傳播學的謠言擴散模型

假設謠言就像傳染病, 聽到的人一定要轉告給別人(沒有智者的八卦城市), 則謠言的擴散會滿足Logistic模型:$P'(t) = \lambda P(t)(M - P(t))$. 現假設在台灣某次選戰中, 甲方為求勝選, 決定造謠抹黑對方, 但為了出奇制勝, 決定在選舉前兩天才派人造謠, 假設小城有10000選舉人口, 且根據經驗, $\lambda \approx 2 \times 10^{-4}$.

1. 如果甲方希望能在選舉當天有過半數的人知道這個謠言, 他至少必須派出多少人的造謠部隊?
2. 如果甲願意將時間移為5天前, 他又該怎麼做?

何謂Logistic模型?

在了解Logistic模型之前, 要先知道英國經濟學家馬爾薩斯(Malthus)在1798年發表的"人口原理"中, 提出下述人口成長模型:

人口的成長率與總人口數成正比

寫成數學式則為: $P'(t) = \lambda P(t)$, 其中$P(t)$表示時間t的人口數. 而比利時數學家 Verhulst在1840年修正了馬爾薩斯的人口模型, 他認為:

人口之成長不能超過由其地域環境所決定之某最大容量M

於是提出下面的模型, 通稱為Logistic模型: $P'(t) = \lambda P(t)(M - P(t))$, $\lambda, M > 0$, 這方程的意思是: 在人口相對少時, 基本上馬爾薩斯的模型是對的, 但當人口相當多時, 人口成長率便會趨緩, 而且越靠近人口上限M時, 成長率越小.

如何解微分方程?

利用分離變數法, 記$P = P(t)$有$\frac{dP}{dt} = \lambda P(M - P) \Rightarrow \frac{1}{P(M-P)}dp = \lambda dt$, 兩邊積分後,

左式$= \int \frac{dP}{P(M-P)} = \frac{1}{M}\int(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P})dP = \frac{1}{M}[\ln|P| - \ln|M - P|] + C_1 = \frac{1}{M}\ln|\frac{P}{M-P}| + C_1$, 其中$C_1$是常數,

而右式$= \lambda t + C_2$, C_2是常數, 於是 $\frac{1}{M}\ln|\frac{P}{M-P}| = \lambda t + C_2 - C_1 \Rightarrow \frac{P}{M-P} = e^{M(\lambda t + C_2 - C_1)} = C_3 e^{M\lambda t}$, $C_3 = e^{C_2 - C_1}$為常數,

最後再化簡得$P(t) = \frac{M}{1 + C_4 e^{-M\lambda t}}$, $C_4 = \frac{1}{C_3}$為常數.

若設初始條件$P(t_0)=P_0$, $0<P_0<M$, 則$P(t)=\frac{M}{1+(\frac{M}{P_0}-1)e^{-\lambda M(t-t_0)}}$
回到原問題, 此時$M=10000$, $\lambda\approx 2\times 10^{-4}$, 現在是希望找到在 t_0時刻的P_0為多少的時候會使得兩天之後的$P(t)$值大於5000?
即找P_0使得$\frac{10000}{1+(\frac{10000}{P_0}-1)e^{-2\times 10^{-4}\times 10^4\times 2}}>5000$, 於是$(\frac{10000}{P_0}-1)e^{-4}<1$,
$\therefore P_0>\frac{10000}{e^4+1}\doteq 179.86$, $\therefore$ 至少要派180人.

同樣地, 若將時間改為五天的話, 即解不等式
$\frac{10000}{1+(\frac{10000}{P_0}-1)e^{-2\times 10^{-4}\times 10^4\times 5}}>5000$, 於是$(\frac{10000}{P_0}-1)e^{-10}<1\Rightarrow P_0>\frac{10000}{e^{10}+1}\doteq 0.45$,
$\therefore$ 他自己一人散佈即可.