生日問題

如果你在班上發現有兩位同學同月同日生(年份不計), 亦即生日是同一天時, 會不會很驚訝? 我自己就有這個經驗, 讀初中的時候, 班上有位同學和我生日一樣, 每年到了這一天, 我們都會同時向對方說:"生日快樂"

如果我告訴你, 隨便抽出50個人, 其中有兩人生日在同一天的機率會大於95%, 你一定會覺得不可思議, 這個問題主要是要計算

$$\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{316}{365}$$

這是隨便抽50個人, 生日均不相同的機率(假設一年是365天) 一般來說, 隨便抽n個人, 生日均不相同的機率是

$$D(n)=\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{366-n}{365}$$

以下我們要用不同的方法來說明 $D(50)<5\%$ 和 $D(23)<50\%$ 換句話說, 50個人中有兩個人生日相同的機率大於95%, 而只要有23個人, 那其中有兩個人生日相同的機率就會大於50%.

計算方法一, 利用幾何平均小於算術平均

$$\begin{aligned}\tfrac{364}{365}\tfrac{363}{365}\cdots\tfrac{316}{365} &< \left[\tfrac{1}{49}\left(\tfrac{364}{365}+\tfrac{363}{365}+\cdots+\tfrac{316}{365}\right)\right]^{49}\\ &= \left(\tfrac{680}{730}\right)^{49}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{680}{730}\right)^{49}=10^{49[\log 6.8-\log 7.3]}$$

查表 $\log 6.8=0.8325, \log 7.3=0.8633,$
$(0.8633-0.8325)\cdot 49=(0.0308)\cdot 49=1.5092$
$10^{1.5092}=10\cdot 10^{0.5092}=10\cdot 3.23=32.3$
所以$\left(\frac{680}{730}\right)^{49}=\frac{1}{32.3}$不到百分之四.
如果$n=23$

$$\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{343}{365}<\left(\frac{707}{730}\right)^{22}$$

$\log 7.07=0.8494$
$(0.8633-0.8494)\cdot 22=0.3058$
$10^{0.3058}=2.02$
所以$\left(\frac{707}{730}\right)^{22}<\frac{1}{2.02}<50\%$

計算方法二

$$D(n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{k}{365})$$

利用 $1 - x < e^{-x}$

$$D(n) < e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdots e^{-\frac{n-1}{365}} = e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$$

$n = 23$時, $\frac{23 \cdot 22}{730} = 0.693151$, $\log_e 2 = 0.693147$
$e^{-\frac{n(n-1)}{730}} < e^{-\log_e 2} = \frac{1}{2}$
如用計算器, 得$e^{\frac{23 \cdot 22}{730}} = 2.000007$, 因此 $n = 23$時, $e^{-\frac{n(n-1)}{730}} < \frac{1}{2}$.