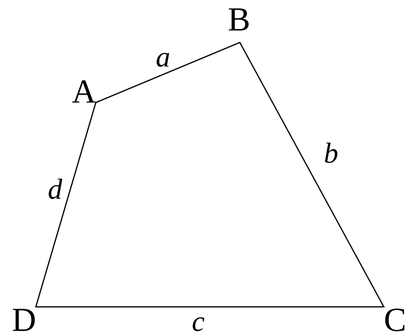
四邊形面積公式和微積分基本定理

三角形被三個邊長完全確定, 四邊形則否. 有名的海龍公式告訴我們如何利用三個邊長來計算三角形的面積. 至於四邊形求面積的公式, 不能只用四個邊長, 還要加上頂角的角度, 公式由Bretschneider在1842年提出(註一). 如果四個邊長依序為a, b, c, d, 而相關的頂角分別為A, B, C, D(如圖一)



(圖一)

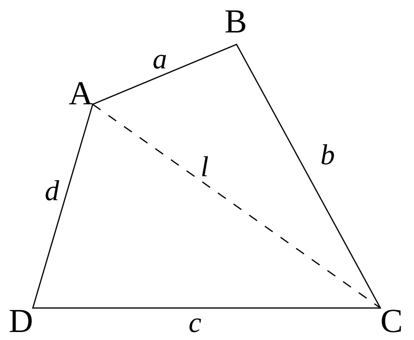
則此四邊形的面積$\triangle$的平方可以表為

$$\triangle^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)$$

其中s是周長的一半. 如果以$s = \frac{a+b+c+d}{2}$代入整理, 可以將Bretschneider公式寫成

$$\triangle^2 = \frac{1}{16}(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d) - abcd\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)$$

一個重要的結果是, 當此四邊形內接於一個圓的時候, 由於$B + D = 180°$, 因此面積會最大, 並且面積的平方就是$\frac{1}{16}(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$. 有關Bretschneider公式, 蔡聰明在他的書中用平面幾何的方法給了完整的證明(同註一). 本文嘗試用微積分的方法來得出相同的公式, 想法來自微積分基本定理-我們想要求一個圖形的面積, 不妨把面積對某個參數微分, 看看能得出什麼, 然後再積分(反微分)回去, 積分回去的時候, 會生出一個不定常數, 再想方法確定這個常數, 在本文中, 四邊形的四個邊長a, b, c, d給定, 它的面積以$\triangle$表示(如圖二所示), 參數就是角B, 至於角D, 它被B所決定, 因此可以看成B的函數.



(圖二)

我們先把△寫成

$$\triangle = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$$

則有

$$\frac{d\triangle}{dB} = \frac{1}{2}ab\cos B + \frac{1}{2}cd\cos D\frac{dD}{dB}$$

因為

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$$

微分之後有

$$ab\sin B = cd\sin D\frac{dD}{dB} \tag{1}$$

現考慮

$$\triangle\frac{d\triangle}{dB} = \frac{1}{4}\left(ab\sin B + cd\sin D\right)\left(ab\cos B + cd\cos D\frac{dD}{dB}\right)$$

將(1)代入得

$$\begin{array}{rcl}
\triangle\frac{d\triangle}{dB} & = & \frac{1}{4}\left(cd\sin D\frac{dD}{dB} + cd\sin D\right)\left(ab\cos B + cd\cos D\frac{dD}{dB}\right) \\
 & = & \frac{1}{4}(\frac{dD}{dB}+1)cd\left[ab\sin D\cos B + cd\sin D\cos D\frac{dD}{dB}\right] \\
(Use(1)) & = & \frac{1}{4}(\frac{dD}{dB}+1)cd\left[ab\sin D\cos B + ab\sin B\cos D\right] \\
 & = & \frac{1}{4}(\frac{dD}{dB}+1)abcd\sin(B+D) \\
 & = & -\frac{1}{4}abcd\frac{d}{dB}(\cos(B+D))
\end{array}$$

所以

$$\frac{d}{dB}(\triangle^2) = -\frac{1}{2}abcd\frac{d}{dB}(\cos(B+D))$$

因此

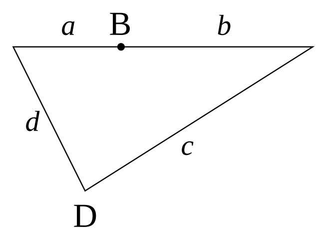
$$\triangle^2 = K - \frac{1}{2}abcd\cos(B+D) \tag{2}$$

其中

$$K = K(a,b,c,d)$$

是一個待定的常數.

如何決定K, 當然要選一個特別的角B代入, 一般會想到讓$B+D=180°$, 此時$\triangle$就是內接於一圓時四邊形的面積, 但這未必好求. 比較好的方法是令 $B=180°$, 四邊形就變成了一個三角形. (如圖三)



(圖三)

這雖然是一個退化的情形, 但是一則不影響一般性, 再則三角形的面積有現成的海龍公式, 也就是說我們得到

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{16}(a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a-b) \\ = \; & K - \tfrac{1}{2}abcd\cos(180° + D) \\ = \; & K + \tfrac{1}{2}abcd\cos D \end{aligned} \tag{3}$$

再用一次餘弦定律

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{16}(a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a-b) \\ = \; & K + \tfrac{1}{4}ab\left[c^2+d^2-(a+b)^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

我們注意左邊就是三角形三邊長為$a+b, c, d$的面積平方(海龍)公式. (4)式已經決定了K, 雖然尚未整理, 卻至少告訴我們, K 是一個a,b,c,d的四次齊次多項式.

現在, 可以利用配方來整理K(這需要一點後見之明)

$$
\begin{aligned}
& K \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)\left((c+d)^2-(a+b)^2\right) \\
& -\tfrac{1}{4}ab\left(c^2+d^2-(a+b)^2\right) \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)\left((c+d)^2-(a+b)^2\right) \\
& -\tfrac{1}{4}ab\left(c^2+d^2-(a+b)^2\right)+\tfrac{1}{2}abcd-\tfrac{1}{2}abcd \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)\left((c+d)^2-(a+b)^2\right) \\
& -\tfrac{1}{4}ab\left(c^2+d^2-2cd-(a+b)^2\right)-\tfrac{1}{2}abcd \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)\left((c+d)^2-(a+b)^2\right) \\
& +\tfrac{1}{4}ab(a+b+c-d)(a+b+d-c)-\tfrac{1}{2}abcd \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)\left((c+d)^2-(a+b)^2+4ab\right)-\tfrac{1}{2}abcd \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a+b)(c+d+a-b)-\tfrac{1}{2}abcd
\end{aligned}
$$

代回到(2)

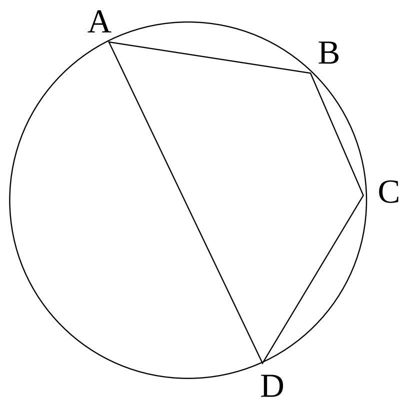
$$
\begin{aligned}
& \triangle^2 \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a+b)(c+d+a-b)-\tfrac{1}{2}abcd \\
& -\tfrac{1}{2}abcd\cos\left(B+D\right) \\
= \ & \tfrac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d-a+b)(c+d+a-b) \\
& -abcd\cos^2\left(\tfrac{B+D}{2}\right) \\
= \ & (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\tfrac{B+D}{2}\right)
\end{aligned}
$$

這是Bretschneider公式.

我第一次看到將$\triangle$對角B微分, 是在項武義老師的演講中, 他的講題是等周問題(Isoperimetric Problem), 他寫下了

$$\triangle\frac{d\triangle}{dB}=\frac{1}{4}\left(\frac{dD}{dB}+1\right)abcd\sin\left(B+D\right)$$

然後, 他令$\frac{d\triangle}{dB}=0$, 得出$\sin\left(B+D\right)=0$或者$B+D=180^\circ$時, $\triangle$會有最大值. 他利用這個事實嘗試給等周問題一個比較幾何的證明 (當然, 他假設了等周問題是有解的)(註二) 他的證明如下: 不妨假設這個面積最大的情形是發生在一個凸的區域(周長給定)(如圖四)



(圖四)

任取四點, 連一個四邊形, 如果ABCD不能內接於一圓, 那麼就可以調整角B, 讓ABCD的面積更大, 而注意到作這個調整的時候弧長AB,BC,CD及DA都沒有改變. 因此, 如果這個凸區域在給定的周長之下具有最大面積的話, 那在邊上任取四點, 所成的四邊形都必須內接於一圓, 不難證出這些圓根本就是同一個圓, 這個凸區域就是此圓的內部. 等周問題主張在周長一定的時候, 圓域的面積最大. 武義師的證明相當有啟發性.(註三)

註一: 見蔡聰明, 數學的發現趣談, 三民書局九十一年版, 第163頁

註二: 等周問題是問, 當周長一定的時候, 什麼樣的區域會有最大的面積. 答案是圓域, 有興趣的讀者可以參考Courant and John, Introduction to Calculus and Analysis, Vol II, p.p. 365-366.

註三: 八十八年項武義在台大數學系給的演講