2023 台大數學系特殊選才試題

(1) 我們依下列方式定義兩個多項式序列：

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad \forall n \geq 1,$$

及

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x,$$
$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x), \qquad \forall n \geq 1.$$

(a) 證明對於所有 $n \geq 0$，多項式 T_n 的次數為 n 並求它的領導係數（多項式最高次項的係數）。 對於多項式 U_n，也請回答相同問題。

(b) 給定 $\theta \in \mathbb{R}$，請簡化 $T_n(\cos\theta)$ 的式子並找出 T_n 所有的根。 相同地，請簡化 $U_n(\cos\theta)$ 並找出 U_n 所有的根。

(c) 費波那契數列定義如下：

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1,$$
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

對於所有整數 $n \geq 0$，請找出連結 F_n 與多項式 U_n 的關係式，並且使用多項式 $(U_n)_{n\geq 0}$ 來證明下列關係式：

$$\forall n \geq 1, \qquad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1},$$
$$\forall m, n \geq 0, \qquad F_{m+n+2} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n.$$

（提示：在定義 U_n 的遞迴式中，取 $x = \alpha \cdot \mathrm{i} = \alpha\sqrt{-1}$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是個特殊的值。）

(2) 題組中 $\mathbb{R}^2$ 的極座標 $[r, \theta] := (r\cos\theta, r\sin\theta)$，則 $[r, \theta] = [r, \theta + 2\pi] = [-r, \theta + \pi]$。

(a) 請在 $\mathbb{R}^2$ 上畫出下列極座標方程式的軌跡圖形：

$$r = \frac{2}{\sin\theta}.$$

(b) 請解釋直線極座標方程式

$$r = \frac{c}{\cos(\theta - \alpha)}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

中 c 和 α 代表這條直線在 $\mathbb{R}^2$ 上的幾何意義。

Date: 2023 年 12 月 15 日 9:00 - 11:00. 請嚴謹作答・缺乏實質內容或直接背誦公式並不會獲得任何分數・ .

(c) 已知 $\mathbb{R}^2$ 上兩點 A, B，其中 A 為二直線 $r\cos(\theta-\frac{\pi}{6})=3$ 和 $r\sin\theta=3$ 的交點，而 $B=[2,\frac{5\pi}{6}]$，求通過 A, B 兩點的直線極座標方程式。

(d) 由上題(c)所得直線上一動點 P，若 O 為 $\mathbb{R}^2$ 上的原點，現以線段 OP 為一邊在 $\mathbb{R}^2$ 中做正三角形 ΔOPQ，求頂點 Q 之軌跡決定的極座標方程式。

(3) 令 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 為一個線性變換，其中 $n\le 3$。 如果對於 $\mathbb{R}^n$中任意的兩向量 u 和 v，恆有 $|F(u)-F(v)|=|u-v|$， 則稱 F 是一個保距變換。

(a) 找出一個線性變換 $s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 並寫下它相對應的矩陣表示使得 s 固定住向量 $(-1,1)$ 並且把 $(1,1)$ 送到 $(-1,-1)$。 證明 s 是一個保距變換。

(b) 令 $H\subset\mathbb{R}^3$為由線性方程 $\sum_{i=1}^{3}x_i=0$ 定義的平面。找一個線性變換 s_H 使得所有 H 裡的點都會被 s_H 固定住並且每個與 H 垂直的向量 v 都會被送到 $-v$。請問 s_H 是否為保距變換？ (我們稱 s_H 為對平面H的鏡射。)

(c) 令 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 為一個保距變換。 證明 $F(u)\cdot F(v)=u\cdot v$。（此處 $u\cdot v$ 是向量 u 和 v 的內積。）

(d) 令 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 為一個保距變換。 證明 F 可以用數個鏡射 s_{H_i} 合成。（此處 H_i 為通過原點的平面，而 s_{H_i} 為對 H_i 的鏡射。）
(提示: 先考慮 $\mathbb{R}^2$ 中的保距變換。)

(4) 給定兩個正實數 $a>b>0$， 考慮它們的算術平均數 $a_1=\frac{a+b}{2}$ 以及幾何平均數 $b_1=\sqrt{ab}$。 對於任意$n\ge 1$，我們遞迴地定義 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ 以及 $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$。

(a) 試證明這兩個數列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$ 都收斂，並且收斂到同一個實數（可以直接使用一個性質：一個有界且單調遞增(或遞減)的數列一定會收斂)。

(b) 我們也可以考慮收斂的速度。定義 $c_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2}$，試證明 $c_{n+1}\le\frac{c_n^2}{4b}$。

(c) 令 $I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}dx$。 試證明 $I(a,b)=I(a_1,b_1)$ (提示: 可以考慮變數變換: $\sin x=\frac{2a\sin y}{a+b+(a-b)\sin^2 y}$)。