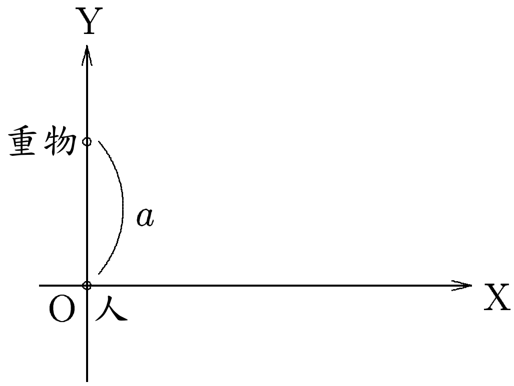
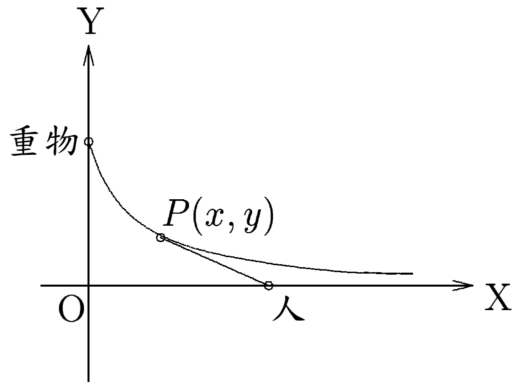
拖重物問題

有個人位於坐標原點上, 其正北方a單位處有個重物, 今用一繩綁住重物並往x軸正向移動. 試找出重物被拖行的軌跡?





記物體被拖行的軌跡為$P(x,y)$, 觀察重物和人之間的關係發現

<u>人和物之間的直線斜率要和重物的軌跡在那點的切線斜率一樣</u>,

所以和果$y=y(x)$表示重物的軌跡, 那麼切線可表示為$Y-y=y'(X-x)$, 所以若$Y=0$得到$X=x-\frac{y}{y'}$. 點$(x-\frac{y}{y'},0)$就是重物在 (x,y)處, 人所在的位置.

另外, <u>人與重物的跡離始終保持a單位</u>, 所以 $(\frac{y}{y'})^2+y^2=a^2$. 因為$0<y<a$且$y'<0$, 於是應取 $\frac{-y}{y'}=(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$, 又$y'=\frac{dy}{dx}$, 經由分離變數得到$-\frac{a^2-y^2}{y}dy=dx$, 兩邊積分之, 令$y=a\sin t$, $dy=a\cos t dt$. 所以

$$
\begin{aligned}
& \int -\tfrac{a^2-y^2}{y}dy = \int -\tfrac{a\cos t}{a\sin t}\cdot a\cos t dt \\
= \;& \int -\tfrac{a(1-\sin^2 t)}{\sin t}dt = \int -a[\csc t-\sin t]dt \\
= \;& (-a)\cdot[-\ln|\csc t+\cot t|+\cos t+C_1 \\
= \;& (-a)[-\ln|\tfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}|+\tfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}]+C_1 \\
= \;& a\ln|\tfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}|-\sqrt{a^2-y^2}+C_2
\end{aligned}
$$

其中$C_2=-aC_1$為常數.

$\Rightarrow a\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}|-\sqrt{a^2-y^2}+C_2=x+C_3$

$\Rightarrow x-a\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}|+\sqrt{a^2-y^2}=C_4$ (常數,待定)

由初始值$y(0)=a \Rightarrow C_4=0$,

$\therefore$ $\underline{\text{重物的軌跡為} x - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right| + \sqrt{a^2-y^2} = 0.}$

另解: 若你熟悉一些雙曲函數之間的運算的話, 令$y = \frac{1}{a\cosh t}$,
則$dy = \frac{-\operatorname{sech} t \cdot \tanh t}{a}dt$, 於是 $dx = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy = \frac{a}{\operatorname{sech} t} \cdot \frac{\tanh t}{a} \cdot \frac{\operatorname{sech} t \cdot \tanh t}{a}dt = \frac{1}{a}\tanh^2 t dt = \frac{1}{a}(1-\operatorname{sech}^2 t)dt$. $\Rightarrow x = \frac{t-\tanh t}{a} + C$, C為常數.
初始條件: $t=0$時$x=0$, $y=a$, $\Rightarrow C=0$
所以$\left(\frac{t-\tanh t}{a}, \frac{1}{a\cosh t}\right)$為重物的軌跡的參數式.

註:此曲線稱為tractrix