18

質數的倒數所組成的級數

在這節中，我們要考慮級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p}+\cdots, \qquad (P)$$

其中分母 p 是質數，按照上升次序排列。我們將稱它爲級數 P。它是一個特別有趣的級數。

正數所組成的級數叫做正項級數。我們從正項級數的幾個基本概念開始。應該強調指出，這些討論僅適用於正項級數。只考慮這種級數的原因是，可以用最少的預備知識使得討論進行下去。處理既有正項又有負項的級數需要更多的預備知識。我們定義三個級數 A, B, C 如下：

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots; \qquad (A)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots; \qquad (B)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots。 \qquad (C)$$

關於級數的一個基本問題是研究所有項的“和”。這個術語解釋如下。

一個無窮級數的第 n 個都分和是指它的前 n 項之和。例如上面的級數 A 的部分和 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是

$$A_1=1, \quad A_2=1+2=3, \quad A_3=1+2+3=6, \quad \cdots$$

$$A_n=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1), \quad \cdots。$$

因爲我們只考慮正項級數，所以當項數增加時部分和嚴格遞增。於是下列兩種情況之一必定發生：要麼部分和變得任意大，要麼存在一個數使得部分和永遠不超過它。對於上面的級數 A，部分和可以增大到超過任何的界。當 n 增大時，量 $n(n+1)/2$ 無限制地增大。這種級數叫作發散級數，或者叫作沒有和的級數。然而，級數 B 的部分和 $B_1, B_2, \cdots$ 是有界的；它們是

$$B_1=1, \quad B_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$B_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}, \quad B_4=\frac{15}{8}, \quad \cdots。$$

根據幾何級數前 n 項和的公式，

$$B_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}。$$

顯然，無論 n 多大，部分和 B_n 小於 2。

現在若一個級數的部分和被一個數M所界①，那麼這些部分和也一定被每一個比M大的數所界（例如，級數 B 的部分和不僅被 2 所界，而且被每一個大於 2 的數所界）。但是，可能發生這種情況：沒有比M更小的界存在（例如，在級數 B 中，部分和可以超過任何比 2 小的數）。在有界級數的情況，或者說在被稱作收斂級數的情況，最小

① 若所有的部分和都小於或等於M，則稱它們爲M所界，並把M叫作它們的一個界。

的界 S 被稱作級數的和①。（級數 B 的和是 2。）

在我們開始進入討論主要論題級數 P 之前，我們暫且離開主題，先來看一下上面的級數 C。級數 C 提供了一個並非意料之中的結果：盡管它的項趨於零，但這個級數是發散的。爲了看出這一點，我們把級數分成無窮多段，使得每一段末尾是形如 $1/2^n$ 的項，$n=1,2,\cdots$。

在第一組數中，我們把 $\frac{1}{2}$ 之前的項放入：$1+\frac{1}{2}$；

在第二組數中，我們把相繼的項加到 $\frac{1}{2^2}$：$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$；

在第三組數中，我們再把下面的相繼項加到 $\frac{1}{2^3}$：$\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}$；

…………………………………………

第 n 段是：$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，

等等。因爲級數的項嚴格遞減，所以每一段中最末一項是最小的數。因此，第一段的各項的和大於把這一段中每一項都換成最後一項所求得的和。但是這個較小的和，對於每個 $n>1$ 都等於 $1/2$。於是

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\ ,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\ ,$$

…………………………………………

① 級數的和經常被敘述爲下面的形式：一個無窮級數收斂於一個數 S（稱爲它的和），如果它的部分和序列 $S_1,S_2,\cdots$ 有極限 S，也就是說，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$。

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{共有 } 2^n-2^{n-1}=2^{n-1} \text{ 項}}=\frac{1}{2}\ ,$$

…………………………………………

因爲這樣的段的個數是沒有盡頭的，所以 $1/2$ 的個數也是無窮盡的，而這些 $1/2$ 要加到累積的和之中。只要 $1/2$ 的個數加到足夠多，其和就超過任何給定的值。

這樣，我們看到級數 B 是收斂的，而級數 C 是發散的。我們應當注意到級數 B 是由級數 C 中刪去某些項之後得到的。事實上，C 中足夠多的項被刪除了，這樣才使得它的和降爲一個有窮數。現在質數的倒數所組成的級數 P 也可以從級數 C 中移走某些項而得到。這就提出這樣一個問題：是否也有足夠多的項被刪去而給出一個收斂級數呢？本文的主要目的是給出一個巧妙的證明，證明級數 P 是發散的。

我們用反證法來證明，也即假定這個級數收斂，然後導出矛盾。

若級數 P 收斂於和 S，那麼每個比 S 小的數，最終會被它的部分和超過。特別地，這個級數的部分和最終會超過 $S-1/2$。假定加到這個級數的第 n 項 $1/p_n$ 時發生這種情況：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_{n-1}}\leqslant S-\frac{1}{2}\ ,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_{n-1}}+\frac{1}{p_n}>S-\frac{1}{2}\ 。$$

那麼，所有餘下的項

$$\frac{1}{p_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+2}}+\cdots$$

必須小於$1/2$，因爲否則總的和將大於S，這是不可能的。這樣，對於某個n的值，我們有

$$\frac{1}{p_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+2}}+\cdots<\frac{1}{2}\ 。$$

現在我們離開主題而進入到一個表面上似乎與此無關的領域，考慮在第k個質數之後的質數之後的質數序列

$$p_{k+1}\ ,\quad p_{k+2}\ ,\quad \cdots,$$

它們按着遞增順序排列。設$N(x)$代表小於或等於x的正整數中不被質數

$$p_{k+1}\ ,\quad p_{k+1}\ ,\quad \cdots,$$

中任何一個所整除的正整數的個數。換句話說，$N(x)$是這樣的正整數的個數，它們$\leqslant x$且其所有質因子都在前k個質數$p_1,p_2,\cdots,p_k$之中。例如，如果$k=4$，那麼

$$\{p_5,p_6,p_7,p_8,\cdots\}=\{11,13,17,19,\cdots\}\ ,$$

且

$$N(10)=10,\quad N(15)=13,\quad N(27)=20。$$

從1到10中沒有一個整數被$11,13,17,\cdots$整除，因此$N(10)=10$；在1到15的範圍內，只有兩個整數（即11與13）可以被質數$11,13,17,\cdots$中某個整除，因此$N(15)=13$；在1到27的範圍內，有七個整數，$11,13,17,19,22,23,26$，可以被質數$11,13,17,\cdots$中某一個整除，因此$N(27)=20$，當$k=4$時。

我們假定k已被確定爲某個值，$N(x)$的值相應地就被確定了。（在這裏k的具體值並不重要。）我們可以照下面的辦法估計$N(x)$的大小。

設y代表任意一個正整數；它可以被分解成質因子之積：

$$y=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_t^{a_t}\ ,$$

其中指數$a_1,a_2,\cdots,a_t$可以是奇數也可以是偶數。若指數a_i是奇數，我們就把它降低爲在它前面的且與它相鄰的偶數值，而在展開式的尾部再乘以因子p_i。例如，若$y=2^7\cdot3^4\cdot5^3\cdot7^6$，我們可以把它重新寫成

$$y=(2^6\cdot3^4\cdot5^2\cdot7^6)(2\cdot5)。$$

用這種辦法，我們可把y寫成$y=uv$，其中u中每一個質因子出現偶數次，而v中的每個質因子恰好只出現一次。因爲u的因子出現了偶數次，所以u是一個完全平方；因此我們可以寫

$$y=w^2\cdot v\ ,$$

其中v不具有重複因子。現在，要使y被計算在$N(x)$之內，那麼它必須滿足條件：

（i）$y\leqslant x$；

（ii）y的所有質因子必須在前k個質數$p_1,p_2,\cdots,p_k$之中，爲了估計$N(x)$，我們來估計滿足條件（i）與（ii）的正整數$y=w^2v$的個數。爲了滿足（i），我們當然必須規定$w^2v\leqslant x$，又因爲$v\geqslant1$，我們必須要求

$$w\leqslant\sqrt{x}\ 。$$

爲了滿足條件（ii），我們必須保證$y=w^2v$的全部質因子，都在前k個質數$p_1,p_2,\cdots,p_k$之中，因而v的全部質因子也是如此。這樣一來，我們要求v是下列的形式

$$v=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k}。$$

由於v中不包含重複因子，所以上式中的指數$b_1,b_2,\cdots,b_k$中的每一個或者爲0，或者爲1。因爲只有兩種選取的可能性，所以v的可

能值的總數最多是 2^k。（若 $p_1p_2\cdots p_k>x$，則 v 的可能值的總數小於 2^k，因爲在這種情況下，v 的某些值將不滿足條件（i）。）

現在滿足條件（i）與（ii）的 $y=w^2v$ 所可能取的值的個數，取決於它的 w 部分與 v 部分所允許的值的個數。而這兩部分可能選取的個數，分別至多是 $\sqrt{x}$ 與 2^k。因而，對於 y 的可能值，至多可能有

$$2^k\sqrt{x}$$

個；這也就是說

$$N(x)\leqslant 2^k\sqrt{x}\text{。}$$

共有 x 個正整數小於或等於正整數 x；這些正整數中的 $N(x)$ 個數是不能被質數 $p_{k+1},p_{k+2},\cdots$ 中的任何一個所整除的，因此，有 $x-N(x)$ 個數能被質數 $p_{k+1},p_{k+2},\cdots$ 中的某一個所整除。我們可以直接記錄有多少個 1 與 x 之間的整數是質數 $p_{k+1},p_{k+2},\cdots$ 中某個數的倍數，用這種辦法能試着數一數上述的 $x-N(x)$ 個數。在集合 $\{1,2,\cdots,x-1,x\}$ 中，至多有 x/p_{k+1} 個 p_{k+1} 的倍數（因爲這些倍數 $p_{k+1},2p_{k+1},3p_{k+1},\cdots$ 只能出現在相隔 p_{k+1} 個數的位置上）。例如，集合 $\{1,2,3,\cdots,19,20\}$ 中包含有六個 3 的倍數：$3,6,9,12,15,18$；而 $6\leqslant 20/3$。類似地，在 1 與 x 之間至多有 x/p_{k+2} 個整數是 p_{k+2} 的倍數，如此等等。所以

$$x-N(x)\leqslant\frac{x}{p_{k+1}}+\frac{x}{p_{k+2}}+\cdots\text{。}\qquad(1)$$

（我們應當注意，這個估計式在 x 很大時肯定是一個過了頭的估計；例如，當 x 既能被 p_{k+1} 又能被 p_{k+2} 整除時，那麼它在 x/p_{k+1} 與 x/p_{k+2} 的表示式中各算了一次，雖然它在 $x-N(x)$ 中只提供了值 1。）

現在回到主要問題上去。我們已經知道，若級數 P 收斂，則對某個 n 值，有

$$\frac{1}{p_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+2}}+\cdots<\frac{1}{2}\qquad(2)$$

讓我們取 k 就是這個 n 值（無論它是多少）並且考慮相應的函數 $N(x)$ 與 $x-N(x)$。這時上面的關係式（1）對於 $k=n$ 的情況就變成

$$x-N(x)\leqslant\frac{x}{p_{n+1}}+\frac{x}{p_{n+2}}+\cdots\text{。}$$

關係式（2）乘以 x，我們得到對於任何 x 都有

$$\frac{x}{p_{n+1}}+\frac{x}{p_{n+2}}+\cdots<\frac{1}{2}x\text{。}$$

綜合這些結果，我們有

$$x-N(x)<\frac{1}{2}x\text{，}$$

它等價於

$$\frac{1}{2}x<N(x)\text{，}$$

這個不等式對所有 x 成立。但是先前我們已經得到 $N(x)\leqslant 2^k\sqrt{x}$（見 172 頁），對於 $k=n$ 的情況，這個估計式變成

$$N(x)\leqslant 2^n\sqrt{x}\text{。}$$

所以，

$$\frac{1}{2}x<N(x)\leqslant 2^n\sqrt{x}\text{，}\quad\text{對於所有 } x\text{。}$$

當 x 等於 2^{2n+2} 時，我們得到

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{2n+2}<N(x)\leqslant 2^n\cdot 2^{n+1}\qquad(\sqrt{x}=2^{n+1})\text{，}$$

化簡後即

$$2^{2n+1} < N(x) \leqslant 2^{2n+1}。$$

這個矛盾證明了級數P發散。（當x的值大於2^{2n+2}時，我們可以推出出同樣的矛盾。）

參考文獻

G. Hardy anb E. Wright, Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon, Oxford (1960).