2025 台大數學系申請入學試題

1. 設 $f(x_1,x_2,x_3)=(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3,\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3,x_2)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一個線性映射。選 $\mathbb{R}^3$ 上三個點 $O(0,0,0),A(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),B(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1)$。
   (1) 請找出另外五個點 C,D,E,F,G 使得 $OABCDEFG$ 形成 $\mathbb{R}^3$ 中的一個正立方體。
   (2) 設 O',A',B',C',D',E',F',G' 分別為 O,A,B,C,D,E,F,G 在 f 作用下的像點，試問 $O'A'B'C'D'E'F'G'$ 是否仍為一個正立方體？
   (3) 證明 $P(1,2,1),Q(2,1,-1),R(3,0,-3)$ 三點共線。
   (4) 設 P',Q',R' 分別為 P,Q,R 在 f 作用下的像點，試問 P',Q',R' 是否仍然共線？

2. 定義一個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下:
$$a_n=\max_{1\le k\le n}((\frac{k}{n})^n\log(\frac{n}{k})).$$
   也就是說給定 n，取某一個正整數 k 並且$1\le k\le n$，讓 $(\frac{k}{n})^n\log(\frac{n}{k})$ 為最大值。
   (1) 試著推導當 n 夠大之後，讓上述發生最大值的 k 會是 $1,2,\cdots,n$ 的哪一個?
   (2) 試探討 a_n 的極限值，並證明你的論述。

3. 令 $a>0$，我們考慮由下列方程式所定義出來的圖形：
$$\mathcal{E}_a: ax^2+y^2-2x=0.$$
   (1) 證明 $\mathcal{E}_a$ 描繪的是橢圓，並找出此橢圓的中心、四個頂點以及焦點。
   (2) 當 a 取值在 $(0,+\infty)$ 時， $\mathcal{E}_a$ 的中心會描繪出什麼樣的圖形？
   (3) 當 a 取值在 $(0,+\infty)$ 時， $\mathcal{E}_a$ 的四個頂點會描繪出什麼樣的圖形？
   (4) 當 a 取值在 $(0,+\infty)$ 時， $\mathcal{E}_a$ 的焦點會描繪出什麼樣的圖形？

4. 設一個三角形$\triangle ABC$三邊長為 a, b 以及 c, $\triangle$ 表其面積。令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。
   (1) 試證 $\triangle^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$。
   (2) 令 $a=3$, $b=5$, $c=6$。求 $\triangle ABC$的內切圓半徑。

5. 考慮所謂的布阿松（Poisson）分佈，假設隨機變數 X 定義在集合$\{0,1,2,\cdots\}$上，且 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，其中 $\lambda>0$ 是這個分佈的參數 (想成一個常數) 而 e 是自然對數的底，滿足
$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$
   (1) 證明 $P(X=k)$ 真的滿足機率函數的定義。
   (2) 求期望值 $\mathsf{E}(X)$ 與變異數 $\mathsf{Var}(X)$。

Date: 2025 年 5 月 18 日 10:00 - 12:00. 請嚴謹作答・缺乏實質內容或直接背誦公式並不會獲得任何分數.

2025 台大數學系申請入學試題

1. (1) 設 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 且滿足方程式 $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$。 求證 $1\le x,y,z\le \frac{7}{3}$。
   (2) 設 a,b 皆為實數且 $ab\neq 0$。證明方程式 $ax^2+2bxy-ay^2=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 之圖形為互相垂直的兩條直線。
   (3) 求方程式 $x^2+4xy+4y^2-2x-4y-3=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的圖形為何？

2. 令 $V=\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{R}\}$，也就是三維空間中的所有向量集合。

   (1) 使用數學歸納法證明：任意 $v_i\in V$, $1\le i\le n$, $|\sum_{i=1}^n v_i|\le\sum_{i=1}^n|v_i|$。

   (2) 試探討當 v_i 皆為非零向量且 $|\sum_{i=1}^n v_i|=\sum_{i=1}^n|v_i|$，這些向量有哪些關係?

3. 考慮下列方程式：

$$\mathcal{E}: x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+2=0.$$

   (1) 寫下在二維歐氏空間 $\mathbb{R}^2$ 中，對於原點逆時針旋轉 $\theta\in\mathbb{R}$ 的旋轉矩陣 R_θ。
   (2) 在 $\mathbb{R}^2$ 中取新坐標 (U,V)，且 (U,V) 與原坐標 (x,y) 有如下的關係：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = R_{\pi/3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   將方程式 $\mathcal{E}$ 重新以 (U,V) 坐標表示。
   (3) 在 xy 坐標平面上畫出 $\mathcal{E}$ 的圖形，並註明此二次曲線的中心、漸近線以及焦點。

4. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 中三個點 $A=(4,0,0)$, $B=(0,4,0)$, $C=(0,0,-2)$。
   (1) 請寫下過 A, B, C三點的平面方程式。
   (2) 寫下三角形 $\triangle ABC$的外心坐標。
   (3) 請找出空間中所有到A, B, C三點等距離的點的參數式。

5. 底下是一個「猴子打出莎士比亞」的簡單版本。 假設某語言有10個字母， 要隨機打出一個由 d 個字母構成的詞。 假設「打」出任何字母的機率都相等， 而且打出系列字母時， 彼此之間是完全獨立的。 底下討論 $d=2$ 的情形：
   (1) 規定每打出 2 個字母的「詞」， 就做一次比對 ; 如果結果和指定詞不同， 就放棄重打， 一直到正確為止。 用 $X=k$ 表示打到第 k 次才成功的事件。 求機率 $P(X=k)$ 以及期望值 $\mathsf{E}(X)$。
   (2) 修改規則如下：第一輪打出 2 個字母的「詞」後， 就做比對， 其中如果出現正確的字母就保留， 只需重打錯誤的部分，否則就全部重打，以此類推，一直到最後正確為止。 用 $Y=k,k>0$ 表示打到第 k 次才停止的事件。 求機率 $P(Y=k)$ 以及期望值 $\mathsf{E}(Y)$。

Date: 2025 年 5 月 18 日 14:00 - 16:00. 請嚴謹作答 · 缺乏實質內容或直接背誦公式並不會獲得任何分數.