問題: 狗追兔子

在座標平面上, 兔子由$(0,0)$出發, 以等速q沿著X軸向右逃跑. 狗由$(0,a)$出發, $a>0$, 狗頭始終瞄準兔子, 以等速p追兔子, 請討論狗在何時何處可以追上兔子?

設狗跑的路徑為 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 則有

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=p^2 \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{qt-x} \tag{2}$$

由$(2)\Rightarrow qt-x=-y\frac{dx}{dy}$
兩邊對y微分, 得 $q\frac{dt}{dy}-\frac{dx}{dy}=-\frac{dx}{dy}-y\left[\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})\right]$ 令$u=\frac{dx}{dy}$, 得

$$q\frac{dt}{dy}=-y\left(\frac{du}{dy}\right) \tag{3}$$

將(1)除以$(\frac{dy}{dt})^2$, 得$(\frac{dx}{dy})^2+1=\left(\frac{p}{\frac{dy}{dt}}\right)^2$ 因此

$$\frac{dy}{dt}=-\left[\frac{p^2}{1+(\frac{dx}{dy})^2}\right]^{\frac{1}{2}}=-p\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

將(4)代入(3), 得

$$\frac{q}{p(\frac{1}{1+u^2})^{\frac{1}{2}}}=y\frac{du}{dy} \tag{5}$$

以r表$\frac{q}{p}$, (5)寫成$r\sqrt{1+u^2}=y\frac{du}{dy}$
分離變數法: $r\frac{dy}{y}=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$
積分：$r\ln y=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}+C=\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C$

$$y^r=C_1(u+\sqrt{1+u^2})$$

初始值：$(u(0),y(0))=(0,a)\Rightarrow C_1=a^r$

$$y^r=a^r(u+\sqrt{1+u^2})$$

因此

$$(\frac{y}{a})^r - u = \sqrt{1+u^2}$$

兩邊平方後整理: $u = \frac{1}{2}\left[(\frac{y}{a})^r - (\frac{y}{a})^{-r}\right]$, $r = \frac{q}{p}$, $u < 0$.
$u = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[(\frac{y}{a})^r - (\frac{y}{a})^{-r}\right]$

$$dx = \frac{1}{2}\left[(\frac{y}{a})^r - (\frac{y}{a})^{-r}\right] dy \tag{6}$$

第一種情形: $1 - r \neq 0$,

$$x = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1+r}(\frac{y}{a})^{r+1} - \frac{1}{1-r}(\frac{y}{a})^{1-r}\right] + C$$

初始值：$(x(0), y(0)) = (0, a)$, 得到 $C = \frac{a}{2}(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r}) = \frac{ar}{1-r^2}$, 那麼

$$x = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1+r}(\frac{y}{a})^{r+1} - \frac{1}{1-r}(\frac{y}{a})^{1-r}\right] + \frac{ar}{1-r^2}$$

如果 $p > q$ 則 $r = \frac{q}{p} < 1$, 令 $y = 0$, 得出 $x = \frac{ar}{1-r^2} > 0$. 狗在$(\frac{ar}{1-r^2}, 0)$追上兔子, 須時$t = \frac{a}{p(1-r^2)}$.
如果 $p < q$ 則 $r = \frac{q}{p} > 1$. 當$y \to 0^+$, $x \to \infty$. 狗追不上兔子.

第二種情形: $p = q$, $1 = r$. (6)式變成 $dx = \frac{1}{2}\left[\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right] dy$

$$x = \frac{1}{4a}y^2 - \frac{1}{2}a\ln\frac{y}{a} + C$$

初始值: $(x(0), y(0)) = (0, a)$, 得 $C = -\frac{a}{4}$, 則

$$x = \frac{1}{4a}y^2 - \frac{1}{2}a\ln\frac{y}{a} - \frac{a}{4}$$

當 $y \to 0^+$ 時, 同樣有 $x \to \infty$. 因此狗也追不上兔子.

不過, $p \leq q$ 狗追不上兔子是常識.

本文參考: Agnew, Differential Equation 2^{nd} ed. P.51. Problem 2.456.