實係數多項式區間中根的個數

有一個實係數多項式, 我們要如何知道在某一個區間裡出現了幾個實根呢?

讓我們來看看下面的方法(Sturm的發明)

給一個實係數多項式 $f(x)$, 先假設 $(f(x), f'(x)) = 1$, (即 $f(x)$ 無重根)

設 $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$

且 $f_{k-1}(x) = q_k(x)f_k(x) - f_{k+1}(x) \cdots (*)$, $deg(f_{k+1}(x)) < deg(f_k(x))$.

因為 $(f(x), f'(x)) = 1$, 所以我們得到的最後一個$f_l(x)$是非零的常數,

我們稱$\{f_0(x), f_1(x), \cdots, f_l(x)\}$是$f(x)$的Sturm數列.

我們定義$V(a)$是$\{f_0(a), f_1(a), \cdots, f_l(a)\}$正負號變化的次數.

例如: $f(a)$的Sturm數列是$\{+, -, +, -\}$那$V(a) = 3$

假設$f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, 則 $f(x)$在(a, b)出現根的個數等於$V(a) - V(b)$

現考慮下列三種情形

(1) $\{f_0(\xi), f_1(\xi), \cdots, f_l(\xi)\}$中不可能有連續為0的情形產生. 因為如果 $f_k(\xi) = 0 = f_{k-1}(\xi)$, 則$f_{k+1}(\xi) = 0$(by (*)), 而導出 $f_l(\xi) = 0$(但假設 $f_l(\xi) \neq 0$)

(2) 如果$f_k(\xi) = 0$, $k > 0$, 由(*)可知$f_{k-1}(\xi) = -f_{k+1}(\xi) \neq 0$, 取足夠小的$\delta$使得符號列表如後:

x	$\xi-\delta$	ξ	$\xi+\delta$
f_{k-1}	$+$	$+$	$+$
f_k	$\pm$	0	$\pm$
f_{k+1}	-	-	-

x	$\xi-\delta$	ξ	$\xi+\delta$
f_{k-1}	-	-	-
f_k	$\pm$	0	$\pm$
f_{k+1}	$+$	$+$	$+$

由表可知$V(\xi - \delta) = V(\xi + \delta)$

(3) 如果 $f_0(c) = 0$, $f_0(x) = f(x)$, 那麼$f_1(c) \neq 0$.
假設$f_1(c) > 0$,

x	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_0	-	0	$+$
f_1	$+$	$+$	$+$

或假設$f_1(c) < 0$

x	$c-\delta$	c	$c+\delta$
f_0	$+$	0	-
f_1	-	-	-

由表可知$V(c - \delta) - V(c + \delta) = 1$

所以我們可以知道如果在$(c-\delta, c+\delta)$出現一個根時, $V(c-\delta) = V(c+\delta)+1$

所以$f(x)$在(a,b)根的個數是$V(a)-V(b)$

舉個例子來看看吧!

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1$有幾個實根?$(x \in R)$
$f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = 5x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 18x + 5$,
$f_2(x) = x^3 - x$, $f_3(x) = -32x^2 + 38x - 5$, $f_4(x) = -26 + 19$, $f_5(x) = -192$,
當k很大時
$\{f_0(-k), f_1(-k), f_2(-k), f_3(-k), f_4(-k), f_5(-k)\} = (-,+,-,-,+,-)$,
$V(-k) = 4$
$\{f_0(k), f_1(k), f_2(k), f_3(k), f_4(k), f_5(k)\} = (+,+,+,-,-,-)$, $V(k) = 1$
$V(-k) - V(k) = 3$, 所以$f(x)$有3個實根.

(取材自項武義所著微積分, A Concise Introduction to Calculus, World Scientific, 1995)