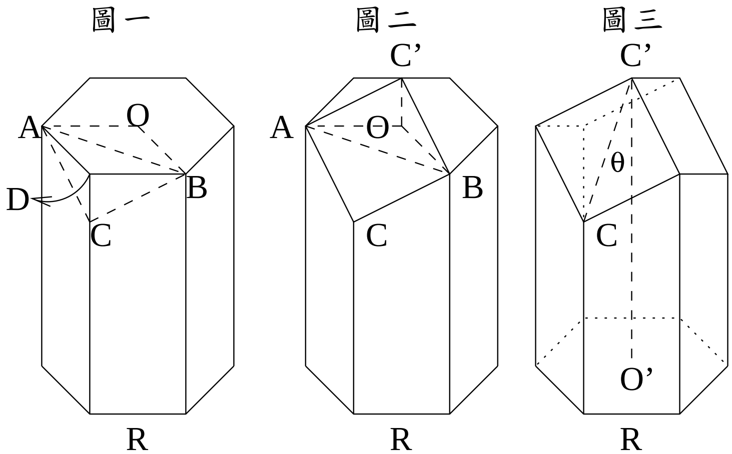
蜂房問題(Honeycomb-Structure Problem)

一個固定邊長R的正六角柱, 上方被替換成三個交於一個公共點的菱形. 如下圖所示:



(先將四面體ABCD截下, 再將$\triangle ABD$與$\triangle ABO$貼合, 得到圖二, 再對另外兩個四面體作同樣的動作, 最後得到圖三) 柱的底面是空的, 而總體積會是一個常數, 不妨設成V, 如果我們假設$\angle CC'O' = \theta$, 那麼此柱體的表面積S會是以下的形式:

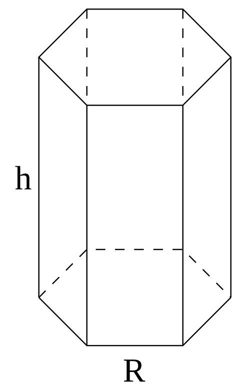
$$S = \frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{V}{R} - \frac{3}{2}R^2 \cot\theta + \frac{3}{2}\sqrt{3}R^2 \csc\theta$$

並證明當$\theta \approx 54.7°$時, S會有最小值.

該如何計算蜂房(圖三)的表面積呢? 由題目所述的過程中可以清楚地了解: 表面積為六角柱的柱面面積(1)減掉六個小三角形(2)再加上三個菱形面積(3). 由於它是"正"六角柱構成的, 所以我們可以只算一小部分的表面積即可

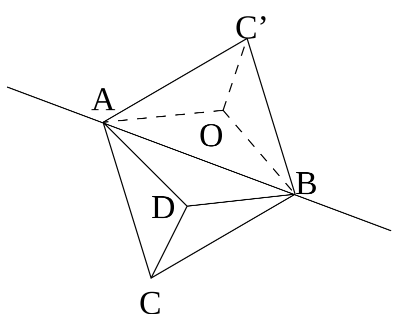
1. 體積V, 底面積為六個小的正三角形組成, 邊長為R, 所以底面積 $= 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, 得到柱高 $h = \frac{V}{3\frac{\sqrt{3}}{2}R^2} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\frac{V}{R^2}$ 因此周圍的表面積$= 6h\cdot R = \frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{V}{R}$

圖四

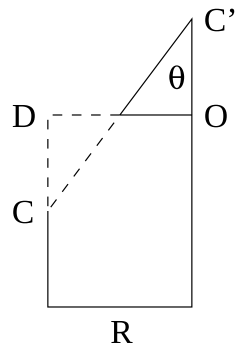


2. 切掉的六個小三角形面積需要注意一下, 因為θ是最後最高點與底面和最矮邊長的夾角, 事實上$\overline{CD}$的長度等於圖二中$\overline{OC'}$的長度, 用側面圖來看就可以很清楚地知道關係了(圖六)所以$\overline{CD} = \overline{C'O} = \frac{R}{2}\cot\theta$, 因此六個小三角形的總面積為 $6(\frac{1}{2}R\cdot\frac{R}{2}\cot\theta)$

圖五

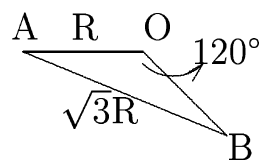


圖六

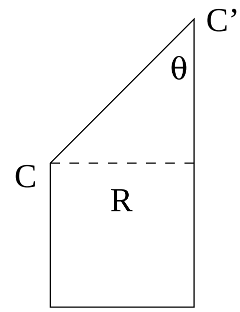


3. 三個菱形的總面積$= 3\cdot(\frac{1}{2}$兩對角線之積$) = 3\cdot(\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CC'}) = 3\cdot(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot R\csc\theta) = \frac{3}{2}\sqrt{3}R^2\csc\theta$(見圖七、八)

圖七



圖八

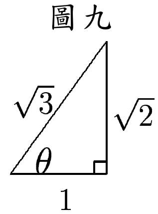


所以蜂房的表面積= (1)-(2)+(3) $= \frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{V}{R} - \frac{3}{2}R^2\cot\theta + \frac{3}{2}\sqrt{3}R^2\csc\theta$

進一步地, 我們發現總表面積呈現一個和θ有關的函數 (因為V和R都固定了),並且θ在0～90度之間$\cot\theta$與$\csc\theta$ 是連續可微分的, 因此我們可利用微分的方法找到S的極值:

- $S(\theta)$對θ微分:
  $S'(\theta) = -\frac{3}{2}R^2\csc^2\theta - \frac{3}{2}\sqrt{3}R^2\csc\theta\cdot\cot\theta$, 令$S'(\theta) = 0$
  $\because R \neq 0,\ \csc\theta \neq 0$
  $\Rightarrow \csc\theta = \sqrt{3}\cot\theta$
  $\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta}$
  如果$\theta \neq 0,\ \sin\theta \neq 0$
  $\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
  $\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54.7°$

圖九



- 計算$S''(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$
  $=\frac{3}{2}R^2 2(\csc\theta)(-\csc\theta\cdot\cot\theta)-\frac{3}{2}\sqrt{3}R^2(-\csc\theta\cot^2\theta-\csc^3\theta)|_{\theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}}$
  $=R^2(-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^3)$
  $=R^2(-\frac{9}{4}\sqrt{2}+\frac{9}{8}\sqrt{2}+\frac{27}{8}\sqrt{2})$
  $=\frac{9}{4}\sqrt{2}R^2>0$
  所以, $\theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$時, 表面積有最小值.

- 事實上, 蜂房的形狀真的長得如此, 並且研究發現θ值真的約$54.7°$, 於是可以想見蜜蜂聰明之處, 不浪費原料

註: 圖一中四面體ABCD這一塊切下的同時, 繞軸$\overline{AB}$旋轉$180°$, 使D與O疊合, 就得到圖三.