2024 台大數學系特殊選才試題

(1) 在空間中固定一點 P 和兩個平面 Ω 和 Σ，若 P 不在 Ω 和 Σ 上， 假設 $A \in \Omega$ 且直線$\overleftrightarrow{PA}$ 交 Σ 於 A', 則稱 A' 是 A 經由 P 的投影。

(a) 設 $P = (1, 0, -1)$，$\Omega = \{(x, y, z) \mid z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$，$\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$。 考慮圓 $\gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \Omega$， 描述 γ 經由 P 的投影的軌跡。

(b) 設 $O = (0, 0, 0)$， 將 Ω 換成球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$。 考慮球面上的圓 γ:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

描述 γ 經由 O 的投影的軌跡。

(c) 續 (b)， 考慮球面上的圓 γ_α:

$$\begin{cases} x + z = \cos\alpha + \sin\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

證明 γ_α 經由 O 的投影的軌跡是橢圓且求出其長短軸長。γ_α 的投影軌跡可以窮盡所有橢圓的大小和形狀嗎?

(2) (a) 考慮三元一次實係數線性方程組

$$\begin{cases} x + \ \ y - \qquad\qquad\qquad z = 2 \\ x + 2y + \qquad\qquad\qquad z = 3 \\ x + \ \ y + (k^3 - 7k + 5)z = k \end{cases}$$

請問當 k 為何值時此方程組在 $\mathbb{R}^3$ 中有唯一的解？當 k 為何值時此方程組在 $\mathbb{R}^3$ 中有無窮多個解？ 當 k 為何值時此方程組在 $\mathbb{R}^3$ 中沒有解？

(b) 對於任何 $v \in \mathbb{R}^n$，我們定義 v 的長度為 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$， 其中 $\langle , \rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的標準內積。如果在 (a) 的線性方程組有無窮多個解的情況下，請找出有最小長度的解。

(c) 考慮四元一次實係數線性方程組

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + w = \frac{11}{9} \\ \qquad\ \ y \qquad\ + w = \frac{7}{9} \\ 4x \quad + \quad 4z \qquad = \frac{8}{9} \end{cases}$$

請在 $\mathbb{R}^4$ 中找出其擁有最小長度的解。

Date: 2024 年 12 月 12 日 9:00 - 11:00. 請嚴謹作答・缺乏實質內容或直接背誦公式並不會獲得任何分數・ .

(3) 令 n 是一個大於 1 的整數且 $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$。 若一個 I_n 到 I_n的映射 T 滿足下列性質： 存在兩個整數 $1 \le i < j \le n$ 使得 $T(i) = j$，$T(j) = i$，並且對所有 $k \in I_n \setminus \{i, j\}$ 都有 $T(k) = k$ ， 則我們稱 T 為一個交換映射並重寫 $T = T_{(i,j)}$。我們定義一個循環映射 $r_n : I_n \to I_n$ 如下： 對所有 $1 \le i \le n-1$ 我們有 $r_n(i) = i+1$ 並且 $r_n(n) = 1$。

(a) 令 $n > 2$，請證明對三個相異整數 $a, b, c \in I_n$,

$$T_{(a,c)} \circ T_{(a,b)} = T_{(a,b)} \circ T_{(b,c)} = T_{(b,c)} \circ T_{(a,c)}.$$

(b) 請證明任何一個一對一的映射 $g : I_n \to I_n$ 都可以寫成若干個交換映射的合成。 （提示：數學歸納法。）

(c) 請證明單位映射 $U : I_n \to I_n$ (即對所有 $i \in I_n$ 都有 $U(i) = i$) 只能寫成偶數個交換映射的合成。

(d) 試證若 n 為奇數，則 r_n只能寫成偶數個交換映射的合成 ；反之，若 n 為偶數，則 r_n 只能寫成奇數個交換映射的合成。

(4) 我們想要討論定義在 $\mathbb{R}$ 上的函數 $x \mapsto \sin(x)$ 與 $x \mapsto \cos(x)$ 相關的不等式。

(a) 證明對於所有 $x \ge 0$，我們有 $\sin(x) \le x$ 還有 $\cos(x) \ge 1 - \frac{x^2}{2}$。
提示：你可以考慮函數 $x \mapsto x - \sin(x)$ 並對他微分，然後對另一個函數也使用類似的方法。

(b) 對於所有整數 $n \ge 0$ 還有 $x \in \mathbb{R}$，我們定義

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

使用數學歸納法來證明：

* 如果 $n \ge 0$ 是偶數，那對 $x \ge 0$，我們有 $\sin(x) \le f_n(x)$ 和 $\cos(x) \le g_n(x)$；
* 如果 $n \ge 0$ 是奇數，那對 $x \ge 0$，我們有 $\sin(x) \ge f_n(x)$ 和 $\cos(x) \ge g_n(x)$。

(c) 均值定理說如果函數 f 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可微，那麼存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$。 證明在 (a) 中，當 $x > 0$ 時，當中的不等式是嚴格不等式。 對於 (b) 中的不等式，你可以得到什麼結果呢？