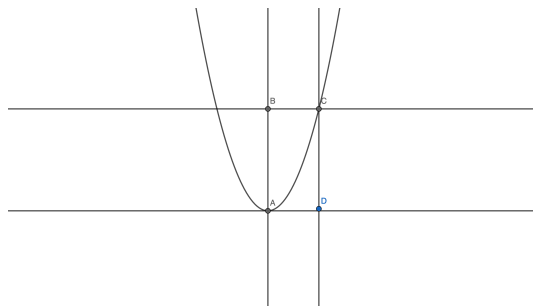


2023 台大數學系申請入學試題

1. 令 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ 與 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ 為兩個實係數 2×2 矩陣，滿足 $A^2 = B^2$ 、 $a_1 + a_4 \neq 0$ 、 $b_1 + b_4 \neq 0$ 。試證 $AB = BA$ 。
2. 回答下列問題
- (a) 空間中有三角形 $\triangle ABC$ ，說明 $P \in \triangle ABC$ 若且唯若
- $$\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$$
- 其中 O 為原點。
- (b) $ABCD$ 為空間中之四面體，定義過一頂點的中線為該頂點與其對面三角形重心之連線，證明四面體 $ABCD$ 的四中線交於
- $$\frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$
- (c) 四面體 $ABCD$ 的四高會交於一點嗎？請給出詳細證明或給出反例。
3. (a) 函數曲線 $y = x^3$ 將頂點在 $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$ 和 $D = (1, 0)$ 的長方形分成兩部分，證明曲線下方的面積為曲線上方面積的三分之一。
- (b) 設 (x_0, y_0) 為在函數曲線 $y = f(x)$ 的一點，假設 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0$ 且 $x > 0$ 。函數曲線 $y = f(x)$ 將頂點在 $A = (0, 0)$, $B = (0, y_0)$, $C = (x_0, y_0)$ 和 $D = (x_0, 0)$ 的長方形分成兩部分，其中曲線下方的面積為曲線上方面積的一半。證明該曲線是拋物線 $y = x^2$ 。



4. 在臺灣2022年5月的總出生人口資料統計下，假設一個人生日是第 i 天的機率為 p_i ，且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_{31} = 1$ ，且每個人的生日彼此都是獨立。如果現在這個教室裡面有 K 個人 ($K < 31$)。令 P_K 是表示這 K 個人生日皆不相同的機率值。
- (a) 用 p_1, \cdots, p_{31} 來表示 P_K 。
- (b) 試證明：如果我們要讓 P_K 達到最大值，那麼 $p_i = \frac{1}{31}$ 對所有的 i 。

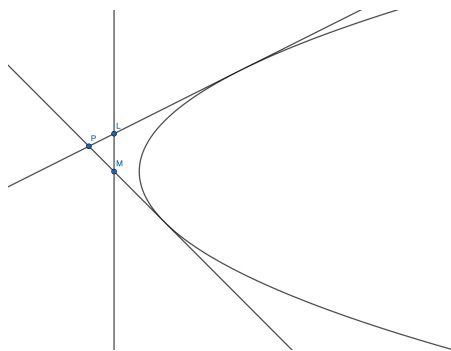
2023 台大數學系申請入學試題

1. 令 $x^3 + px^2 + qx + r$ 為一個三次實係數多項式， α_1 、 α_2 、 α_3 為其三個根。
請用係數 p 、 q 、 r 表示

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j \\ 1 \leq j < 3 \\ i \neq j}} \alpha_i^2 \alpha_j \quad \text{與} \quad \sum_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i^3。$$

2. 證明空間中的平面 $x + 2y + 2z = 5$ 和圓柱體 $x^2 + y^2 = 1$ 相交於一橢圓，並求其長短軸。
3. 設 $P = (p, q)$ 為拋物線 $y^2 = 4ax$ 外的一點，即 $q^2 - 4ap > 0$ 。
- (a) 證明恰好有兩條從 (p, q) 到拋物線 $y^2 = 4ax$ 的切線，並找出這兩條切線的方程式。
- (b) 在上一小題(a)求出的兩條切線在點 L 和 M 與準線 $x = -a$ 相交。如果 \overline{LM} 線段的長度固定為 r ，證明點 (p, q) 必滿足下列方程式，

$$(p + a)^2(q^2 - 4ap) = r^2 p^2$$



4. (a) 令 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是由矩陣 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ 所決定的線性變換，即 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，請證明 f 是平面中的一個鏡射並求出它的鏡射軸。
- (b) 對於(a)小題中的線性變換 f ，證明存在一組正交基底 α 使得 f 對於基底 α 的對應矩陣為 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。
- (c) 令 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，證明 f 為鏡射的充分必要條件為存在一組正交基底 α 使得 f 對於基底 α 的對應矩陣為 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。