

九十二學年度國立台灣大學數學系學士班

申請入學筆試試題 (一)

92 年 3 月 28 日 上午 9:00~11:00

說明：每題 20 分。答題時，計算題要有計算過程，證明題要論證清晰完整。請儘量作答，計算或證明不完全者，可就正確部分得部分分數。

- 一 試描繪極坐標曲線 $r=1+\sin\theta$ 的圖形。
(請利用所附的三角函數表，畫在所附的極坐標紙上。)

θ	10°	20°	40°	50°	70°	80°
$\sin\theta$	0.174	0.342	0.643	0.766	0.940	0.985

- 二 設方程式 $x^3+2x^2-5x-7=0$ 的三根為 α, β, γ 。
試求以 $\alpha^2+2, \beta^2+2, \gamma^2+2$ 為三根的三次方程式

- 三 設正方形 $P_1 P_2 P_3 P_4$ 的邊長為 1，且 P_5 為此正方形內一點。試證
一定存在相異 3 點 P_i, P_j, P_k 使得三角形 $\Delta P_i P_j P_k$ 的面積 $\leq \frac{1}{8}$ 。

- 四 直角三角形中，三邊長皆為正整數且其中一股 (即非斜邊) 長為 45。
試問此種直角三角形有多少種？其中面積最小的是什麼？

- 五 某校圖書館藏書用 6 個阿拉伯數碼 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ 來編號，其中 $0 \leq a_i \leq 9$ ，且此 6 個數字滿足下列條件：

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 \text{ 會被 } 11 \text{ 整除。}$$

- (1) 試問下列那些編號一定是錯誤編號？

331013, 570120, 956501

- (2) 設上題錯誤編號是因第二碼 a_2 被誤寫，則正確編號是什麼？

- (3) 設上題錯誤編號是因第三碼 a_3 被誤寫，則正確編號是什麼？

- (4) 是否有一編號的第三，四碼 $a_3 a_4$ 被誤寫，而檢測不出來？為什麼？

九十二學年度國立台灣大學數學系學士班

申請入學筆試試題 (二)

92 年 3 月 28 日 下午 2:00~4:00

說明：每題 25 分。答題時，計算題要有計算過程，證明題要論證清晰完整。請儘量作答，計算或證明不完全者，可就正確部分得部分分數。

- 一 設 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 為取自集合 $\{2, 6, -2, 1, 3\}$ 之相異 5 個數，且 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 為取自集合 $\{3, -1, 5, 4, -3\}$ 之相異 5 個數。若 $k = (-2) \times (-3) + 1 \times (-1) + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 6 \times 5$ ，則試證
- $$x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + x_3 \times y_3 + x_4 \times y_4 + x_5 \times y_5 \leq k$$

- 二 設橢圓的長軸為 x 軸，且原點為此橢圓左邊的頂點。

(1) 試寫出此種橢圓的通式。

(2) 用你的橢圓通式，要如何取極限就可以得到拋物線 $y^2 = 4x$ 。

- 三 (1) 設 $f(x) = x^2 + 4x + c$ 且對任何正整數 n ， $f(n)$ 為整數的平方。

試證 $f(x) = (x+2)^2$ 。

- (2) 設 $f(x) = 4x^2 + bx + c$ 且對任何正整數 n ， $f(n)$ 為整數的平方。

試證存在一整數 k ，使得 $f(x) = (2x+k)^2$ 。

- 四 P 點在 x 軸上的整數點 $0, 1, 2, 3, 4$ 間跳動。當 P 點在 n 且

$0 < n < 4$ 時，則經過 1 分鐘後， P 點跳至點 $n+1$ 的機率為 $\frac{3}{4}$ ，

跳至點 $n-1$ 的機率為 $\frac{1}{4}$ 。當 P 點在 0 或 4 時，則 P 點就不再

跳動。設一開始 P 點在 2 的位置。

(1) 試求 P 點停在 0 的機率是多少？

(2) 試求 P 點停在 4 的機率是多少？

(3) 若經過 k 分鐘後， P 點停在 0 或 4 ，則 k 的期望值是多少？