2024 台大數學系申請入學試題

1. (1) 設 $P_1P_2\cdots P_n$ 為一個正 n 邊形而原點 O 為其中心，證明下列 n 個向量和為零：
$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}=0.$$
   (2) 令 $\theta=\frac{2\pi}{7}$，求 $\sum\limits_{n=1}^{6}\cos(n\theta)$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{6}\sin(n\theta)$的值。
   (3) 已知一正立方體兩對角線相交，求其交角的值。

2. 假設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 為一個四次有理係數多項式。令 $g(x)=x^2+x+1$, $h(x)=x^2+3x+5$。 已知對$n=1,2,3,4$, $f(n)=g(n)h(n)$。試回答下列問題。
   (1) 求 $f(x)$ 除以 x(x+1)的餘式。
   (2) 求兩個次數小於2的整係數多項式$P(x)$,$Q(x)$使得 $P(x)g(x)+Q(x)h(x)=6$。
   (3) 證明對所有正整數 n, 若$n-1$不被3整除,則$g(n)$與$h(n)$互質。

3. 對任意向量 $(p,q)\in\mathbb{R}^2$, 定義數列 $S(p,q)=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$， 其中 a_n 滿足 $a_1=p$, $a_2=q$, 且 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$, $n\in\mathbb{N}$。 例如
   $S(1,0)=(1,0,1,2,5,12,29,\cdots)$
   $S(0,1)=(0,1,2,5,12,29,70,\cdots)$
   $S(1,1)=(1,1,3,7,17,41,99,\cdots)$
   (1) 證明 $S(\alpha(p,q)+\beta(r,s))=\alpha S(p,q)+\beta S(r,s)$， 其中數列的運算如下：
   $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)+(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n,\cdots)$
   $\lambda(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n,\cdots)$
   例如上例中 $S(1,1)=S(1,0)+S(0,1)$。
   (2) 若已知 $S(p,q)$, $p\neq 0$, 是等比數列, 求 $\frac{q}{p}$。
   (3) 從(1)和(2)的結果求出數列 $S(1,1)$ 一般項的表式 (亦即 a_n 的公式)。
   (若你解答的方法和(1), (2)無關， 只能得部分分數。)

4. 固定 $a,b>0$ 並考慮橢圓
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
   令 P 為此橢圓上的任意一點。
   (1) 求過 P 點且與橢圓相切的直線方程式。
   (2) 令 M 為橢圓上的一點，使得 $\overrightarrow{OM}$ 與上題切線平行。求三角形 OPM 的面積。

Date: 2024 年 5 月 19 日 10:00 - 12:00. 請嚴謹作答・缺乏實質內容或直接背誦公式並不會獲得任何分數.

2024 台大數學系申請入學試題

1. (本題數字都是實數) 令二階方陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, X 是某二階方陣. 證明 $XA = AX \quad \Leftrightarrow \quad X = \alpha I + \beta A$.
   (2) X為二階方陣。若對任何二階方陣P, X 都滿足 $XP = PX$, 證明 $X = \lambda I$.

2. 考慮編號 $1, 2, 3, \ldots, N$的N個箱子和N本書以及N支筆。現在把這些書以及筆隨機地放進這些箱子(每個箱子都要有一本書，一支筆)。令 A_i 代表編號 i 的箱子收集到編號 i 的書以及編號 i 的筆之事件。
   (1) $P(A_i)$的機率是多少 ？ $P(A_i \cap A_j)$, $i \neq j$, 的機率是多少 ？
   (2) 沒有一個箱子同時收集到同樣編號的書以及筆的機率值為何？

3. 固定無理數 $x \in (0, 1)$。 我們定義 $b_0 = x$，並透過遞迴，定義
$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \lfloor b_{n-1} \rfloor, \quad b_n = \tfrac{1}{b_{n-1}} - \lfloor b_{n-1} \rfloor.$$
   我們可以注意到，這裡 $(a_n)_{n\geq 1}$ 是個正整數數列。 接著，我們定義
$$\forall n \geq 1, \quad [a_1, \ldots, a_n] := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}.$$
   對於所有 $n \geq 1$，由於 $[a_1, \ldots, a_n]$ 是個有理數，我們可以將他寫作
$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n],$$
   其中 p_n 與 q_n 是互質的正整數。
   在下面問題中，我們取 $x = \sqrt{2} - 1$。
   (1) 求 $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, p_4, q_4$ 的值。
   (2) 令 $p_0 = 0$ 及 $q_0 = 1$，證明對於所有 $n \geq 1$，存在整數 r_n, s_n, u_n, v_n 滿足
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n & s_n \\ t_n & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$
   （提示：輾轉相除法。）
   (3) 證明對於所有 $n \geq 0$，我們有 $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$。

4. 請嚴謹地寫出下列問題的證明。
   (1) 寫出平面上一個點 $Q(a_0, b_0)$ 到直線 $L : ax + by = c$ 的距離公式並證明它。
   (2) 均值定理告訴我們，如果 $f(x)$ 為定義在區間 $[a, b]$ 的連續函數，並且在區間(a, b) 可微，那麼給定任何兩點 s, t，我們有 $f(t) - f(s) = f'(\theta)(t - s)$，其中 $s < \theta < t$。使用均值定理來判斷 e^x 與 $1 + x + \frac{x^2}{2}$ 的大小關係並證明你給的答案。

Date: 2024 年 5 月 19 日 14:00 - 16:00. 請嚴謹作答・缺乏實質內容或直接背誦公式並不會獲得任何分數.