \neg P$.

P 和 $\neg P$ 兩者必有一為真, 依 \vee 的規則, 此複合命題必為真. □

如果 a 是一個整數, 那「 a 是偶數或 a 是奇數」必為真, 因為 \neg 「 a 是偶數」就是「 a 是奇數」。日常生活也有很多這類例子: 「天空要嘛下雨要嘛不下雨」, 「眼前的人要嘛是新一, 不然就不是新一」, 了無意義是這類恆真句的特徵. 但是 $P \vee \neg P$ 在古典邏輯稱為「排中律」, 說明除 P 和非 P 之外再無其他可能, 因此兩者必有一成立. 這的確是和命題內容無關的定律.

反過來, 還有一類命題稱為恆假命題, 也可稱為矛盾命題, 解釋起來就是不可能發生的事情.

示例. $P \wedge \neg P$.

P 和 $\neg P$ 兩者必有一為假, 依 \wedge 的規則, 此複合命題必為假. □

注意到這也是和命題具體內容毫無關係絕對為假的命題。例如若 a 滿足 $a^7 - a^4 + a + 1 = 0$ (也就是方程式 $x^7 - x^4 + x + 1 = 0$ 的根), 那「 $a > 0$ 而且 $a \leq 0$ 」顯然是完全不需要計算就知道為假的命題. .

2.2 等價的命題

前面提到的「 $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ 」就是恆真句。這類句子的特徵是 $A \Leftrightarrow B$, 中間的連接詞是 \Leftrightarrow , 而 \Leftrightarrow 下方的真假值都是 T, 因此是恆真句. 由於 \Leftrightarrow 兩邊的真假值必須完全相同才會是 T, 因此可把兩邊的命題當作同義, 或稱為等價的命題, 有時直接寫成 $A = B$. 例如 $(P \Leftrightarrow Q) = ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

底下這些等價的命題有些很直觀, 有些可能得多想想才能領會.

示例.

1. (De Morgan's law)

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \text{ (或 } \neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q)$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \text{ (或 } \neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q).$$

2. (分配律)

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R);$$

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$3. (P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q) = \neg(P \wedge \neg Q)$$

□

討論. 舉些例子討論這些等價命題是否有道理. 特別留意 3. 中對於 $P \Rightarrow Q$ 的重新「詮釋」.

習題 2.1. 模仿前例, 證明下面的敘述.

1. $P = \neg \neg P$

2. (交換律) $P \wedge Q = Q \wedge P, P \vee Q = Q \vee P$

3. (結合律) $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$

4. $(P \Leftrightarrow Q) = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

5. $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

6. $((P \wedge Q) \Rightarrow R) = (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$

習題 2.2. 證明 $P \vee \neg P, \neg(P \wedge \neg P), P \Rightarrow P$ 都是恆真式. 它們和 $P \Rightarrow \neg \neg P$ 或 $\neg \neg P \Rightarrow P$ 有何關係?

由以上的證明過程, 你可能已經發現:

習題 2.3. 形式上來說, 證明所有複合命題的連接詞其實只需要用到 \neg 和 \vee 就夠了. 如果用 \neg 和 \Rightarrow 可以嗎?

2.3 命題演算與邏輯推理律

底下說明有一些恆真句, 最後牽涉到 \Rightarrow . 如果把這當成「推得」, 其實就是「證明」或「推理」時, 經常用到的推理法則.

示例.

1. $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$. 已知 P 為真, 且 $P \Rightarrow Q$, 可以推得 Q . 這是最基本的推理律, 稱為「肯定前件」(Modus Ponens).

$((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$						
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F

2. $((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$. 已知 $P \Rightarrow Q$, 但 Q 為假, 則可推得 P 為假, 稱為「否定後件」(Modus tollens).
3. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$. 若可從 P 推得 Q , 而且從 Q 推得 R , 則從 P 可以推得 R . 這是推論的遞移律, 稱為「假言三段論」(hypothetical syllogism). 這是構成證明的基本結構.
4. $\neg(\neg P) \Rightarrow P$. 想要證明 P , 可以證明 $\neg P$ 是錯的. 稱為「反證法」(proof by contradiction).
5. $(\neg P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \Rightarrow P$. 想證明 P , 若能從 $\neg P$ 推出矛盾, 則 P 就為真. 這就是知名的歸謬法 (reductio ad absurdum).
6. $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$. 想要證明 $P \Rightarrow Q$, 可以證明 $\neg Q \Rightarrow \neg P$. 稱為原來命題的逆反命題 (transposition).
7. $\neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$. 若能證明 P 和 $\neg Q$ 不可能同時成立, 則證明 $P \Rightarrow Q$, 這其實是將反證法用到 $P \Rightarrow Q$ 的結果.

□

注意. 想想 2., 6., 7. 是不是一樣的. 4. 和 5. 呢?

特別提醒, 如果善用等價的命題 ($A = B$), 就不見得要靠繁瑣的真值表來證明所有恆真句. 例如

$$(P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q) = (Q \vee \neg P) = (\neg \neg Q \vee \neg P) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

就簡單證明 $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.³

³命題演算的一種表示法, 可以完全不用真值表, 只依靠一些恆真命題稱為公設以及推理法則, 而得到所有系統中的定理 (或恆真命題). 如果你擔心這樣的系統只關心恆真命題, 似乎跟現實世界無關, 那你得先想想, 其實數學命題也都是恆真命題, 只是系統比命題演算複雜. 利用公設來推導真命題, 從古希臘歐基里德的《原本》就已經開始了.

習題 2.4. 用上述想法，盡量重新證明前面的邏輯推論規則，我們是不是總要先假設些什麼？

習題 2.5. 證明下列歸謬法的不同形式：

1. $(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P)$;
2. $((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow P$.

習題 2.6. 證明下列邏輯推理規則，哪些你本來就認為是對的？

1. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
2. $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
3. $((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$
4. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
5. $P \Rightarrow (P \vee Q)$
6. $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \wedge R))$ (反過來，也對嗎？)
7. $((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \vee R))$ (反過來，也對嗎？)
8. $((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$
9. $((P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S))$
10. $((P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S))$

2.3.1 反例

證明時偶而會碰到看似正確但其實錯誤的「推理規律」或命題。當然運用真值表去檢查是一個基本的方法，但有時練習找出反例可能更靈活。

例如從下面的真值表，已看出 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 並非等價。

P	\Rightarrow	Q	\Leftrightarrow	Q	\Rightarrow	P
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F

這是最常見的推理錯誤。反例可以簡單的舉如：「天雨則地濕」是對的，但「地濕則天雨」是錯的，因為可能還有別的原因造成地濕。通常也可舉數學簡易的例子，例如「 $a = 2$ 則 $a^2 = 4$ 」是對的，但反過來「若 $a^2 = 4$ 則 $a = 2$ 」當然是錯的。尋找反例可以針對真假值不一致的地方。

習題 2.7. 下面的「規律」是對的嗎？如果不對，請找出反例。

$$1. ((P \vee Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$$

$$2. ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$$

$$3. ((P \vee Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$$

$$4. ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R))$$

2.4 回到最前面的例子

回顧第3頁的四個證明。令 P 是「 a 是有理數」， Q 是「 b 是有理數」， R 是「 $a + b$ 是有理數」，原來要證明的敘述是

$$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$$

第三個證明

我們知道只有在 P （ a 是有理數）、 Q （ b 是有理數）和 R （ $a + b$ 是有理數）時才能計算，因此可以嘗試從命題演算，去得到跟上式等價但只用到 P 、 Q 、 R 的命題。例如

$$\begin{aligned} (P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R &= P \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg R) \\ &= P \Rightarrow (R \Rightarrow Q) \\ &= (P \wedge R) \Rightarrow Q \end{aligned}$$

最後命題 $(P \wedge R) \Rightarrow Q$ 就是第三個證明中所謂的等價命題「若 a 是有理數， $a + b$ 是有理數，則 b 是有理數」。因此第三個證明是正確的。

第二個證明

第二個證明也是正確的。說明方式如下：

本已假設「 a 是有理數」（ P ）與「 b 是無理數」（ $\neg Q$ ）。由計算知

$$\text{「若 } a \text{ 是有理數, } a + b \text{ 是有理數, 則 } b \text{ 是有理數」} \quad ((P \wedge R) \Rightarrow Q)$$

由逆反命題這相當於

「若 b 是無理數則 a 是無理數或 $a + b$ 是無理數」($\neg Q \Rightarrow (\neg P \vee \neg R)$)

但「 b 是無理數」, 因此

「 a 是無理數或 $a + b$ 是無理數」 (已假設 $\neg Q$, 肯定前件)

但「 a 是有理數」, 又因 $\neg P \vee \neg R$ 相當於 $P \Rightarrow \neg R$, 所以

「 $a + b$ 是無理數」(已假設 P , 肯定前件)

因此由假設「 a 是有理數」與「 b 是無理數」, 推得「 $a + b$ 是無理數」, 證完⁴。

除了假設與用計算直接證明的簡單敘述, 其他就是邏輯推理法則: 逆反命題和肯定前件。

以第二個證明的精神, 還可以用反證法(或歸謬法)來證明:

因為「若 a 是有理數, b 是無理數, 則 $a + b$ 是無理數」的反命題是「 a 是有理數, b 是無理數, 且 $a + b$ 是有理數」。使用反証法, 假設此反命題為真, 但已知「若 a 是有理數, $a + b$ 是有理數, 則 b 是有理數」, 因此若反命題為真, 則 b 同時為有理數和無理數, 得到矛盾, 因此該反命題必須為假, 故原命題為真。

用命題符號寫起來就是

假設 $\neg((P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R) = P \wedge \neg Q \wedge R$ 為真。但由計算知 $(P \wedge R) \Rightarrow Q$

由推理法則 $((P_1 \Rightarrow Q_1) \wedge (P_2 \Rightarrow Q_2)) \Rightarrow ((P_1 \wedge P_2) \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2))$

因此 $((P \wedge R) \wedge \neg Q) \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$

矛盾。由歸謬法知前提為假, 但前提 $(P \wedge R) \wedge \neg Q$ 是 $\neg((P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R)$

故知 $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$ 為真, 故證完。

錯誤的證明

第一個證明是錯的, 因為用了常見錯誤的推理律: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ 。

第四個證明重述於下:

原來的敘述相當於「若 a 是有理數, $a + b$ 是有理數, 則 b 是有理數」, 但因為由計算知「 b 是有理數且 $a + b$ 是有理數, 則 a 是有理數」, 因此原來的敘述是正確的。

形式上相當於 $((Q \wedge R) \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \wedge R) \Rightarrow Q)$ 。這顯然不成立(可以舉反例知道)。因此嚴格的說, 第四個證明是錯的。

不過有些人看這個證明, 會覺得似乎有幾分道理。這是因為在我們的問題脈絡裡, 命題「 a 是有理數且 $a + b$ 是有理數, 則 b 是有理數」看起來有對稱性,

⁴這只是一種證明的寫法, 平常寫證明只要交代了來龍去脈就可以了。

a 在前面或 b 在前面感覺似乎沒什麼差別。這個錯誤或混淆有一個意義，說明如下：

- 「 b 是有理數且 $a + b$ 是有理數，則 a 是有理數」和前一句的 a, b 攪在一起，造成混淆。
- 覺得有道理的人，心裡把這個敘述解釋成一個性質：「對任意 x, y, y 是有理數且 $x + y$ 是有理數，則 x 是有理數」。如果不和 a, b 混淆，這樣寫十分清楚，就算只寫成「 y 是有理數且 $x + y$ 是有理數，則 x 是有理數」大家也可以理解。如果這樣寫，證明其實是對的。
- 如果執意要用 a 和 b ，就要寫成「對任意 a, b, b 是有理數且 $a + b$ 是有理數，則 a 是有理數」這種一般規則的敘述方式，雖然還是有混淆的危險，但至少清楚呈現這樣寫的意思。

如果答者的真正意思是第三個敘述，其證明是對的。問題是他的敘述方式不夠完善，和前面的敘述混淆。這告訴我們有沒有加上前面的「對任意 a, b 」有很大的差別，這帶我們進入下個課題。

3 述詞演算；一階邏輯

在數學中看到的命題，通常是針對某一個「集合」裡面的元素，表明這些元素是不是有某個性質。例如「所有的自然數都大於 0」，「某些自然數是質數」，「對任意自然數 p, a, b ，如果 p 整除 ab ，且 p 是質數，則 p 整除 a 或 p 整除 b 。」

3.1 量詞的必要性

常見的性質如「 a 是偶數且 b 是奇數，則 $a + b$ 是奇數」嚴格的說，應該寫成「對任意整數 a, b ，若 a 是偶數且 b 是奇數，則 $a + b$ 是奇數」。用符號來寫，可以記成

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} P(a, b)$$

其中 \forall 是一種量詞 (quantifier) 表示「對所有」或「對任意」，而 $P(a, b)$ 就像帶著變數 a, b 的函數，定義成

$$P(a, b) = ((E(a) \wedge \neg E(b)) \Rightarrow \neg E(a + b))$$

其中 $E(a)$ 表示 a 是偶數，而在整數中 $\neg E(a)$ 表示 a 不是偶數，亦即 a 是奇數。所以原式也可以寫成

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z} (E(a) \wedge \neg E(b) \Rightarrow \neg E(a + b))$$

這樣的「語言」系統稱為「述詞演算」(predicate calculus) 或一階邏輯 (first order logic) . 底下是邏輯書中常舉的例子, 從上節命題演算並無法「證明」:

凡人皆有死, 蘇格拉底是人, 所以蘇格拉底會死.

$$(\forall p(M(p) \Rightarrow D(p)) \wedge M(\text{蘇格拉底})) \Rightarrow D(\text{蘇格拉底})$$

其中 $M(p)$ 表示「 p 是人」, $D(p)$ 表示「 p 會死」.

因此述詞演算是一個以命題演算為基礎, 更細緻的「語言」系統. 另外, 在邏輯系統中, 量詞的使用預設某個討論的範圍 (例如上述的自然數, 人類), 這個「範圍」在數學裡通常運用集合的概念, 但如果只是討論述詞演算的邏輯性質與推理, 這個「範圍」並不重要, 「集合」的概念將在後面介紹.

3.2 量詞與其性質

我們先介紹量詞, 再討論量詞的性質與含量詞的推理. 常用的量詞有兩種:

1. $\forall x$: 表示「對所有 x 」(對任意 x). 命題 $\forall x P(x)$ 為真的條件是對所有可能的 a , $P(a)$ 皆為真. 例如實數中 $\forall x x^2 \geq 0$ 為真; $\forall x x^2 > 0$ 為假.
2. $\exists x$: 表示「存在 x 」(有某個 x). 命題 $\exists x P(x)$ 為真的條件是可以找到某個 a 使得 $P(a)$ 為真. 例如 $\exists x x^2 \leq 0$ 為真; $\exists x x^2 < 0$ 為假.

再以 $x + 3 > 0$ 為例. 在自然數中, 用常數 7, -10, 代入上面的公式得 $7 + 3 > 0$ 為真; $-10 + 3 > 0$ 為假. 因為 $7 + 3 > 0$ 為真, 因此 $\exists x x + 3 > 0$ 為真. 而因為 $-10 + 3 > 0$ 為假, 所以 $\forall x x + 3 > 0$ 為假. 至於 $x + 3 > 0$ 這樣的句子, 則因為 x 是 (自由) 變數, 沒有真假值, 所以不是命題. 因此,

一個有變數 x_1, \dots, x_n 的公式 $Q(x_1, \dots, x_n)$, 只有在前方針對每一變數都加上量詞如 $\forall x_1 \dots \forall x_n Q(x_1, \dots, x_n)$, 才能夠判斷真假, 也才是命題.

述詞演算中的命題可由前節的「連接詞」再加上量詞得到新型的複合命題, 因此需要一些新的性質, 來辨認同義的命題. 說明這些性質時, 把 $\forall x P(x)$ 想成 $P(a_1) \wedge P(a_2) \dots \wedge P(a_N)$, $\exists x P(x)$ 想成 $P(a_1) \vee P(a_2) \dots \vee P(a_N)$ 特別有用:

1. $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$. 例如 $\neg(\forall x x^2 \geq 0) \Leftrightarrow (\exists x x^2 < 0)$;

\neg 「所有人皆會死」 \Leftrightarrow 「有人不會死」.

$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$. 例如 $\neg(\exists x x^2 \leq 0) \Leftrightarrow (\forall x x^2 > 0)$.

\neg 「有人不喜歡數學」 \Leftrightarrow 「所有人都喜歡數學」

2. $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$.

「所有人皆會死」 \wedge 「所有人都是動物」 \Leftrightarrow 「所有人都是會死的動物」

$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$.

「有些數是奇數」 \vee 「有些數是質數」 \Leftrightarrow 「有些數是奇數或質數」

3. $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$.

$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$.

4. $(\forall x P(x)) \Rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \Rightarrow Q)$, 其中 x 不是 Q 的自由變數.

$P \Rightarrow (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P \Rightarrow Q(x))$, 其中 x 不是 P 的自由變數.

習題 3.1. 仔細想想, 為什麼「所有人皆會死」的否定不是「所有人皆不會死」? 為什麼「有人喜歡數學」的否定不是「有人不喜歡數學」? 「有人喜歡數學」和「有人不喜歡數學」意思一不一樣?

習題 3.2. 說明下式成立. 其中 x 不是 P, Q 的自由變數.

1. $(\forall x P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q)$; $(\forall x P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee Q)$.

2. $(\exists x P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q)$; $(\exists x P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge Q)$.

3. $(\exists x P(x)) \Rightarrow Q \Leftrightarrow \forall x (P(x) \Rightarrow Q)$; $P \Rightarrow (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P \Rightarrow Q(x))$.

習題 3.3. 找出反例.

1. 為什麼 $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ 和 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 不一樣?

2. 為什麼 $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$ 和 $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ 不一樣?

3. 為什麼 $(\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)))$ 和 $(\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x))$ 不一樣?

特別提醒: 一般來說, 命題「 x 是質數 $\Rightarrow x$ 是奇數」感覺似乎有真假, 而且我們認為是錯的. 這是因為我們自動加上量詞「 $\forall x$ 」, 變成「 $\forall x (x$ 是質數 $\Rightarrow x$ 是奇數)」, 也就是考慮了整體敘述的真假. 如果只是個別來看, 其實只有 $x = 2$ 時是假, 其他質數都是真. 這個暗中加上 $\forall x$ 的約定, 經常出現在數學敘述裡.

3.3 雙量詞的性質

數學的敘述中經常會用到兩個以上的量詞，底下就以兩個量詞為例，其他類推。首先，雙量詞是這樣定義的：

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall x (\forall y P(x, y))$$

$$\forall x \exists y P(x, y) = \forall x (\exists y P(x, y))$$

以此類推。當量詞如第二個式子有參差時，必須要小心順序。

示例。 量詞相同可以交換順序。

1. $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$. 例如前述奇偶數的例子。

$$\forall a, \forall b ((E(a) \wedge \neg E(b)) \Rightarrow \neg E(a + b))$$

2. $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$. 例如

$$\exists a \exists b (E(a) \wedge \neg E(b) \wedge E(a + b))$$

□

示例。 量詞不同，變數或順序不同的意義可能不同。檢視底下的敘述，其中前兩句是量詞順序調換，後兩句也是。假設討論的是自然數。

1. $\exists x \forall y x \leq y$. 「有一數小於或等於所有數」，1 就是這樣的數，命題為真。
2. $\forall y \exists x x \leq y$. 「任意一數必有一數比它小或相等」為真，選這個數即可。
3. $\exists y \forall x x \leq y$. 「有一個數大於或等於所有數」，因為自然數每一個數後面都還有個數（所以有無限多數），這是不可能的。
4. $\forall x \exists y x \leq y$. 「任意一數必有一數比它大或相等」，同 2.，這當然是對的。

□

習題 3.4. 將上例中的「 \leq 」改成「 $<$ 」。重新討論這個例子

習題 3.5. 在人的範圍內，用 $L(a, b)$ 表示「 a 喜歡 b 」，確認這些話的意思：

1. $\forall a \exists b L(a, b)$.
2. $\exists b \forall a L(a, b)$.

3. $\forall b \exists a L(a, b)$.

4. $\exists a \forall b L(a, b)$.

習題 3.6. 若 a 是女性, b 是人. $B(a, b)$ 表示「 a 生 b 」(a 是 b 的生物母親), 下面哪句話表示「人皆有母」.

1. $\forall a \exists b B(a, b)$.

2. $\exists b \forall a B(a, b)$.

3. $\forall b \exists a B(a, b)$.

4. $\exists a \forall b B(a, b)$.

在前面的例子, 知道 $\exists y \forall x x \leq y$ 是錯的, 這表示它的否定是正確的, 問題是它的否定是什麼? 依照定義得

$$\neg(\exists y (\forall x x \leq y)) = \forall y \neg(\forall x x \leq y) = \forall y \exists x x > y$$

這句話的意思是「任一數都 (至少) 有一數比它還大」, 這正是自然數的性質.

習題 3.7. 否定前面習題中你認為錯誤的敘述, 並確認其正確性.

3.4 述詞演算的推理

和命題演算相同, 恆真命題在述詞演算中也扮演重要的角色: 公設, 定理, 邏輯律. 底下是有量詞情況下, 顯而易見的推理律

1. $(\forall x P(x)) \Rightarrow P(a)$, a 表示某常數. 也可寫成 $\forall y ((\forall x P(x)) \Rightarrow P(y))$.

2. $P(a) \Rightarrow (\exists x P(x))$.

3. $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$

4. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$

5. $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x)))$

6. $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

注意. 注意這些式子都不是等價, 後面四個式子我們曾經討論過.

習題 3.8. 說明下列規則是正確的。

1. $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.
2. $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x P(x)) \Rightarrow (\exists x Q(x)))$

注意. 如果這個習題的第一小題你認為沒有任何問題, 可能要小心. 「袋子裡的球都是藍色的」推得「袋子裡有藍色的球」需要一個前提: 「袋子裡有球」。然而, 第二小題則沒有這個問題。

4 應用：關於輾轉相除法之二三事

4.1 基本定義

本節討論的「範圍」基本上都是非負整數 (有時也容許是整數)。先回顧除法, 若 $m > n > 0$ 則 m 除以 n 得

$$m = n \cdot q + r, \quad 0 \leq r < n$$

q 是商, r 是餘數。

定義 4.1. (整除, 因數) 若 $m = n \cdot k$ 則 n 整除 m , 記為 $n | m$, 這時也說 n 是 m 的因數。

$$(n | m \Leftrightarrow \exists k (m = n \cdot k))$$

定義 4.2. (質數) 若 $p \neq 1$ 且其因數只有 1 和 p 本身, 則稱 p 是質數。

$$\text{Pr}(p) \Leftrightarrow p \neq 1 \wedge \forall a (a | p \Rightarrow (a = 1 \vee a = p))$$

若 m 不是質數也不是 1, 則稱 m 是合數。

注意. 依此約定 1 不是質數也不是合數。

定義 4.3. (質因數) \Leftrightarrow 若 p 是質數且 $p | m$, 則稱 p 是 m 的質因數。

$$\text{Pr}(p) \wedge p | m$$

定義 4.4. (公因數) 若 k 同時是 m 與 n 的因數, 稱 k 是 m 與 n 的公因數。

$$\text{cd}(k, m, n) \Leftrightarrow k | m \wedge k | n$$

注意. 若使用集合符號, 定義 m 與 n 公因數的集合 $\text{cd}(m, n) = \{k | (k | m \wedge k | n)\}$, 用 $k \in \text{cd}(m, n)$ 可能比 $\text{cd}(k, m, n)$ 更易理解。

定義 4.5. (最大公因數) 若 d 是 m 與 n 公因數中最大的數, 則稱 d 是 m 與 n 的最大公因數 (gcd) .

$$d = \gcd(m, n) \Leftrightarrow \text{cd}(d, m, n) \wedge \forall k (\text{cd}(k, m, n) \Rightarrow k \leq d)$$

定義 4.6. (互質) 若 $\gcd(m, n) = 1$ 則稱 m 與 n 互質.

4.2 輾轉相除法

一般的短除法只能求簡單數字的最大公因數, 想求一般兩數的最大公因數, 需要知名而基本的歐基里德算則——輾轉相除法. 這個算則附帶贈送了一個很好用的定理, 解決了一些基礎的算術問題.

(輾轉相除法介紹)

將輾轉相除法的步驟寫清楚:

$$\begin{aligned} m &= n \cdot q_0 + r_1 && (0 < r_1 < n) \\ n &= r_1 \cdot q_1 + r_2 && (0 < r_2 < r_1) \\ r_1 &= r_2 \cdot q_2 + r_3 && (0 < r_3 < r_2) \\ &\dots && \dots \\ r_{N-3} &= r_{N-2} \cdot q_{N-1} + r_{N-1} && (0 < r_{N-1} < r_{N-2}) \\ r_{N-2} &= r_{N-1} \cdot q_N + r_N && (0 < r_N < r_{N-1}) \\ r_{N-1} &= r_N \cdot q_N \end{aligned}$$

從餘數的性質得 $n > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$, 因此知道必有 N , 使得 $r_{N+1} = 0$. 令 $d = r_N$.

性質 4.1. $d = \gcd(m, n)$

證明.

由最後一式知 $d | r_{N-1}$, 再由倒數第二式知 $d | r_{N-2}$, 依此類推得 $d | n$ 且 $d | m$, 即 d 是 m 與 n 的公因數.

若 k 是 m 與 n 的公因數, 由第一式 $k | r_1$, 再由第二式知 $k | r_2$, 依此類推, 一直到倒數第二式, 可得 $k | r_N$.

d 是 m 與 n 的公因數, 且所有公因數都整除 d , 因此 d 是 m 與 n 的最大公因數.

□

從輾轉相除法可得到下面的基礎性質：

性質 4.2. 若 $d = \gcd(m, n)$, 則必可找到整數 s, t , 使得 $sm + tn = d$.

證明.

從倒數第二式知

$$d = r_N = r_{N-2} - r_{N-1} \cdot q_{N-1}$$

從倒數第二式則知

$$r_{N-1} = r_{N-3} - r_{N-2} \cdot q_{N-1}$$

代入前式得

$$d = r_N = r_{N-2} - (r_{N-3} - r_{N-2} \cdot q_{N-1}) \cdot q_{N-1}$$

等號右邊消除 r_{N-1} , 將 d 寫成 r_{N-2} 和 r_{N-3} 的整係數組合; 接著再由上一個等式, 又可以消除 r_{N-2} , 將 d 改寫成 r_{N-3} 和 r_{N-4} 的整係數組合; 以此類推, 最後可將 d 寫成 m 和 n 的整係數組合.

□

注意. s 和 t 必互質 (為什麼?) .

習題 4.1. 有什麼好方法可以解出一組解?

4.3 重要應用

底下似乎是一個顯然正確的性質, 問題是怎麼證明呢?

性質 4.3. 若 p 為質數且 $p | mn$, 則 $p | m$ 或 $p | n$.

證明.

要證明上式, 只要證明若 $p \nmid m$, 則 $p | n$ 即可 (why?) .

假設 $p \nmid m$, 且 p 是質數, 因此 p 和 m 互質, 由**性質 4.2**知, 存在 s 和 t , 使得 $sp + tm = 1$, 將等號兩邊同乘以 n 得

$$n = spn + tmn.$$

又因為 $p | mn$, 故 $p | n$, 得證.

□

習題 4.2. 用命題演算, 檢查證明第一行的 (why?) 正不正確?

習題 4.3. 若 p 為質數且 $p \mid m_1 m_2 \cdots m_n$, 則 $\exists i \ p \mid m_i$.

習題 4.4. 若 $k \mid mn$, 且 k 和 m 互質, 則 $k \mid n$. (注意未假設 k 是質數)

4.3.1 算術基本定理

由此性質可證明算術基本定理, 亦即質因數分解之唯一性.

定理 4.1. (算術基本定理) 若不計質因數分解乘積的順序, 一數的質因數分解是唯一的.

證明.

若該數有兩種質因數分解

$$A = p_1 p_2 \cdots p_N = q_1 q_2 \cdots q_M, \quad p_i, q_j \text{ 都是質數}$$

因為 p_1 是質數, 所以必有某 i , $p_1 \mid q_j$, 但因為 q_j 是質數, 所以 $p_1 = q_j$. 將兩邊同除此數, 依此步驟, p_i 將與 q_j 一一配對, 證完.

□

習題 4.5. 為什麼任何一個自然數都有質因數分解?

4.3.2 丟番圖線性不定方程

示例. (Diophantine equation, 丟番圖線性不定方程)

給定非零整數 m 和 n , 求 $mx + ny = k$ 的所有整數解.

首先, 取 $d = \gcd(m, n)$. 若 $d \nmid k$, 則此方程組無解; 若 $d \mid k$, 在等號兩邊同除以 d , 得

$$m'x + n'y = k', \quad \text{此時 } m' \text{ 和 } n' \text{ 互質.}$$

1. ($k' = 0$) 由於要求的是整數解, 於是 $n' \mid m'x$, 但是因為 m' 和 n' 互質, 由**習題 4.4**知 $n' \mid x$, 亦即 $x = n't$, 代入原式得 $y = -m't$, 因此一般解為 $(n't, -m't)$, $t \in \mathbb{Z}$.

2. ($k' \neq 0$) 因為 m' 和 n' 互質, 由 **性質 4.2** 知, 有整數 x_0 和 y_0 滿足 $m'x_0 + n'y_0 = 1$, 因此 $m'(k'x_0) + n'(k'y_0) = k'$ 是一組解. 若還有其他解, 由

$$\begin{cases} m'x + n'y = k' \\ m'(k'x_0) + n'(k'y_0) = k' \end{cases}$$

相減得

$$m'(x - k'x_0) + n'(y - k'y_0) = 0.$$

但這回到 1. 的情況, 因此得到一般解為

$$(k'x_0 + n't, k'y_0 - m't), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

□

4.3.3 質數無限多個

歷史上, 想發明質數生成公式的嘗試都失敗了, 沒有辦法用正面的方式證明質數有無限多個. 但是歐基里德在古希臘時期, 就已經證明質數有無限多個, 他用的法寶就是歸謬法.

定理 4.2. 質數無限多個.

證明.

假設質數只有有限多個, 全部編號為 p_1, p_2, \dots, p_N . 現考慮一數

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1$$

顯然 $A \neq 1$ 且 $\forall i \ A \neq p_i$, 因此 A 是合數. 但因為 p_i 除 A 都有餘數 1, 因此所有質數都不是 A 的因數, 從質因數分解知 A 本身必為質數. A 是合數也是質數, 矛盾! 故原假設有誤, 即質數有無限多個.

□

4.3.4 $\sqrt{2}$ 是無理數

另一個和質數性質有關的知名歸謬法應用如下

性質 4.4. $\sqrt{2}$ 是無理數.

證明.

假設 $\sqrt{2}$ 是有理數, 則 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, 且可以假設 p 和 q 互質. 由此得

$$2q^2 = p^2$$

但由**性質 4.3**, $2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p$, 所以 $p = 2k$, 再代入上式

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

於是 q 也是偶數, 和假設 p 和 q 互質矛盾, 所以 $\sqrt{2}$ 是無理數.

□

5 集合的概念

現代數學是以集合論為基礎而發展的 (尤其自從法國 Bourbaki 學派的工作之後). 但是數學和集合論不同, 數學家對於集合論必須有基本的知識, 但是不見得要對集合論的公設系統, 最新發展或猜想感興趣.

數學的命題與證明基於前兩節的架構, 許多數學命題必須至少用一階邏輯來表述, 但一階邏輯的量詞預設某個「範圍」, 在數學中因此需要「集合」的概念. 20 世紀之前 Cantor 發展的「素樸」集合論, 在形式化後碰到很大的困難⁵, 於是由數學家開始重建整個集合論. 目前數學家所採用的集合論稱為 ZFC 集合論, 這是基於 Zermelo 和 Fraenkel 在 20 世紀初發展出來的 ZF 集合論, 再加上 C 所代表「選擇公設」(axiom of choice). 但是就初學者來說, 並不需要那麼形式化的集合論, 原來的素樸集合論已經很夠用.

回顧高中學過的集合, 集合就是一個組合, 其中有一些元素. 符號上記為

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}, a_i \in A \quad (a_i \text{ 屬於 } A)$$

其中重複的元素只能算成一個元素. 萬一集合空無一物, 則這個集合稱為空集合 (empty set), 記成 \emptyset . 我們熟知下列的集合: 自然數 (\mathbb{N}), 整數 (\mathbb{Z}), 有理數 (\mathbb{Q}), 實數 (\mathbb{R}), 複數 (\mathbb{C}). 為了方便起見, 我們約定用 \bar{n} 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$.

設 A, B 為兩集合, 如果 $\forall a (a \in B \Rightarrow a \in A)$, 則稱 B 為 A 的子集合 (subset), B 包含於 A , 或 A 包含 B , 記為 $B \subseteq A$. 當 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$ 時, 稱 B 是 A

⁵如羅素悖論, 通常所有困難都來自「無限」與自我指涉.

的真子集 (proper subset), 記為 $B \subset A$. (記號類似 \leq 和 $<$ 的差別). 另外依照 \Rightarrow 的真假值約定, $\emptyset \subseteq A$, 對任何集合 A 都正確.

條列集合表示太侷限, 更常使用的是集合的性質表示法: $A = \{a \mid P(a)\}$, 表示滿足性質 $P(x)$ 的所有元素, 於是可以和述詞演算的語言結合起來. 通常這樣定義集合時, 需要一個已知的集合當作背景.

1. 在自然數中, $\{n \mid \forall m (m \mid n \Rightarrow (m = 1 \vee m = n))\} \subset \mathbb{N}$. 表示質數所成的子集合.
2. 在實數中, $\{a \mid a^2 = 2\} \subset \mathbb{R}$. $x^2 - 2 = 0$ 的解集合是實數的子集合.
3. $\{x \mid x^2 + 1 = 0\}$. 若在 \mathbb{R} 中討論, 這個集合是 \emptyset . 但在 \mathbb{C} 中, 這個集合是 $\{i, -i\}$.
4. $\{a \mid a \in A\} \subseteq A$. 這是以「是否屬於 A 」作為條件所定義的集合, 當然就是 A 本身.

上面用到集合相等的符號, 兩集合 A 和 B 相等 ($A = B$) 的合理定義為

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

由前節知這相當於

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

再檢視定義可知

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

在數學中經常要檢視兩個用不同方式得到的集合是否相等, 這是基本的檢查法.

習題 5.1. 檢視下列兩集合相等

1. $A = \{a \mid a \in A\}$.
2. 在實數中定義 B 為 $\{a \mid \exists b a = b^3\}$, 說明 $\mathbb{R} = B$
3. $\{a \mid a = 2m + 3n, m, n \in \mathbb{Z}\} = \{b \mid b = -m + 4n, m, n \in \mathbb{Z}\}$

假設一背景集合 U (稱為宇集, 表示討論脈絡下所有元素所成的集合), 若 $A, B \subseteq U$. 定義幾種集合運算如下:

1. 餘集 (complement set) : $A^c = \{a \mid \neg(a \in A)\}$. $\neg(a \in A)$ 可記為 $a \notin A$.
2. 交集 (intersection set) : $A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$.
3. 聯集 (union set) : $A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$.

習題 5.2. $A, B, C \subseteq U$, 用前節結果證明下列性質.

1. (De Morgan's law)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2. $A \cup A^c = U$; $A \cap A^c = \emptyset$; $A = (A^c)^c$.
3. (交換律) $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$.
4. (結合律) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
5. (分配律)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

習題 5.3. 定義 A 和 B 的差集 $A \setminus B$ 為 $\{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$. 證明下列敘述.

1. $A \setminus B = A \cap B^c$.

2. (De Morgan's law)

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

習題 5.4. 前節的連結詞 $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ 在集合論中有相對應的 A^c , $A \cap B$, $A \cup B$. 我們似乎可定義與 $P \Rightarrow Q$ 對應的概念. 但 \Rightarrow 已經用於 \subseteq 的定義中, 這兩種概念中間的差異是什麼?

習題 5.5. 證明 $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$

定義 5.1. (冪集合, power set) 給定一集合 A , 定義 A 的冪集合 2^A 為

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

也就是由 A 的所有子集合所成的集合.

習題 5.6. 若 A 有 N 個元素 (譬如 \overline{N})，說明 2^A 有 2^N 個元素。

定義 5.2. (笛卡兒乘積, Cartesian product) 給定兩集合 A, B , 可定義 A 和 B 的笛卡兒乘積 $A \times B$ 為

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

我們見過的例子是平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 空間 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

注意. 其實 \mathbb{R}^3 的這個定義, 目前有點不清楚, 你能看出來嗎?

5.1 關係與函數

給定兩集合 A, B , $R \subseteq A \times B$ 定義了 A 和 B 間的關係 (relation) .

示例. F 是女人的集合, P 是人的集合, 考慮集合 $\{(a, b) \mid B(a, b)\} \subseteq F \times P$, 其中性質 $B(a, b)$ 表示 a 生 b . 此子集合定義一關係, 可稱為母子關係. \square

示例. P 是人的集合, 考慮集合 $\{(a, b) \mid L(a, b)\} \subseteq P \times P$, 其中性質 $L(a, b)$ 表示 a 喜歡 b , 此子集合定義一關係, 或可稱為喜愛關係. \square

示例. 考慮集合 $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 此子集合定義了 \mathbb{R}^2 中 x 和 y 之間的一個關係. \square

由這些例子可以看出抽象的「關係」非常寬鬆. 底下介紹兩個在數學中很重要的關係.

5.1.1 等價關係

若 $D \subseteq A \times A$, 用 $a \sim b$ 表示 $(a, b) \in D$.

定義 5.3. 若對所有 $a, b, c \in A$, \sim 滿足下列三條件, 稱關係 \sim 為等價關係 (equivalence relation), 這是數學中所謂分類的基礎.

1. (反身性, Reflexivity) $a \sim a$
2. (對稱性, Symmetry) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3. (遞移性, Transitivity) $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$

注意. 如果把 $a \sim b$ 想成同類, 依日常理解, 「同類」的確滿足這三個條件.

習題 5.7. 人與人之間的喜愛關係顯然不是等價關係, 它違反了哪些條件?

示例. 我們來看看一些數學中的範例.

1. $a \sim b$ 表示 $a = b$. 「相等」顯然是等價關係.
2. 在 \mathbb{R} 中, $a \sim b$ 表示 $a > b$. 這顯然不是等價關係 (違反了 1., 2.) .
3. 在 \mathbb{R} 中, $a \sim b$ 定義成 $\exists \lambda > 0, a = \lambda b$. 這是等價關係, 略證如下:

(a) $a = 1 \cdot a$;

(b) 若 $a = \lambda b$, 則 $b = \frac{1}{\lambda}a$;

(c) $a = \lambda b, b = \mu c$ 則 $a = (\lambda\mu)c$.

這個等價關係對應的分類是正數, 負數和零.

4. 在 \mathbb{Z} 中, $m \sim n$ 定義成 $2 \mid m - n$. 這是等價關係:

(a) $2 \mid m - m$;

(b) 若 $2 \mid m - n$, 則 $2 \mid n - m$;

(c) 若 $2 \mid m - n$ 且 $2 \mid n - k$, 則 $2 \mid (m - n) + (n - k)$, 即 $2 \mid m - k$.

這個等價關係對應的分類是奇數和偶數.

5. 在平面直線中, $L \sim M$ 表示 L 平行於 M . 若容許一直線和本身平行, 則這是等價關係. 其分類要素是「斜率」.
6. 在平面圖形中, $\Gamma \sim \Sigma$ 表示 Γ 和 Σ 全等. 這顯然是等價關係. 它的分類是什麼呢?

□

習題 5.8. 底下這些關係是不是等價關係. 若不是, 它違反那個條件. 若是, 請討論它對應的分類.

1. $a \sim b$ 表示 $a \neq b$.
2. $a \sim b$ 表示 $a \leq b$.
3. 在自然數中, $m \sim n$ 定義成 m 和 n 有共同大於 1 的因數.
4. 在平面直線中, $a \sim b$ 表示 a 垂直於 b .
5. 在平面圖形中, $a \sim b$ 表示 a 和 b 相似.

6. 在人所成的集合中, $a \sim b$ 表示 a 和 b 同一天生.

7. 在人所成的集合中, $a \sim b$ 表示 a 和 b 有共同的生物母親.

對於 $a \in A$, 定義 a 的等價類 (equivalence class) A_a 為:

$$A_a = \{b \mid a \sim b\}$$

也就是與 a 「同類」的元素所成的集合.

性質 5.1. 下面是關於等價類的基本性質:

1. 若 $b, c \in A_a$, 則 $b \sim c$.
2. $a \sim b \Leftrightarrow A_a = A_b$.
3. 若 $A_a \cap A_b \neq \emptyset$, 則 $A_a = A_b$.
4. $a \not\sim b \Leftrightarrow A_a \cap A_b = \emptyset$

證明.

1. $b, c \in A_a$, 則 $a \sim b$ 且 $a \sim c$. 由對稱性 $b \sim a$, 再由遞移性 $b \sim c$.
2. (\Rightarrow) 因為 $a \sim b$, 對任意 $x \in A_a$, 則 $a \sim x$, 同上 $b \sim x$, 則 $x \in A_b$. 這證明 $A_a \subseteq A_b$. 同理因為 $b \sim a$ (對稱性) 得 $A_b \subseteq A_a$, 故 $A_a = A_b$
(\Leftarrow) $b \in A_b = A_a$, 則 $a \sim b$.
3. 由假設, 令 $c \in A_a \cap A_b$. 因為 $c \in A_a$, 所以 $a \sim c$, 同理 $b \sim c$, 因此 $a \sim b$, 由 2. 得 $A_a = A_b$.
4. (\Rightarrow) 本命題相當於 $A_a \cap A_b \neq \emptyset \Rightarrow a \sim b$. 由 3. 若 $A_a \cap A_b \neq \emptyset$, 則 $A_a = A_b$, 再由 2. 即得 $a \sim b$.
(\Leftarrow) 本命題相當於 $a \sim b \Rightarrow A_a \cap A_b \neq \emptyset$. 由 2. 若 $a \sim b$ 則 $A_a = A_b$, 當然 $A_a \cap A_b \neq \emptyset$.

□

由此可以得到下面的性質.

性質 5.2. $A = \coprod_i A_{a_i}$, 其中 $a_i \in A$, 且當 $i \neq j$ 時, $a_i \not\sim a_j$.

注意. 符號 \coprod 表示互不相交的聯集.

這個性質表示, A 可以依等價關係 \sim 被完整分類, 每類彼此無重複, 每個元素隸屬某個類別.

5.1.2 函數

函數是大家熟悉的概念,但這裡著重的是最基本的函數意義,有人可能不習慣把它視為一種特殊的關係,也許更無法接受不用代數算式來定義函數.

函數 f 是一種關係 $\Gamma_f \subseteq A \times B$, 在這種情況, Γ_f 常被稱為函數的「圖形」(graph).⁶

⁶更抽象一點,可以說 $f \in 2^{A \times B}$

函數 f 或 Γ_f 有兩個基本條件: (順便練習多量詞命題)

1. $\forall a \in A \exists b \in B (a, b) \in \Gamma_f$.
2. $\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B ((a, b_1) \in \Gamma_f \wedge (a, b_2) \in \Gamma_f \Rightarrow b_1 = b_2)$

這兩者結合在一起, 意思就是 A 中每一元素 a , 都有唯一元素 $b \in B$, 使得 $(a, b) \in \Gamma_f$. 因此通常把 b 記為 $f(a)$, 稱為 a 所對應的的函數值, 並把函數關係, 重新寫為 $f: A \rightarrow B$. A 稱為 f 的定義域 (domain), B 稱為 f 的對應域 (codomain 或 range), $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ 稱為像集 (image) .

注意. 函數有可能多對一, 而且 B 中不見得每一點都會被對應到.

若 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 定義合成函數 (composite function) $g \circ f: A \rightarrow C$ 如下⁷:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

底下討論有特別性質的函數:

定義 5.4. 函數 $f: A \rightarrow B$

1. (單射, injection, 也稱為嵌射或 1 對 1) 記為 $f: A \rightarrow B$,

$$\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$$

2. (滿射, surjection, 也稱為蓋射或映成) 記為 $f: A \rightarrow B$,

$$\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b$$

即 $f(A) = B$ 的意思.

3. (對射, bijection) 若 f 同時為嵌射與滿射, 則稱為對射. 記為 $f: A \leftrightarrow B$.

習題 5.9. 證明下列敘述

1. 若 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 則 $g \circ f: A \rightarrow C$
2. 若 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 則 $g \circ f: A \rightarrow C$
3. 若 $f: A \leftrightarrow B, g: B \leftrightarrow C$, 則 $g \circ f: A \leftrightarrow C$

⁷ 「 \circ 」念作 of. 「 $(g \circ f)(a)$ 」念作 g of f of a .

如果將 f 對映的方向倒轉，便是「反函數」 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 的概念。這相當於考慮 $\Gamma_{f^{-1}} \subseteq B \times A$ ，其中

$$(b, a) \in \Gamma_{f^{-1}} \subseteq B \times A \Leftrightarrow (a, b) \in \Gamma_f \subseteq A \times B$$

問題是倒過來的關係不見得真是一個函數，必須檢查是否符合基本條件：

1. B 中每一元素皆有對應：

$$\forall b \in B \exists a \in A (b, a) \in \Gamma_{f^{-1}} \Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A (a, b) \in \Gamma_f$$

這相當於 f 是滿射的條件。

2. 不容許有一對多的情況：

$$\begin{aligned} & \forall b \in B \forall a_1, a_2 \in A ((b, a_1) \in \Gamma_{f^{-1}} \wedge (b, a_2) \in \Gamma_{f^{-1}} \Rightarrow a_1 = a_2) \\ \Leftrightarrow & \forall b \in B \forall a_1, a_2 \in A ((a_1, b) \in \Gamma_f \wedge (a_2, b) \in \Gamma_f \Rightarrow a_1 = a_2) \end{aligned}$$

這正是單射的條件。

這表示如果 $f : A \rightarrow B$ 同是單射與滿射（也就是對射），那麼 $\Gamma_{f^{-1}} \subseteq B \times A$ 將定義一個函數 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 。此函數 f^{-1} 稱為 f 的反函數，滿足

$$f^{-1}(f(a)) = a, \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

如果用合成函數的符號可以記成

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A, \quad f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$$

其中函數 $\mathbf{1}_A : A \rightarrow A$ 定義為 $\mathbf{1}_A(a) = a$ ，同理 $\mathbf{1}_B : B \rightarrow B$ 定義為 $\mathbf{1}_B(b) = b$ 。

習題 5.10. 若 $f : A \rightarrow B$ ，考慮

$$g : A \rightarrow f(A), \quad g(a) = f(a)$$

則 g 有反函數。

習題 5.11. 假設 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ 。證明下面敘述

1. 若 $g \circ f = \mathbf{1}_A$ (亦即 $\forall a \in A g(f(a)) = a$)，證明 f 必為單射。
2. 若 $f \circ g = \mathbf{1}_B$ (亦即 $\forall b \in B f(g(b)) = b$)，證明 f 必為滿射。

3. 由此證明若 g 滿足

$$g \circ f = \mathbf{1}_A, \quad f \circ g = \mathbf{1}_B$$

則 f 必為對射, 且 g 為 f 的反函數.

習題 5.12. 假設 $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow C$ 分別有反函數 $f^{-1} : B \rightarrow A$ 和 $g^{-1} : C \rightarrow B$. 證明 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

若 $f : A \rightarrow B$, 且 $C \subseteq B$. 記號 f^{-1} 也常用來定義下列集合:

$$f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\} \subseteq A.$$

習題 5.13. 假設 $f : A \rightarrow B$, 且 $C \subseteq A, D \subseteq B$. 下列敘述是否正確?

1. $f^{-1}(B) = A$.
2. $f(f^{-1}(C)) = C$.
3. $f^{-1}(f(D)) = D$.

習題 5.14. 假設 $f : A \rightarrow B$, 且 $C, D \subseteq B$, 證明下列各敘述:

1. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
2. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
3. $f^{-1}(D \setminus C) = f^{-1}(D) \setminus f^{-1}(C)$.

習題 5.15. 在上個習題中, 若把問題換成 f , 結果會如何?

5.2 無限集合有多大

人類對於無限很好奇, 但通常僅止於想像, 反映出這個概念並非現實世界的實體. 直到數學家 Cantor 在 19 世紀開始探討「無限」, 才開始以理性的方式探討這個迷人的課題. 更因為無限的概念看似推廣有限的生活經驗, 造成許多違反直覺的爭議, 在 20 世紀初期爆發數學哲學的論戰. 現在數學家已經理解, 推廣日常經驗到牽涉無限的概念都必須小心, 必須思考清楚自己推理的論據.

5.2.1 有限集合

定義 5.5. (有限, finite) 若存在對射 $f : A \leftrightarrow \bar{n}, n \in \mathbb{N}$, 則稱集合 A 是有限的.

這個定義源自熟悉的點數經驗，因此如果以 $|A|$ 表示集合的基數 (cardinality, cardinal number, 集合的大小, 集合元素的多寡), 當 $f: A \leftrightarrow \bar{n}$ 時, 則 $|A| = n$. 但嚴格來講, 我們並沒有真正證明基數的概念是良好定義的 (well defined). 也就是說, 尚未證明「若 $n \neq m$, 則 \bar{n} 和 \bar{m} 之間不存在對射」. (你可能覺得很荒唐!)

後續將假設下面基於經驗, 「顯然正確」的事實:

性質 5.3. 假設 $f: A \leftrightarrow \bar{n}$, 如果 $\emptyset \neq B \subset A$, 則

1. 不可能有 $B \leftrightarrow \bar{n}$.
2. 可找到 $0 < m < n$, 使得 $B \leftrightarrow \bar{m}$.

從這個性質可以很容易推出底下性質:

性質 5.4.

1. A 有限, 且 $B \subset A$, 則不存在 $B \leftrightarrow A$.
2. A 有限, 且 $B \subseteq A$, 則 B 有限且 $|B| \leq |A|$, 尤其若 $B \subset A$, 則 $|B| < |A|$.

習題 5.16. 證明這個性質.

習題 5.17. (基數概念是良好定義的) 若 $A \leftrightarrow \bar{n}$ 且 $A \leftrightarrow \bar{m} \Rightarrow n = m$.

在數學中, 等價的命題 (這些命題經常有不同的用途) 常用底下的方式來敘述與證明, 這時安排一個比較簡單的證明順序是很有意思的.

性質 5.5. 底下三個敘述是等價的:

1. A 有限.
2. $\exists n > 0$, 可找到 $f: \bar{n} \rightarrow A$.
3. $\exists n > 0$, 可找到 $g: A \rightarrow \bar{n}$.

證明.

- (1. \Rightarrow 2.) 對射是一種滿射, 顯然正確.
- (2. \Rightarrow 3.) $\forall a \in A$, 令 $g(a) = f^{-1}(\{a\})$ 的最小元素. $g: A \rightarrow \bar{n}$ 顯然是單射.

(3. \Rightarrow 1.) $g(A) \subseteq \bar{n}$, 所以 $g(A)$ 有限, 亦即存在 $m \leq n$, 使得 $g(A) \leftrightarrow \bar{m}$. 又

$$((A \leftrightarrow g(A)) \wedge (g(A) \leftrightarrow \bar{m})) \Rightarrow (A \leftrightarrow \bar{m})$$

即 1. □

性質 5.6. 若 A 和 B 是有限集合, 則 $A \cup B$ 是有限集合.

證明.

用 $A \leftrightarrow \bar{n}$, $B \leftrightarrow \bar{m}$, 可造出 $\overline{m+n} \twoheadrightarrow A \cup B$. (how?) □

習題 5.18. 若 A_1, A_2, \dots, A_n 都是有限集合, 則 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 有限.

性質 5.7. 若 A 和 B 是有限集合, 則 $A \times B$ 是有限集合.

證明.

$f: A \leftrightarrow \bar{n}$, 則

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^{|A|} B_i, \quad B_i = \{(f(i), b) \mid b \in B\}$$
□

由證明可知 $|A \times B| = |A| \times |B|$.

習題 5.19. 若 A_1, A_2, \dots, A_n 都是有限集合, 則 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 有限.

5.2.2 可數的無限

若一集合不是有限集合, 則稱為無限 (infinite, 無窮) 集合. 由**性質 5.4**知, 一個有限集合, 不會跟它的真子集有對射關係, 這給出檢測一集合是否無限的方法: 若一集合與其真子集有對射關係, 則該集合為無限集合.

性質 5.8. \mathbb{N} 是無限集合.

證明.

定義對射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}: f(n) = n + 1$, 得證. □

習題 5.20. 若 $B \subseteq A$ 且 $B \leftrightarrow \mathbb{N}$, 則 A 為無限集合.

習題 5.21. 若 A 無限, 而 $B \subset A$ 是有限集合, 則 $A \setminus B \neq \emptyset$

後面將說明 \mathbb{N} 是「最小」的無限集合, 扮演類似 \bar{n} 典型集合的角色. Cantor 的貢獻就在於用對射來刻畫集合的大小, 並發現無限的不同等級.⁸

定義 5.6. 若 $A \leftrightarrow \mathbb{N}$, 則稱 A 為可數無限集合 (countable infinity), 可數無限集合的基數記為 ω . 一無限集合若非可數, 則稱為不可數無限 (uncountable infinity). 另有限集合和可數無限集合稱為可數集合 (countable).

習題 5.22. 若 A, B 為兩集合, 定義 $A \sim B$ 為存在 $A \leftrightarrow B$. 證明這是一個集合之間的等價關係。

注意. 這個等價關係定義了一般集合的基數, 亦即 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

示例. 所有正偶數所成的集合是可數無限. \mathbb{Z} 是可數無限. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可數無限.

每種特殊情況都要找特殊方法來證明存在對射顯然太麻煩. 底下證明一些好用的性質. 和**性質 5.5**類似, 我們也有刻畫可數集合的方法.

性質 5.9. 底下三個敘述是等價的,

1. A 可數.
2. 可找到 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$
3. 可找到 $g: A \rightarrow \mathbb{N}$

證明和**性質 5.5**很類似, 但是在 $3. \Rightarrow 1.$ 時, 需要證明下面的性質:

性質 5.10. 若 $A \subset \mathbb{N}$ 且 A 無限, 則 A 是可數無限.

證明.

我們想要造出函數 $f: \mathbb{N} \leftrightarrow A$, 造法是用歸納法遞迴的造出來.

$i = 1$: $f(1) = \min(A)$.

$i = 2$: $f(2) = \min(A \setminus \{f(1)\})$. 因為由**習題 5.21**, $A \setminus \{f(1)\} \neq \emptyset$.

..... 依此類推.

$i = k$: 假設 $f(1), f(2), \dots, f(k)$ 皆已定義.

⁸提醒讀者, 在有限集合時點數和對射是同一個概念, 也就是從 1 數到 n 與和 \bar{n} 存在對射是一件事, 但是在無限時, 這兩種想法就分道揚鑣了: 分別稱為序數 (ordinal number) 和基數.

$$i = k + 1: f(k + 1) = \min(A \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(k)\}).$$

注意到 f 是一個遞增函數 (習題), 也就是 $m > n \Rightarrow f(m) > f(n)$. 因此 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, 於是只需要證明 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.

任取 $a \in A \subset \mathbb{N}$, 令 $D = A \cap \bar{a}$ 則 D 為一有限集合, 令 $d = |D|$. 由於 D 的元素是 A 最小的 d 個元素. 由 f 的構造方式知 $f(d) = a$, 證完.

□

習題 5.23. 證明上述 f 是遞增函數.

示例. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 和 \mathbb{Z} 是可數無限 (重訪). 正有理數 \mathbb{Q}^+ 也是可數無限.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: 利用 $(m, n) \mapsto 2^m \cdot 3^n$ 可得到 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

\mathbb{Z} : 利用 $(m, n) \mapsto m - n$ 可得到 $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

\mathbb{Q}^+ : 利用 $(m, n) \mapsto \frac{m}{n}$ 可得到 $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$.

□

性質 5.11. 若 A_1, A_2, \dots, A_n 都是可數集合, 則 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 可數.

證明.

利用映射 $(m_1, m_2, \dots, m_k) \mapsto 2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ 可得到 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

由此知 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ 為可數無限. 其中 p_k 為第 k 個質數.

現令 $f_i: \mathbb{N} \rightarrow A_i$. 利用 $(m_1, m_2, \dots, m_k) \mapsto (f_1(m_1), f_2(m_2), \dots, f_k(m_k))$

可得到 $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \rightarrow A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

□

習題 5.24. 可以用類似方法證明 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times \dots$ 可數嗎?

性質 5.12. 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 都是可數集合, 則 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ 也是可數集合.

證明.

令 $f_i: \mathbb{N} \rightarrow A_i$, 利用 $(i, j) \mapsto f_i(j)$ 可證得

$$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

□

習題 5.25. \mathbb{Q} 是可數無限.

習題 5.26. I 可數. 若 $A_\alpha, \alpha \in I$ 皆可數, 則 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 也是可數集合.

定義 5.7. (代數數, algebraic number) 令 $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}, m_n \neq 0$, 則整係數多項式

$$m_n x^n + m_{n-1} x^{n-1} + \dots + m_1 x + m_0 = 0$$

的根稱為**代數數**.

定義 5.8. (超越數, transcendental number) 非代數數的數稱為**超越數**.

$n = 1$ 時的代數數就是有理數 \mathbb{Q} , 這是一個可數無限集合. 高中生所學過的無理數大部分是代數數, 如平方根數、立方根數 (why?), 但 π 是超越數 (見後續課程).

示例. 代數數所成的集合是可數無限.

1. 將多項式 $m_n x^n + m_{n-1} x^{n-1} + \dots + m_1 x + m_0 = 0$ 的根所成的集合記為 $A_{(m_n, \dots, m_1, m_0)}$, 其中 $m_0, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}, m_n \neq 0$, 這當然是可數集合. 注意 $A_{(m_n, \dots, m_1, m_0)}$ 的足碼 $(m_n, \dots, m_1, m_0) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$. 令 $I = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, 則 I 可數.
2. 令 A_n 為 1. 中之代數數所成的集合. 因為

$$A_n = \bigcup_{(m_n, \dots, m_1, m_0) \in I} A_{(m_n, \dots, m_1, m_0)}$$

由**習題 5.26**知 A_n 為可數集合.

3. 令 A 為代數數所成的集合. 因為 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 故 A 是可數無限.

□

習題 5.27. 定義 $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} = \{(m_1, \dots, m_n, 0, 0, \dots) \mid m_i \in \mathbb{N}\}$. 證明 $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ 可數.

(提示: 證明 $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(m_1, \dots, m_n, 0, 0, \dots) \mid m_i \in \mathbb{N}\}$.)

注意. $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times \dots$.

5.2.3 不可數的無限

令 $\{0, 1\}^A = \{f \mid f: A \rightarrow \{0, 1\}\}$. 則對任一集合 A , $\{0, 1\}^A$ 和冪集合 2^A 之間有自然的對射:

$$(f: A \rightarrow \{0, 1\}) \mapsto \{a \mid f(a) = 1\} \subseteq A$$

習題 5.28. 證明這個對映是對射.

性質 5.13. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 是不可數無限.

證明.

運用歸謬法, 假設 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 是可數無限, 因此 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 的元素可列成 $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$.

將 f_i 記為 $(f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, \dots)$, 其中 $f_{ik} = f_i(k) = 0$ 或 1 . 於是所有 f_i 可列成:

$$\begin{array}{c|cccccc} f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1k} & \cdots \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2k} & \cdots \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & f_{k3} & \cdots & f_{kk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

現定義 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \dots)$, 其中 $\alpha_k = 1 - f_{kk}$, 亦即

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & f_{kk} = 0 \\ 0, & f_{kk} = 1 \end{cases}$$

α 定義了一個 $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ 的函數 $\alpha(k) = \alpha_k$, 因此 $\exists j f_j = \alpha$, 但這是不可能的, 因為 $f_j(j) = f_{jj} = \alpha_j \neq f_{jj}$, 矛盾. 原來的假設 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 可數無限有誤, 故 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 為不可數無限.

□

這個證明方法稱為「對角論證」(Cantor's diagonal argument), 是數理邏輯運用歸謬證法非常知名而有用的論證方式. 例如重要的 Gödel 不完備定理和 Turing 不可計算定理, 都是巧妙應用對角論證的結果.

習題 5.29. 用對角論證證明 $[0, 1]$ 是不可數無限集合. (假設 $0.5 = 0.4999 \dots$ 只取第一種表示法)

值得注意的是, 如果用 $2^{\mathbb{N}}$ 的角度來思考, $f_i: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ 表示一個 $A_i \subseteq \mathbb{N}$, 其中

$$j \in A_i \Leftrightarrow f_i(j) = 1 \quad \text{或是} \quad A_i = \{j \mid f_i(j) = 1\}.$$

因此 $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ 所對映的子集合 B 滿足

$$k \in B \Leftrightarrow \alpha(k) = \alpha_k = 1 \Leftrightarrow f_{kk} = f_k(k) = 0 \Leftrightarrow k \notin A_k$$

亦即

$$B = \{k \mid k \notin A_k\}$$

這個想法脫離了 \mathbb{N} 的限制, 得以證明下列基本定理.

性質 5.14. 在 A 和 2^A 之間不存在對射. 這表示 $|A| \neq |2^A|$.

證明.

用歸謬證法, 假設有對射 $f : A \leftrightarrow 2^A$. 定義 $B \subseteq A$ 如下

$$B = \{a \mid a \notin f(a)\}$$

令 $\alpha = f^{-1}(B)$, 則 α 可能在 $B = f(\alpha)$ 中, 也可能不在 B 中, 但

$$\alpha \in f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in B \Leftrightarrow \alpha \notin f(\alpha)$$

這當然不可能, 因此原假設不成立, 即 A 和 2^A 之間不存在對射.

□

這個基本性質告訴我們無限有很多層級, 例如 $|\mathbb{N}| = \omega$ 和 $|2^{\mathbb{N}}|$ 是不一樣的. 底下就來證明 $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$

性質 5.15. $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

證明.

將證明分成兩個步驟

1. $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$: 由 $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x$ 得 $\mathbb{R} \leftrightarrow (0, 1)$.
2. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leftrightarrow (0, 1)$: 主要用到純小數的二進位表示法. 定義由 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 到 $[0, 1]$ 的函數如下:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} + \dots$$

右邊表示成二進位小數就是 $0.a_1a_2 \dots a_n \dots$. 例如

$$0.0000000 \dots = 0$$

$$0.11111111 \dots = 1$$

$$0.0101010 \dots = \frac{1}{3}$$

問題是有一些數如 $\frac{1}{2}$ 有兩種表示法： $0.10000\dots$ 和 $0.01111\dots$ 。必須把有問題的部分從兩邊移除才會得到對射

$$g: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \leftrightarrow [0, 1] \setminus B$$

其中

$$A = \{(0, 0, 0, 0, 0, \dots), (1, 1, 1, 1, 1, \dots), \\ (\underline{0}, 1, 1, 1, 1, \dots), (\underline{1}, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ (\underline{0}, 0, 1, 1, 1, \dots), (\underline{0}, \underline{1}, 0, 0, 0, \dots), (\underline{1}, \underline{0}, 1, 1, 1, \dots), (\underline{1}, \underline{1}, 0, 0, 0, \dots), \dots\}$$

$$B = \left\{ \frac{n}{2^k} \mid n, k \in \mathbb{N}, n < 2^k \wedge n \text{ 是奇數} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots \right\}$$

A 和 B 是兩個可數集合，因此存在 $h: A \leftrightarrow B$ 。結合兩者可得

$$f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leftrightarrow [0, 1], \quad \text{其定義為 } f(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha), & \alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} - A \\ h(\alpha), & \alpha \in A \end{cases}$$

承上，再由**習題 5.28**，即得

$$|\mathbb{R}| = |(0, 1)| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$$

□

習題 5.30. 說明 A 和 B 是可數無限集合。

底下我們想要比較基數的大小。假設一個事實：⁹

性質 5.16. (Bernstein) 如果有 $A \rightarrow B$ 且 $B \rightarrow A$ 則 $|A| = |B|$ 。

習題 5.31. 若 $C \subset B \subset A$ 且 $|A| = |C|$ ，則 $|A| = |B| = |C|$ 。

由 Bernstein 性質，可以定義一個比大小的方式：若有 $A \rightarrow B$ ，但沒有 $B \rightarrow A$ 則記成 $|A| \prec |B|$ ，表示 A 的基數比 B 小。由於 A 有一顯然的單射到 2^A ： $a \in A \mapsto \{a\} \in 2^A$ ，由**性質 5.14** 可得 $|A| \prec |2^A|$ 。因此

$$|\mathbb{N}| \prec |2^{\mathbb{N}}| \prec |2^{2^{\mathbb{N}}}| \prec \dots$$

有時也直接寫成

$$\omega \prec 2^{\omega} \prec 2^{2^{\omega}} \prec \dots$$

⁹可參考楊維哲《何謂實數》或 Munkres, James R. “Topology”, 2nd ed.(2000)

習題 5.32. 討論所有無限集合的基數中最小的是不是 ω . (見性質 5.17)

實數的基數 $|2^{\mathbb{N}}|$ 通常記為 c , 表示連續統 (continuum) 的意思. Cantor 曾提出知名的連續統假設 (continuum hypothesis), 他認為:

沒有任何集合的基數介於 $|\mathbb{N}|$ 和 $|\mathbb{R}|$ 之間.

也就是說「若 $\mathbb{N} \subset A \subset \mathbb{R}$, 則 $|A| = \omega$ 或 $|A| = c$ 」. 連續統假設後來被 Cohen 證明獨立於 ZFC 集合論的公設, 也就是說無論是連續統假設或其否定, 都無法從 ZFC 公設推導出來 (如果這些公設之間沒有矛盾).

習題 5.33. 利用下列敘述證明 $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$.

1. $|\mathbb{R}^2| = |[0, 1] \times [0, 1]|$.
2. 找出對射 $[0, 1] \leftrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. (Hint: 運用前述小數表示法)
3. 這個方法可以推廣到 \mathbb{R}^3 以上嗎?

習題 5.34. 利用性質 5.16 證明超越數的基數 $= |\mathbb{R}|$

5.2.4 反省無限：選擇公設

「有限」的定義是清楚的, 而「無限」則是透過有限的否定來定義. 因此透過討論有限集合的性質, 可發現兩個證明集合 A 是無限集合的方法. 一是若有 $\mathbb{N} \rightarrow A$ 則 A 無限; 二是若 A 和某真子集有對射關係, 則 A 無限. 但是反之是否為真呢?

性質 5.17. 底下三敘述等價

1. A 無限.
2. 有 $\mathbb{N} \rightarrow A$.
3. 有 $B \subset A$ 且 $A \leftrightarrow B$.

證明.

由前知 2. \Rightarrow 1., 3. \Rightarrow 1. .

a. (2. \Rightarrow 3.): 因為 \mathbb{N} 和某真子集 (如偶數 $2\mathbb{N}$) 有對射關係. 現假設 $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, 並令

$$B = (A \setminus f(\mathbb{N})) \cup f(2\mathbb{N}), \quad \text{顯然 } B \subset A$$

定義下列映射 $g: A \rightarrow B$

$$f(a) = \begin{cases} a & a \in A \setminus f(\mathbb{N}) \\ f(2n) & a = f(n) \in f(\mathbb{N}) \end{cases}$$

易證此為對射.

b. (1. \Rightarrow 2.): 用前述遞迴定義函數的方式造出 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.

$i = 1$: 因為 $A \neq \emptyset$, 取 $a_1 \in A$, 令 $f(1) = a_1$.

$i = 2$: 因為 A 無限, $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$ 取 $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, 令 $f(2) = a_2$.

... 依此類推.

$i = k$: 假設 $f(1), f(2), \dots, f(k)$ 皆已定義.

$i = k + 1$: 因為 A 無限, $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \neq \emptyset$ 取 $a_{k+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$,

令 $f(k + 1) = a_{k+1}$.

此函數顯然是單射, 證完.

□

許多人定義無限時, 喜歡用出人意料的 3. 做定義, 但真要證明存在這樣的對射時, 則經常用到 2., 也就是這裡提到的證明.

令人意外的是, (1. \Rightarrow 2.) 的證明是「錯」的. 這個證明和**性質 5.10**明明一樣, 到底有什麼錯? 兩者的差別在於**性質 5.10**中, $f(1), f(2), \dots$ 的選法非常明確, 但是在現在的證明裡並沒有清楚有效的選擇方式, 這樣的證明有效嗎?

在日常生活的「有限」環境中, 這樣做沒有問題, 但是對於各式各樣可能的 $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 我們到底如何選, 其實毫無頭緒. 我們覺得安心只是把平常有限的策略搬到無限罷了. 數學家在集合論早期已經因為無限, 遇過嚴重的悖論, 因此在 ZF 集合論中對「如何構成集合」給了嚴格的限定. 而現在碰到的情況卻不在 ZF 集合論容許的公設裡, 於是數學家加入一條新公設, 稱為選擇公設 (axiom of choice, 也就是 ZFC 的 C).

選擇公設: 對於一組集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 其中 $A_\alpha \neq \emptyset$, I 是足碼所成的集合 (可能是不可數無限). 存在一個選擇集合 C 使得 $C \cap A_\alpha = \{a_\alpha\}$.

注意. 接受選擇公設, 相當於接受一條新的建立集合的規則. 有時 C 被寫為選擇函數 $c: I \rightarrow \coprod_{\alpha \in I} A_\alpha$, 滿足 $c(\alpha) = a_\alpha \in A_\alpha$.

在上述證明裡, 我們需先定義選擇函數 $c: 2^A \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$, 使得所有 $\emptyset \neq B \subseteq A$, 滿足 $c(B) \in B$. 然後重寫建構函數的步驟如下:

$i = 1$: 因為 $A \neq \emptyset$, 令 $f(1) = c(A)$.

$i = 2$: 因為 A 無限, $A \setminus \{f(1)\} \neq \emptyset$, 令 $f(2) = c(A \setminus \{f(1)\})$.

... 依此類推.

$i = k$: 假設 $f(1), f(2), \dots, f(k)$ 皆已定義.

$i = k + 1$: 因為 A 無限, $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \neq \emptyset$, 令 $f(k + 1) = c(A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\})$.

□

對於選擇公設的取捨, 幾乎重演當初歐氏幾何「平行公設」的爭議. 有人希望證明 ZF 公設能夠推導出選擇公設. 有人希望把選擇公設的否定加入 ZF 公設, 然後導出矛盾. 但最後 Gödel 和 Cohen 分別證明選擇公設的反或正都無法由 ZF 公設推導出來, 也就是選擇公設是獨立於 ZF 公設的命題. 現代數學家一般都接受 ZFC 公設, 作為數學研究的基礎.¹⁰

¹⁰但也有人覺得選擇公設太強大, 可能從選擇公設推導出令人難以接受的結果, 其中最知名的就是 Banach-Tarski 悖論:

一個三維實心球, 在分割成有限塊後, 經過旋轉和平移, 可以重新組合成兩個「一樣」的球.

如果你覺得選擇公設顯而易見, 這是一個警惕. 也因此, 有些數學家會盡量減弱自己運用選擇公設的強度或盡量迴避.