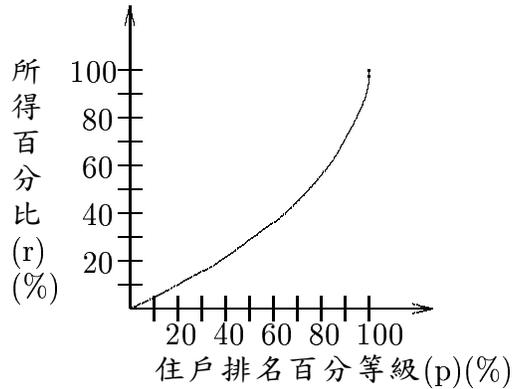


經濟學上的Lorenz Curve

經濟學上的Lorenz曲線是個很好的均值定理(Mean-Value Theorem)的應用。比方說我們想要研究一個國家中的每個家庭所得收入的情形。我們可以用以下方式來了解：

1. 先將所有住戶以所得由小到大排列
2. 橫軸代表住戶的”百分等級”，縱軸所顯示的是”累積所得”佔總所得的百分比

如下圖：



如此一來，描繪出來的點畫成的曲線即為Lorenz Curve.

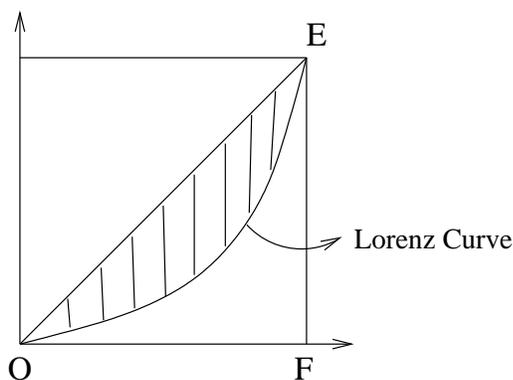
Lorenz Curve具有下面的幾個特質：

- 此曲線一定是遞增，並且凹口向上的圖形：(因為住戶數夠多，於是我們可將Lorenz Curve畫得平滑些，至少二階可微分)
不妨這樣子看：Lorenz Curve可以表示成 $r = I(P) = \int_0^P i(p)dp$ ，其中 $i(p)$ 為百分等級為 p 的住戶的所得佔全部所得的比例。
 $r = I(p)$ 即此圖形的縱軸值
 $\therefore I'(x) = i(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$ (微積分基本定理)
 $\Rightarrow I(x)$ 遞增
 $\therefore I''(x) = i'(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ (因為排序方式是由小到大)
 \Rightarrow 凹口向上.
- ESC(Equal-Share Coefficient)
我們希望在Lorenz Curve一找到切線斜率為1的點，我們稱這個點是ESC(Equal-Share Coefficient)，簡記為 ϵ ，點 ϵ 的收入正好和平均收入一

樣(因為平均收入為(0,0)與(1,1)的割線斜率),因此它是一個很好的指標:在 ϵ 以下的住戶所得比平均所得低,在 ϵ 以上的住戶所得比平均所得高.此點 ϵ 在Lorenz Curve上存在嗎?答案是肯定的,因為均值定理(Mean-Value Theorem)告訴我們:如果一函數在閉區間 $[a, b]$ 連續,在開區間 (a, b) 可微,則存在一點 c ,使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.用在Lorenz Curve上, ϵ 即為 c 點.導函數 $f'(x)$ 就是 $i(x)$.並且:如果每個住戶所得不相等,則圖形的斜率 $i(x)$ 函數嚴格遞增,於是保證 ϵ 唯一.

● Gini Coefficient

Gini Coefficient是一種衡量貧富差距大小的指標,我們可以想見:如果每個住戶的收入都一樣的時候,畫出來的Lorenz Curve會是(0,0)到(1,1)的直線,如果貧富差距愈大,則Lorenz Curve就會離那條直線愈遠,Gini Coefficient就是計算以下式子:



Lorenz Curve和對角線所包圍的面積與 $\triangle OEF$ 面積的比值

如果我們清楚Lorenz Curve的函數式 $I(p)$,那麼Gini Coefficient就會是

$$\frac{\int_0^1 (p - I(p)) dp}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1} = 2 \int_0^1 (p - I(p)) dp = 1 - 2 \int_0^1 I(p) dp$$

所以我們也可利用積分工具以得到Gini Coefficient.