

2025 台大數學系特殊選才試題

- (1) (a) 請給出一個 2×2 的實數矩陣 M 滿足 $M \neq 0, M^2 = 0$ 且找出一個向量 $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ，使得 v 與 Mv 是一組基底。
- (b) 令 N 是一個 3×3 實數矩陣，滿足 $N^2 \neq 0, N^3 = 0$ 。假設另一個 3×3 實數矩陣 A 有 $AN = NA$ 。證明存在實數 a, b, c 使得 $A = aI + bN + cN^2$ (I 為單位矩陣)。
- (c) 令 $Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$ 。請證明對所有的非零向量 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ，其函數值 $Q(x_0, y_0)$ 恆大於 0。
- (d) 令 $Q(x, y) = kx^2 + ky^2 + 2xy$ 。請找出所有的實數 k 讓 ”對所有的非零向量 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ，其函數值 $Q(x_0, y_0)$ 恆大於 0” 的敘述都成立。

- (2) 在本題中，我們一律使用十進位表示法。對每一個正整數 n ，若

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

為其十進位展開（其中 $a_k \neq 0$ 、各 a_i 為 0 到 9 之間的整數），則定義

$$s(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

為 n 的「各位數字和」。例如， $s(2025) = 2 + 0 + 2 + 5 = 9$ 。

- (a) 證明：對任意正整數 n ， $n - s(n)$ 必為 9 的倍數。進一步證明：對任意正整數 n ， $n - s(s(n))$ 也必為 9 的倍數。
- (b) (i) 設 n 為正整數。證明：「 $n - 35s(n)$ 可被 9 整除」若且唯若「 n 可被 9 整除」。進一步求出所有滿足 $n = 35s(n)$ 的正整數 n 。
- (ii) 求出所有滿足等式 $n = 50s(s(n))$ 的正整數 n 。
- (c) (i) 設 m 為一個與 10 互質的正整數（即 $\gcd(m, 10) = 1$ ）。考慮數列：

$$R_1 = 1, \quad R_2 = 11, \quad R_3 = 111, \quad \dots$$

其中 R_k 為每一位數都是 1 的 k 位正整數。證明：存在某個正整數 k ，使得 R_k 可以被 m 整除。

- (ii) 進一步說明：對每一個與 10 互質的正整數 m ，存在無窮多個 k 使得 R_k 是 m 的倍數。

- (3) 令 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 為三個正實數，再令 δ_1, δ_2 為兩個正實數且 $0 < \delta_1 < \sum_{j=1}^3 \beta_j < \delta_2$ 。對每個正整數 k ，考慮下列的不等式：

$$(1) \quad k\delta_1 \leq \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + \beta_3 m_3 \leq k\delta_2,$$

其中 m_1, m_2, m_3 為正整數。令 $N(k)$ 為所有滿足(1)的正整數組 (m_1, m_2, m_3) 的個數。

- (a) 請證明存在一個和 k 無關的常數 $C > 1$ ，使得對所有的正整數 k ，滿足

$$\frac{1}{C}k^3 \leq N(k) \leq Ck^3.$$

- (b) 對每個實數 x ，指數函數 e^x 由下列所定義：

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right),$$

其中 e 為自然底數。我們知道 e^x 為可微函數， $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ 且

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

為一對一且滿射(one to one and onto)的函數，其中 $\mathbb{R}$ 為所有實數的集合， $\mathbb{R}_+$ 為所有正實數的集合。令

$$\ln x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

為 e^x 的反函數。即對所有正實數 x ， $e^{\ln x} = x$ 且對所有實數 x ， $\ln(e^x) = x$ 。

給定一個依賴於 k 的正整數組序列 $(m_1(k), m_2(k), m_3(k))$ ，且對每個正整數 k ， $(m_1(k), m_2(k), m_3(k))$ 均不滿足(1)。請證明對任意正整數 N ，下列極限成立：

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (\ln k)^N \int_{k\delta_1 + \sqrt{\ln k}}^{k\delta_2 - \sqrt{\ln k}} e^{-(x - m_1(k)\beta_1 - m_2(k)\beta_2 - m_3(k)\beta_3)^2} dx = 0.$$

- (c) 給定兩個正整數組序列 $(m_1(k), m_2(k), m_3(k))$ ， $(m'_1(k), m'_2(k), m'_3(k))$ 。假設對每個正整數 k ， $(m_1(k), m_2(k), m_3(k))$ ， $(m'_1(k), m'_2(k), m'_3(k))$ 都滿足 (1)。請證明

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \left| \int_{k\delta_1 - \sqrt{\ln k}}^{k\delta_2 + \sqrt{\ln k}} \left(e^{-(x - m_1(k)\beta_1 - m_2(k)\beta_2 - m_3(k)\beta_3)^2} - e^{-(x - m'_1(k)\beta_1 - m'_2(k)\beta_2 - m'_3(k)\beta_3)^2} \right) dx \right| = 0.$$

- (d) 請證明存在一個和 k 無關的常數 $\hat{C} > 1$ ，使得對所有的正整數 k ，下列不等式成立：

$$\frac{1}{\hat{C}}k^3 \leq \sum_{k\delta_1 \leq \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + \beta_3 m_3 \leq k\delta_2, (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3} \int_{k\delta_1 - \sqrt{\ln k}}^{k\delta_2 + \sqrt{\ln k}} e^{-(x - m_1\beta_1 - m_2\beta_2 - m_3\beta_3)^2} dx \leq \hat{C}k^3,$$

其中 $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3$ 表示由三個正整數構成的正整數組。

- (4) 令 $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 為 $\mathbb{R}^3$ 中的單位球，令 $N = (0, 0, 1)$ 為北極點。從 N 到球上一點 $P(x, y, z)$ ($z \neq 0$) 的連線與 xy -平面有唯一交點 $\pi(P)$ ，以此定義球極射影 $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，在此 $\mathbb{R}^2$ 與 xy -平面視為相同： $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ 。
- (a) 若 $\pi(x, y, z) = (\alpha, \beta)$ ，求出其對應公式

$$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z).$$

- (b) 考慮平面 $y = z$ 與 S 的交圓 Γ ，求平面曲線 $\pi(\Gamma) = \{\pi(P) \mid P \in \Gamma\}$ 的方程式。
- (c) S 上的大圓指的是過原點平面和 S 的交圓。討論球面上大圓三角形（即各邊為大圓弧段的「三角形」）的球極射影有沒有可能是平面上的正常三角形。