

國立臺灣大學數學系 105 學年度大學『個人申請』入學

第二階段筆試試卷

2016 年 03 月 26 日

1.(20 分) 求出所有可能實數 a ，使得多項式 $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x + a$ 有四個相異實根。

2.(15 分) 給定一個正實數 r ，當複數 z 跑遍複數平面上以 0 為圓心、 r 為半徑的圓時， $z + \frac{1}{z}$ 的軌跡為何？請針對不同的 r 做討論。

3.(15 分) 考慮多項式 $f(x) = -x^9 + 100x^8 + 2x^7 + 66x^4 - 98x^2 + 7$ 。找出一個正數 R 使得對所有滿足 $|x| > R$ 的實數 x 都有 $|f(x)| > 2016$ 。請說明理由。

4. 雙曲線與直線關係問題

首先引進一些辭彙。假設 L 為 xy -平面上由方程式 $ax + by + c = 0$ 所定義的直線。(以下談論這樣的直線方程式時均假設 a 、 b 、 c 為使得 a 與 b 不同時為零的三個實數。)

- 此直線決定了平面上的幾種區域：分別由不等式 $ax + by + c > 0$ 及 $ax + by + c < 0$ 定義的兩個區域稱為由 L 決定的兩個「開半平面」，而分別由不等式 $ax + by + c \geq 0$ 及 $ax + by + c \leq 0$ 定義的兩個區域稱為由 L 決定的兩個「閉半平面」。
- 如果平面上的兩圖形 S 與 T 各自被包含在由 L 決定的兩個相異的開半平面中，我們便說「 S 與 T 被 L 分離」。
- 如果平面上的兩集合 S 與 T 各自被包含在由 L 決定的兩個相異的閉半平面中，我們便說「 S 與 T 被 L 弱分離」。

舉例來說， L 若為直線 $y = 0$ ， A 、 B 、 C 與 D 為分別以 $(-1, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(3, -1)$ 與 $(1, -2)$ 為圓心，半徑為 1 的圓，則 B 與 D 被 L 分離，而被 L 弱分離的組合有 A 與 C 、 A 與 D 、 B 與 C 、 B 與 D 。

問題：

令 H 為 xy -平面上由方程式 $x^2 - y^2 = 1$ 所定義的雙曲線。我們將 H 上所有滿足 $x \geq 0$ 的點構成的圖形記作 H_+ ，而將所有滿足 $x \leq 0$ 的點構成的圖形記作 H_- 。現在考慮直線 $L: ax + by + c = 0$ 。

- (1) (25 分) 請問直線 L 與 H 可以有幾個交點？請針對每種情況說明 a 、 b 與 c 所應滿足的條件。
- (2) (15 分) 請找出「 L 分離 H_+ 與 H_- 」時對應的 a 、 b 與 c 所應滿足的條件。
- (3) (10 分) 如果 L 將 H_+ 與 H_- 弱分離，請問 L 是否能與 H_+ 與 H_- 各自都有交點？為什麼？

(請注意 (1) 與 (2) 中所問之 a 、 b 與 c 應滿足的條件 必須表示為與 a 、 b 與 c 有關的等式、不等式、邏輯連接詞「且」與「或」，以及括弧的組合，並試著化簡。比方說，答案可能會這麼寫：

- (1) 1 個交點 $\iff ab - c > 0$ 且 $b - ac = 0$ ；5 個交點 $\iff ac^2 + abc \leq 0$ 或 $b^2 - 4ac < 0$ 。
- (2) $(ac^2 - bc \leq 0$ 或 $a^2 - c^4 = 0)$ 且 $b^2 + 4ac > 0$ 。

此外，務必清楚寫出你得到這些答案的理由及過程。請注意，上面的文字僅為說明作答格式要求的範例，並不見得是邏輯上的正確答案。)